2

EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matemáticas

J. Colera, I. Gaztelu

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Esta serie de **Matemáticas** responde a un proyecto pedagógico creado y desarrollado por Anaya Educación para la ESO. En su elaboración han participado:

Autores: José Colera e Ignacio Gaztelu

Coordinación editorial: Mercedes García-Prieto

Edición: César de la Prida

Diseño de cubiertas e interiores: Miguel Ángel Pacheco y Javier Serrano

Tratamiento infográfico del diseño: Javier Cuéllar, Patricia Gómez y Teresa Miguel

Equipo técnico: José Luis Román e Isabel Pérez

Corrección: Sergio Borbolla

Ilustraciones: Ángeles Peinador, Carlos Romanos, Bruno Romanos y Jesús Aguado

Edición gráfica: Olga Sayans

Fotografías: Age Fotostock, Archivo Anaya (Agromayor, L.; Candel, C.; Cosano, P.; Leiva, Á de; Lezama, D.; Ortega, Á.; Padura, S.; Ramón Ortega, P./Fototeca España; Valls, R.), Cristina Beltrami/www.duesecolidiscultura.it, Corbis/Cordon Press, Stockphotos.

Agradecimientos a la niña: Icíar de Oliveira

Agradecemos la colaboración de Leticia Colera.

Índice

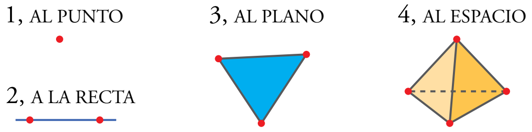
1 Divisibilidad y números enteros

Los conocimientos matemáticos de los antiguos egipcios y babilonios eran extensos y muy prácticos. **Pitágoras** (siglo VI a.C.) aprendió de ellos, pero en su actividad matemática aportó dos elementos que supusieron una extraordinaria mejora:

— En el estudio de la matemática buscó la satisfacción intelectual y no aplicaciones prácticas.

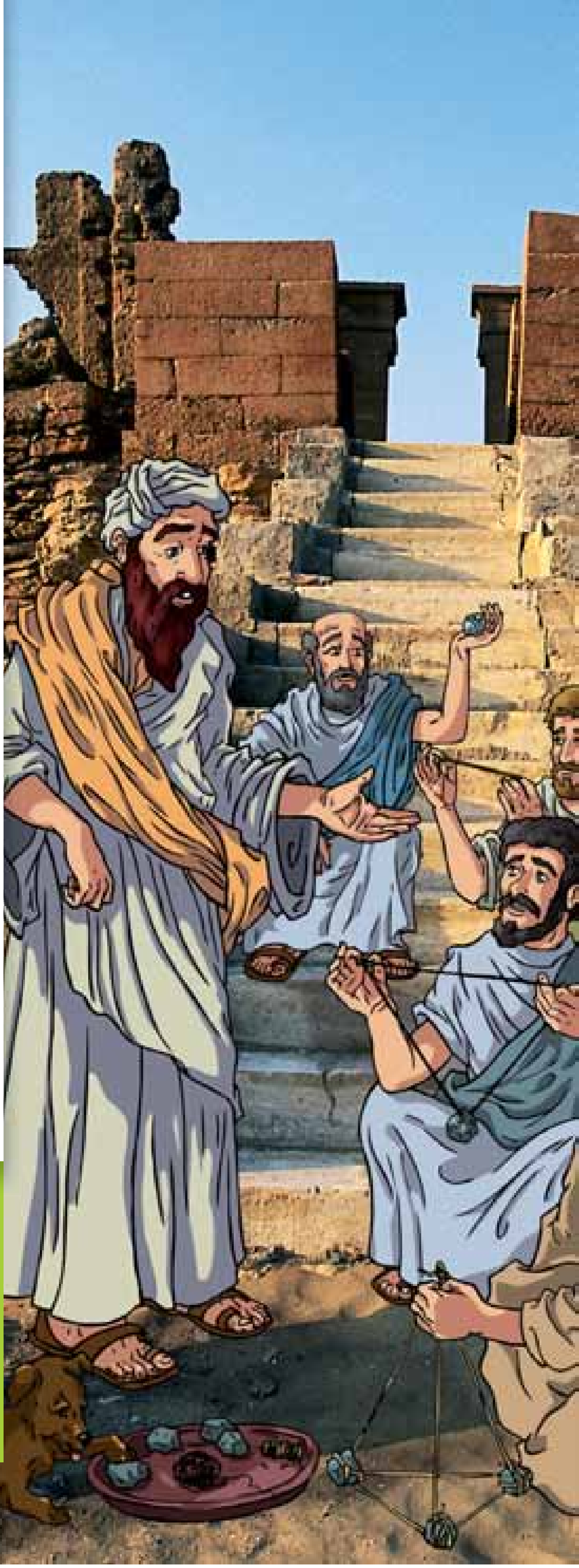
— Impuso que las propiedades se demostraran mediante razonamientos lógicos.

Pitágoras y sus discípulos rindieron un culto muy especial a los números, porque "el universo entero es armonía y número". Según ellos, los números lo regían todo: la música, el movimiento de los planetas, la geometría… Hablaban de números rectangulares, triangulares, cuadrados, pentagonales… Consideraban que el número 10 era *ideal* (incluso *sagrado*), porque era la suma de 1 + 2 + 3 + 4 y asociaban:



Se dedicaron con entusiasmo a la *aritmética*, nombre que dieron al estudio de los números y de sus propiedades.

Euclides (siglo III a.C.) recopiló, completó y sistematizó la mayor parte de los conocimientos matemáticos de su época. Aunque su mayor contribución fue a la geometría, también dio un gran impulso a la aritmética.

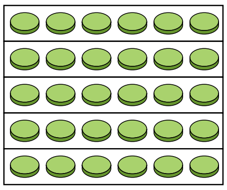


DEBERÁS RECORDAR

- El significado de la división y la relación existente entre sus términos.
- Cuándo son necesarios los números negativos.
- Cuáles son los números enteros, cómo se ordenan y cómo se representan en la recta numérica.
- La prioridad de las operaciones en las expresiones con números naturales.

1 La relación de divisibilidad

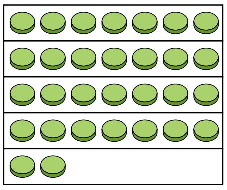
Divisibilidad



$$\begin{array}{r|l} 30 & \underline{\ 6\ \ } \\ 0 & 5 \end{array}$$

(EXACTA)

30 **es divisible** entre 6.



$$\begin{array}{r|l} 30 & \underline{\ 7\ \ } \\ 2 & 4 \end{array}$$

(NO EXACTA)

30 **no es divisible** entre 7.

Múltiplos y divisores

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando su cociente es exacto.

▼ **EJEMPLO**

La división 60 : 20 es exacta.

El número 60 contiene exactamente 3 veces a 20.

$$\begin{array}{r|l} 60 & \underline{\ 20\ \ } \\ 0 & 3 \end{array} \rightarrow \text{60 es divisible entre 20.} \begin{cases} \text{60 es múltiplo de 20.} \\ \text{20 es divisor de 60.} \end{cases}$$

Si la división $a : b$ es exacta → a es **múltiplo** de b.
→ b es **divisor** de a.

Los múltiplos de un número

Los múltiplos de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

▼ **EJEMPLO**

Calculamos la serie ordenada de múltiplos de 15:

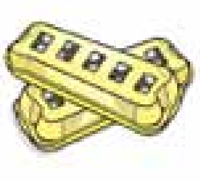
$$\left.\begin{array}{ll} 15 \cdot 1 = 15 & 15 \cdot 4 = 60 \\ 15 \cdot 2 = 30 & 15 \cdot 5 = 75 \\ 15 \cdot 3 = 45 & \dots \end{array}\right\}$$

Los números 15 - 30 - 45 - 60 - 75 - … son múltiplos de 15.

- Un número tiene infinitos múltiplos.
- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad. $\} \rightarrow a \cdot 1 = a$ → a es múltiplo de 1.
→ a es múltiplo de a.

Múltiplos de 12

$12 \cdot 1 = 12$



$12 \cdot 2 = 24$

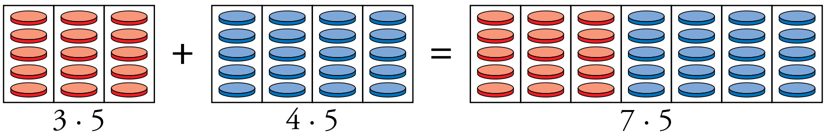
$12 \cdot 3 = 36$

$12 \cdot 4 = 48$

12 - 24 - 36 - 48 - 60 - …

Una propiedad de los múltiplos de un número

Observa que si sumamos dos múltiplos de 5, obtenemos otro múltiplo de 5.



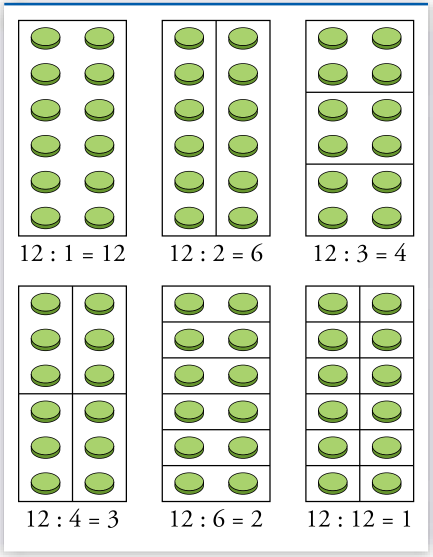
$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = (3 + 4) \cdot 5 = 7 \cdot 5$$

- La suma de dos múltiplos de un número a es otro múltiplo de a.

$$m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$$

- Si a un múltiplo de a se le suma otro número que no lo sea, el resultado no es múltiplo de a.

Divisores de 12



Los divisores de un número

Los divisores de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto.

EJEMPLO

Buscamos todos los divisores de 75:

$$\begin{array}{r|l} 75 & 1 \\ \cline{2-2} 05 & 75 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ \cline{2-2} 15 & 25 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ \cline{2-2} 25 & 15 \\ 0 & \end{array}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 75 \\ \cline{2-2} 00 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 25 \\ \cline{2-2} 00 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 15 \\ \cline{2-2} 00 & 5 \end{array}$$

Los divisores de 75 son ⟶ 1 - 3 - 5 - 15 - 25 - 75

Observa que van emparejados.

- Un número tiene una cantidad finita de divisores.
- Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.

Actividades

1 Busca, entre estos números, parejas emparentadas por la relación de divisibilidad:

13 15 18 23 81
90 91 92 225 243

2 Calcula mentalmente y contesta.

a) ¿Es 18 múltiplo de 5? ¿Y de 6?

b) ¿Es 50 múltiplo de 10? ¿Y de 9?

c) ¿Es 6 divisor de 20? ¿Y de 300?

d) ¿Es 10 divisor de 75? ¿Y de 750?

3 Calcula con lápiz y papel y responde.

a) ¿Es 17 divisor de 153? ¿Y de 204?

b) ¿Es 780 múltiplo de 65? ¿Y de 80?

4 Selecciona, entre estos números:

20 30 36 40 50
60 65 75 80 90
96 112 120 222 300

a) Los múltiplos de 10.
b) Los múltiplos de 12.
c) Los múltiplos de 15.
d) Los múltiplos de 30.

5 Encuentra, entre estos números:

1 2 3
4 5 6
7 8 9
10 12 15
25 30 50

a) Los divisores de 60.

b) Los divisores de 75.

c) Los divisores de 90.

c) Los divisores de 100.

6 Escribe los cinco primeros múltiplos de 12 y los cinco primeros múltiplos de 13.

7 Calcula todos los divisores de cada uno de los siguientes números:

12 16 30 71
130 150 203

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son una serie de reglas, muy simples, que permiten descubrir con rapidez si un número es múltiplo de 2, 3, 5, …

Ten en cuenta

Un número es múltiplo de 2 cuando es par.

Divisibilidad por 2

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 2 más la cifra de las unidades:

$$\underset{\boxed{\text{NÚMERO}}}{\underset{\downarrow}{176}} \quad = \quad \underset{\boxed{\text{MÚLTIPLO DE } 2}}{\underset{\downarrow}{170}} \quad + \quad \underset{\boxed{\text{CIFRA UNIDADES}}}{\underset{\downarrow}{6}}$$

Y según la propiedad que has estudiado en la página 18, para que el número sea múltiplo de 2, ha de serlo la cifra de las unidades.

Un número es **múltiplo de 2** cuando termina en 0, 2, 4, 6 u 8.

Divisibilidad por 5 y por 10

Siguiendo razonamientos similares al anterior, se demuestra que:

- Un número es **múltiplo de 5** si termina en 0 o en 5.
- Un número es **múltiplo de 10** si termina en 0.

Ten en cuenta

Un número formado por nueves es múltiplo de 3 y de 9.

$$9 = 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3$$

$$99 = 9 \cdot 11 = 3 \cdot 33$$

$$999 = 9 \cdot 111 = 3 \cdot 333$$

Divisibilidad por 3 y por 9

Un número de varias cifras siempre se puede descomponer en un múltiplo de 3 más la suma de sus cifras.

EJEMPLO

$$234 = 200 + 30 + 4 \;\rightarrow\; \begin{cases} 200 = 99 + 99 + 2 \\ 30 = 9 + 9 + 9 + 3 \end{cases}$$

$$\underset{\boxed{\text{NÚMERO}}}{\underset{\downarrow}{234}} \quad = \quad \underset{\boxed{\text{MÚLTIPLO DE } 3}}{\underset{\downarrow}{(99 + 99 + 9 + 9 + 9)}} \quad + \quad \underset{\boxed{\text{SUMA DE LAS CIFRAS}}}{\underset{\downarrow}{(2 + 3 + 4)}}$$

El primer sumando es múltiplo de 3. Para que el número sea múltiplo de 3, también ha de serlo el segundo sumando.

Y el mismo razonamiento sirve para los múltiplos de 9.

- Un número es **múltiplo de 3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es **múltiplo de 9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

EJEMPLO

1 254 → 1 + 2 + 5 + 4 = 12 → Es múltiplo de 3.

4 063 → 4 + 0 + 6 + 3 = 13 → No es múltiplo de 3.

2 Números primos y números compuestos

- Los divisores de un número permiten su descomposición en forma de producto de dos o más factores.

  Por ejemplo, los divisores de 40 son: 40 - 20 - 10 - 8 - 5 - 4 - 2 - 1

  $$40 = 8 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

  Los números que, como el 40, se pueden descomponer en factores más simples, se llaman *números compuestos.*

- Sin embargo, otros números, como el 13, solo tienen dos divisores, 13 y 1, y, por tanto, no se pueden descomponer en forma de producto:

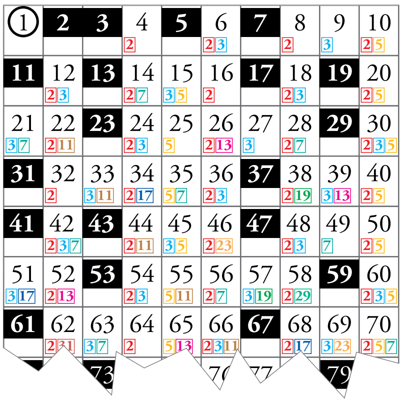
  $$13 = 13 \cdot 1 \;\rightarrow\; \text{no se puede descomponer}$$

  Los números que, como el 13, no se pueden descomponer en factores se llaman *números primos.*

- Un número que no se puede descomponer en factores es un **número primo.**
- Un número primo solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Los números que no son primos se llaman **compuestos.**

Números primos

Criba de Eratóstenes



①	**2**	**3**	4 2	**5**	6 2 3	**7**	8 2	9 3	10 2 5
11	12 2 3	**13**	14 2 7	15 3 5	16 2	**17**	18 2 3	**19**	20 2 5
21 3 7	22 2 11	**23**	24 2 3	25 5	26 2 13	27 3	28 2 7	**29**	30 2 3 5
31	32 2	33 3 11	34 2 17	35 5 7	36 2 3	**37**	38 2 19	39 3 13	40 2 5
41	42 2 3 7	**43**	44 2 11	45 3 5	46 2 23	**47**	48 2 3	49 7	50 2 5
51 3 17	52 2 13	**53**	54 2 3	55 5 11	56 2 7	57 3 19	58 2 29	**59**	60 2 3 5
61	62 2 31	63 3 7	64 2	65 5 13	66 2 3 11	**67**	68 2 17	69 3 23	70 2 5 7
		73				77		**79**	

2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19

23 - 29 - 31 - 37 - 41 …

NOTA: El 1 no se considera primo porque no tiene dos divisores.

En la tabla de la izquierda, llamada la Criba de Eratóstenes, se han marcado:

— Los múltiplos de 2 excepto el 2 → (4 - 6 - 8 - 10 - …) → $\boxed{2}$

— Los múltiplos de 3 excepto el 3 → (6 - 9 - 12 - 15 - …) → $\boxed{3}$

— Los múltiplos de 5 excepto el 5 → (10 - 15 - 20 - 25 - …) → $\boxed{5}$

— … y así sucesivamente → $\boxed{7}$, $\boxed{11}$, $\boxed{13}$, $\boxed{17}$, $\boxed{19}$, …

Los números que quedan, salvo el 1, son los números primos.

Estos son los números primos menores que 100:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41

43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97

Actividades

1 Descompón en dos factores los siguientes números:

93	95	153	168	325	533	663

2 Descompón los siguientes números en el máximo número de factores que sea posible:

32	72	81	84	132	200	221

3 Descompón en factores, de todas las formas que sea posible, el número 100.

4 Separa, entre los siguientes números, los primos de los compuestos:

29	39	57	83	91
101	111	113	243	341

Descomposición de un número en factores primos

El mayor nivel de descomposición factorial de un número se alcanza cuando todos los factores son primos, pues, como ya sabes, estos no se pueden descomponer en otros más simples.

EJEMPLOS

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Recuerda

Para descomponer un número en factores primos, ten en cuenta los criterios de divisibilidad.

Divisibles por 3	675	3
	225	3
	75	3
Divisibles por 5	25	5
	5	5
	1	

$675 = 3^3 \cdot 5^2$

Para descomponer un número en factores primos, conviene actuar ordenadamente. Observa cómo descomponemos el número 924:

		924	2
924 : 2 = 462	⟶	462	2
462 : 2 = 231	⟶	231	3
231 : 3 = 77	⟶	77	7
77 : 7 = 11	⟶	11	11
11 : 11 = 1	⟶	1	

$$924 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Para **descomponer** un número en **factores primos,** lo dividimos entre 2 tantas veces como sea posible; después, entre 3; después, entre 5, … y así sucesivamente entre los siguientes primos hasta obtener 1 en el cociente.

Actividades

5 Descompón mentalmente en el máximo número de factores.

a) 12 b) 16 c) 18 d) 20
e) 24 f) 30 g) 32 h) 36
i) 40 j) 50 k) 75 l) 100

6 Copia y completa en tu cuaderno los procesos de descomposición factorial.

5 8 8	2
☐☐☐	2
☐☐☐	3
☐☐	7
☐	7
1	

600	☐
300	☐
150	☐
75	☐
25	☐
5	☐
1	

$588 = \square^2 \cdot \square \cdot \square^2$

$600 = \square^3 \cdot \square \cdot \square^2$

7 Descompón estos números en el máximo número de factores:

a) 270 b) 360 c) 630
d) 750 e) 1 000 f) 1 100

8 Descompón en factores los números siguientes:

a) 84 b) 130 c) 160
d) 280 e) 230 f) 400
g) 560 h) 594 i) 720
j) 975 k) 2 340 l) 5 230

9 Calcula los números que tienen las siguientes descomposiciones factoriales:

a) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ b) $2^3 \cdot 5^3$
c) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ d) $2^2 \cdot 7 \cdot 13$

Múltiplos y divisores de números descompuestos en factores primos

Para facilitar la comprensión del resto de la unidad, conviene que nos paremos a reflexionar sobre la estructura de los múltiplos y los divisores de un número que se presenta descompuesto en factores primos.

Tomemos, por ejemplo, el número 150 descompuesto en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

- Los múltiplos de 150 se obtienen multiplicando 150 por un número:

$$300 = 150 \cdot 2 = \overset{150}{\boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}} \cdot 2$$

$$450 = 150 \cdot 3 = \overset{150}{\boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}} \cdot 3$$

$$600 = 150 \cdot 4 = \overset{150}{\boxed{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}} \cdot 2 \cdot 2$$

$$\ldots$$

Un múltiplo de 150 contiene *todos* los factores primos de 150.

- Los divisores de 150 son, aparte de él mismo y de la unidad:

$$150 = 2 \cdot 75 = \boxed{2} \cdot \boxed{3 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$150 = 3 \cdot 50 = \boxed{3} \cdot \boxed{2 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$150 = 5 \cdot 30 = \boxed{5} \cdot \boxed{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$150 = 6 \cdot 25 = \boxed{2 \cdot 3} \cdot \boxed{5 \cdot 5}$$

$$150 = 10 \cdot 15 = \boxed{2 \cdot 5} \cdot \boxed{3 \cdot 5}$$

Un divisor de 150 se construye con *algunos* de los factores primos de 150.

- Cada uno de los múltiplos de un número contiene, al menos, todos los factores primos de dicho número.
- Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de dicho número.

Observa

Cada divisor de 18, aparte de la unidad, está formado por algunos de los factores primos de 18:

18

2 ⟶ ② · 3 · 3 → 2
3 ⟶ 2 · ③ · 3 → 3
6 ⟶ ② · ③ · 3 → 2 · 3
9 ⟶ 2 · ③ · ③ → 3 · 3
18 ⟶ ② · ③ · ③ → 2 · 3 · 3

Actividades

10 Escribe factorizados, sin hacer ninguna operación, tres múltiplos de $12 = 2^2 \cdot 3$.

11 Escribe factorizado un número que sea a la vez múltiplo de $a = 2 \cdot 3 \cdot 3$ y de $b = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

12 Escribe tres múltiplos comunes a los números $m = 2^2 \cdot 3$ y $n = 2^2 \cdot 5$.

13 Escribe factorizados, sin hacer operaciones, todos los divisores de $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$.

14 Escribe un número que sea divisor de $a = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y de $b = 2 \cdot 5 \cdot 5$ a la vez.

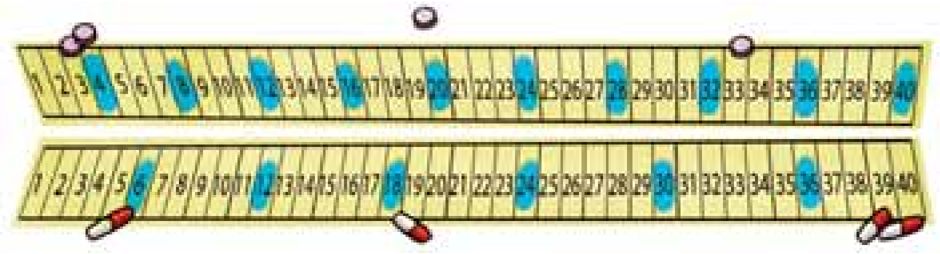
15 Escribe tres divisores comunes a los números $m = 2^3 \cdot 3^2$ y $n = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

3 Mínimo común múltiplo de dos números

La resolución de ciertos problemas exige el manejo de los múltiplos comunes de varios números. Veamos un ejemplo:

▼ **EJEMPLO**

Doña Rosita toma una píldora para el reuma cada 4 días y una cápsula para el corazón cada 6 días.
¿Cada cuánto tiempo coinciden ambas tomas en el mismo día?



Ambas tomas coinciden en los días que son múltiplos comunes de 4 y 6, y se repiten cada 12 días.

12 → 24 → 36 → 48 → …

+12 +12 +12 +12

El menor de estos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de mínimo común múltiplo de 4 y 6.

El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, *a, b, c,* … se llama **mínimo común múltiplo,** y se expresa así:

mín.c.m. (*a, b, c,* …)

Cálculo del mín.c.m. (4, 6)

múltiplos de 4 → 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24

múltiplos de 6 → 6 - 12 - 18 - 24 - 30 - 36

múltiplos comunes → 12 - 24 - 36 - 48

mín.c.m. (4, 6) = 12

Cálculo del mínimo común múltiplo (método artesanal)

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos números:

- Escribimos los múltiplos de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el menor.

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 30 40 50 60 70 …

Múltiplos de 15 → 15 30 45 60 75 90 105 …

Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 …

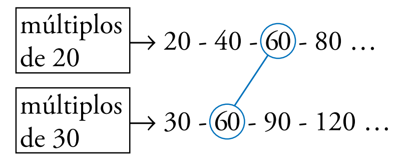
El menor de los múltiplos comunes de 10 y 15 es 30. → mín.c.m. (10, 15) = 30

Cálculo del mínimo común múltiplo (método óptimo)

El método anterior resulta apropiado para números sencillos, pero se complica demasiado con números mayores.

Observa una nueva forma de calcular el mínimo común múltiplo con los números descompuestos en factores primos.

Ejemplo



mín.c.m. (20, 30) = 60

▼ **EJEMPLO**

Calcular mín.c.m. (20, 30).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

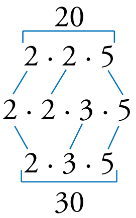
$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 20 = 2^2 \cdot 5 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del mín.c.m.

  Recordando que el mín.c.m. ha de ser múltiplo de 20 y de 30, y lo más pequeño posible, hemos de tomar:

  — Todos los factores primos de 20.
  — Todos los factores primos de 30.
  — El mínimo número de factores que sea posible.

$$\text{mín.c.m.}\ (20, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$



  Comprueba que todos los factores escogidos son imprescindibles, pues si se suprime cualquiera de ellos, deja de ser múltiplo de alguno de los números.

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el mín.c.m.

$$\text{mín.c.m.}\ (20, 30) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Para calcular el mínimo común múltiplo de varios números:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (75, 90).

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} 75 = 3 \cdot 5^2 \\ 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array}\right\} \rightarrow 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\text{mín.c.m.}\ (75, 90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450$$

Es importante que te des cuenta de que cuando queremos calcular el mín.c.m. de dos numeros, y uno de ellos es múltiplo del otro, el mín.c.m. es el mayor de los dos números.

▼ **EJEMPLO**

Calcular mín.c.m. (15, 30).

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{mín.c.m. } (15, 30) = \underbrace{2 \cdot \overbrace{3 \cdot 5}^{15}}_{30} = 30$$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (3, 5)
b) mín.c.m. (6, 8)
c) mín.c.m. (10, 15)
d) mín.c.m. (20, 30)

2 Copia y calcula mín.c.m. (30, 40).

$$\begin{array}{r|l} 30 & \square \\ 15 & \square \\ 5 & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & \square \\ 20 & \square \\ 10 & \square \\ 5 & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}\right\} \text{mín.c.m. } (30, 40) = \ldots$$

3 Copia y calcula mín.c.m. (54, 60).

$$\begin{array}{rl} 54 & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 60 & \square \\ \square\square & \square \\ \square\square & \square \\ \square & \square \\ 1 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 54 = \ldots \\ 60 = \ldots \end{array}\right\} \text{mín.c.m. } (54, 60) = \ldots$$

4 Calcula por el método óptimo el mínimo común múltiplo de a y b en cada caso:

a) $a = 2 \cdot 11$, $b = 3 \cdot 11$
b) $a = 2^4 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 5^2$
c) $a = 5^2 \cdot 7$, $b = 5 \cdot 7^2$
d) $a = 2^4 \cdot 3^2$, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
e) $a = 2 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 3 \cdot 5 \cdot 11$
f) $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

5 Calcula.

a) mín.c.m. (20, 25)
b) mín.c.m. (28, 35)
c) mín.c.m. (35, 40)
d) mín.c.m. (36, 54)
e) mín.c.m. (42, 63)
f) mín.c.m. (72, 108)
g) mín.c.m. (99, 165)
h) mín.c.m. (216, 288)

6 Calcula.

a) mín.c.m. (12, 18)
b) mín.c.m. (21, 35)
c) mín.c.m. (24, 36)
d) mín.c.m. (36, 40)
e) mín.c.m. (72, 90)
f) mín.c.m. (90, 120)

7 Calcula.

a) mín.c.m. (4, 6, 9)
b) mín.c.m. (6, 8, 9)
c) mín.c.m. (12, 18, 30)
d) mín.c.m. (24, 28, 42)
e) mín.c.m. (60, 72, 90)
f) mín.c.m. (50, 75, 100)

8 Se apilan, en una torre, cubos de 30 cm de arista y, al lado, en otra torre, cubos de 36 cm de arista. ¿A qué altura coinciden las cimas de ambas torres?

9 Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos.

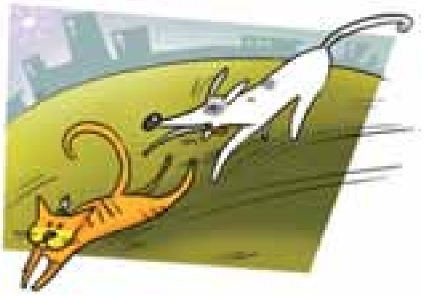
¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a coincidir?

10 El autobús de la línea roja pasa por la parada, frente a mi casa, cada 20 minutos, y el de la línea verde, cada 30 minutos.

Si ambos pasan juntos a las dos de la tarde, ¿a qué hora vuelven a coincidir?

4 Máximo común divisor de dos números

También encontrarás problemas que exigen el manejo de los divisores comunes a varios números. Veamos un ejemplo:



▼ **EJEMPLO**

Una sociedad protectora de animales ha recogido 8 gatos y 12 perros que se han de transportar en jaulas iguales, lo más grandes que sea posible, y de forma que en todas quepa el mismo número de individuos. ¿Cuántos animales irán en cada jaula?

Tanteando, se encuentran tres posibles soluciones:

- Primera solución: jaulas con un inquilino.

G	G	G	G	G	G	G	G				
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P

8 × 1 12 × 1

- Segunda solución: jaulas con dos inquilinos.

G G	G G	G G	G G		
P P	P P	P P	P P	P P	P P

4 × 2 6 × 2

- Tercera solución: jaulas con cuatro inquilinos.

G G G G	G G G G	
P P P P	P P P P	P P P P

2 × 4 3 × 4

Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12:

1 - 2 - 4

El mayor de estos divisores comunes es 4 y recibe el nombre de máximo común divisor de 8 y 12.

Cálculo del máx.c.d. (8, 12)

divisores de 8 → ①-②-④- 8

divisores de 12 → ①-②- 3 -④- 6 - 12

divisores comunes } → 1 - 2 - 4

máx.c.d. (8, 12) = 4

El mayor de los divisores comunes a dos o más números, a, b, c, … se llama **máximo común divisor,** y se expresa así:

máx.c.d. $(a, b, c, \dots)$

Cálculo del máximo común divisor (método artesanal)

Para obtener el máximo común divisor de dos números:

- Escribimos los divisores de cada uno.
- Entresacamos los comunes.
- Tomamos el mayor.

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (20, 30).

Divisores de 20 → ① ② 4 ⑤ ⑩ 20

Divisores de 30 → ① ② 3 ⑤ 6 ⑩ 15 30

Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10

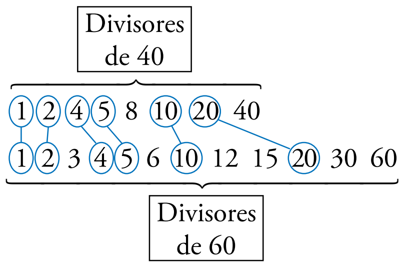
El mayor de los divisores comunes de 20 y 30 es 10. } → máx.c.d. (20, 30) = 10

Cálculo del máximo común divisor (método óptimo)

El método que has aprendido en la página anterior resulta adecuado para números sencillos.

En casos más complicados, resulta mucho más cómodo utilizar la descomposición en factores, como se muestra a continuación.

Ejemplo



máx.c.d. (40, 60) = 20

▼ **EJEMPLO**

Calcular máx.c.d. (60, 40).

- Primer paso: Descomponer en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 40 = 2^3 \cdot 5 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

- Segundo paso: Elegir los factores primos del máx.c.d.

  Recordando que el máx.c.d. ha de ser divisor de 40 y de 60, y lo más grande posible, hemos de tomar:

  — Los factores comunes de 40 y 60.

  — Ningún factor no común.

  — El máximo número de factores que sea posible.

$$\begin{aligned} 40 &= \boxed{2}\cdot\boxed{2}\cdot 2\cdot\boxed{5} \\ 60 &= \boxed{2}\cdot\boxed{2}\cdot 3\cdot\boxed{5} \end{aligned}$$

$$\text{máx.c.d. } (40, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

- Tercer paso: Calcular, finalmente, el máx.c.d.

$$\text{máx.c.d. } (40, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Para calcular el máximo común divisor de varios números:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Ejercicio resuelto

Calcular máx.c.d. (150, 225).

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \left.\begin{aligned} 150 &= 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 225 &= 3^2 \cdot 5^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow 3 \cdot 5^2$$

$$\text{máx.c.d. } (150, 225) = 3 \cdot 5^2 = 75$$

Del mismo modo que en el mín.c.m., cuando queremos calcular el máx.c.d. de dos números, un multiplo del otro, el resultado es uno de ellos: en este caso, el menor.

▼ **EJEMPLO**

Calcular máx.c.d. (15, 30).

Descomponemos los dos números en factores primos:

$$15 = 3 \cdot 5$$
$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

De este modo:

$$\text{máx.c.d. } (15, 30) = 3 \cdot 5 = 15$$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (4, 6)
b) máx.c.d. (6, 8)
c) máx.c.d. (5, 10)
d) máx.c.d. (15, 20)
e) máx.c.d. (18, 27)
f) máx.c.d. (50, 75)

2 Copia y calcula máx.c.d. (36, 48).

36	☐
18	☐
9	☐
3	☐
1	

48	☐
24	☐
12	☐
6	☐
3	☐
1	

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
48 = …
} máx.c.d. (36, 48) = …

3 Copia y calcula máx.c.d. (80, 100).

80	☐
40	2
☐☐	☐
10	2
☐	☐
1	

100	2
☐☐	☐
25	5
☐	☐
1	

80 = …
100 = …
} máx.c.d. (80, 100) = …

4 Calcula por el método óptimo el máximo común divisor de a y b en cada caso:

a) $a = 3 \cdot 7$, $b = 5 \cdot 7$
b) $a = 2^4 \cdot 3^2$, $b = 2^2 \cdot 3^3$
c) $a = 5^2 \cdot 7$, $b = 5 \cdot 7^2$
d) $a = 3 \cdot 5 \cdot 11$, $b = 2 \cdot 5 \cdot 11$
e) $a = 2^3 \cdot 5^2$, $b = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$
f) $a = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$, $b = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

5 Calcula.

a) máx.c.d. (20, 24)
b) máx.c.d. (24, 36)
c) máx.c.d. (54, 60)
d) máx.c.d. (56, 70)
e) máx.c.d. (120, 144)
f) máx.c.d. (140, 180)
g) máx.c.d. (168, 196)
h) máx.c.d. (180, 270)

6 Calcula.

a) máx.c.d. (24, 36)
b) máx.c.d. (28, 42)
c) máx.c.d. (63, 99)
d) máx.c.d. (90, 126)
e) máx.c.d. (165, 275)
f) máx.c.d. (360, 450)

7 Calcula.

a) máx.c.d. (6, 9, 12)
b) máx.c.d. (12, 18, 24)
c) máx.c.d. (32, 40, 48)
d) máx.c.d. (36, 60, 72)
e) máx.c.d. (50, 60, 90)
f) máx.c.d

8 El dueño de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 60 litros de aceite de girasol, y desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar. ¿Cuál será la capacidad de las garrafas?

9 Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

10 Se desea dividir un terreno rectangular, de 100 m de ancho por 120 m de largo, en parcelas cuadradas lo más grandes que sea posible.
¿Cuánto debe medir el lado de cada parcela?

5 Operaciones con números enteros

Suma y resta

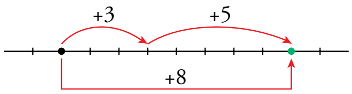
Recuerda algunas reglas básicas para resolver expresiones con números enteros:

Para sumar (restar) dos números:

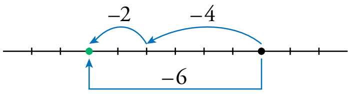
- Si tienen el **mismo signo,** se suman sus valores absolutos y se pone el signo que tenían los sumandos.
- Si tienen **distinto signo,** se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

EJEMPLOS

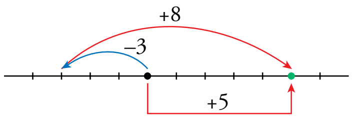
$+3 + 5 = +8$



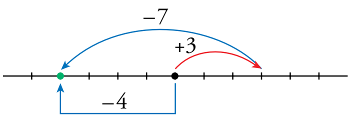
$-4 - 2 = -6$

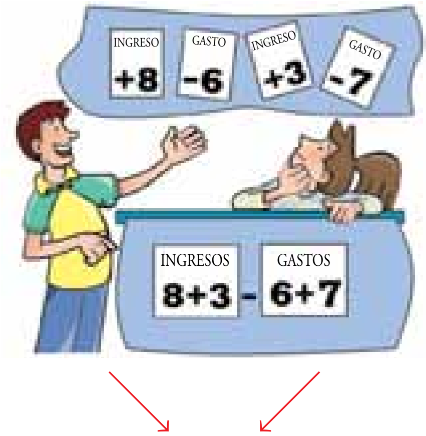


$-3 + 8 = +5$



$+3 - 7 = -4$





$$\boxed{11} - \boxed{13}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{-2}$$

$$\boxed{8 - 6 + 3 - 7}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{8 + 3 - 6 - 7}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{(8 + 3) - (6 + 7)}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{11 - 13}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{-2}$$

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo **más,** los signos interiores no varían.

$$+(-3 + 8 - 2) = -3 + 8 - 2$$

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo **menos,** se cambian los signos interiores: más por menos y menos por más.

$$-(-3 + 8 - 2) = +3 - 8 + 2$$

Para sumar más de dos números positivos y negativos:

- Se suman los positivos por un lado y los negativos por otro.
- Se restan los resultados y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

EJEMPLOS

a) $8 - 6 + 3 - 7 = 8 + 3 - 6 - 7 = 11 - 13 = -2$

b) $+(+4) + (-7) - (+3) - (-5) = 4 - 7 - 3 + 5 = 4 + 5 - 7 - 3 = 9 - 10 = -1$

c) $9 - (2 - 7 + 3) + (-2 + 6) = 9 - 2 + 7 - 3 - 2 + 6 = 9 + 7 + 6 - 2 - 3 - 2 =$
$= 22 - 7 = 15$

O bien, de otra forma:

$9 - (2 - 7 + 3) + (-2 + 6) = 9 - (5 - 7) + (-2 + 6) = 9 - (-2) + (+4) =$
$= 9 + 2 + 4 = 15$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) 5 – 7
b) 2 – 9
c) 3 – 4
d) 6 – 10
e) 5 – 12
f) 9 – 15
g) –12 + 17
h) –22 + 10
i) –21 + 15
j) –3 – 6
k) –1 – 9
l) –12 – 13

2 Resuelve.

a) 10 – 3 + 5
b) 5 – 8 + 6
c) 2 – 9 + 1
d) 7 – 15 + 2
e) 16 – 4 – 6
f) 22 – 7 – 8
g) 9 – 8 – 7
h) 15 – 12 + 6

3 Calcula.

a) –3 + 10 – 1
b) –8 + 2 – 3
c) –5 + 6 + 4
d) –12 + 2 + 6
e) –18 + 3 + 6
f) –20 + 12 + 5
g) –7 – 3 – 4
h) –2 – 13 – 5

4 Copia y completa como en el ejemplo.

- **7 – 4 – 6 – 2 + 5 + 3 – 4 = 15 – 16 = –1**

a) 3 – 9 + 4 – 8 – 2 + 13 = ☐ – ☐ = ☐
b) –15 – 4 + 12 – 3 – 11 – 2 = ☐ – ☐ = ☐

5 Calcula.

a) 3 – 7 + 2 – 5
b) 2 – 6 + 9 – 3 + 4
c) 7 – 10 – 5 + 4 + 6 – 1
d) –6 + 4 – 3 – 2 – 8 + 5
e) 12 + 5 – 17 – 11 + 20 – 13
f) 16 – 22 + 24 – 31 + 12 – 15

6 Quita paréntesis y calcula.

a) (–3) – (+4) – (–8)
b) –(–5) + (–6) – (–3)
c) (+8) – (+6) + (–7) – (–4)
d) –(–3) – (+2) + (–9) + (+7)

7 Resuelve de dos formas, como en el ejemplo.

- **a) 10 – (13 – 7) = 10 – (+6) = 10 – 6 = 4**
  b) 10 – (13 – 7) = 10 – 13 + 7 = 17 – 13 = 4

a) 15 – (12 – 8)
b) 9 – (20 – 6)
c) 8 – (15 – 12)
d) 6 – (13 – 2)
e) 15 – (6 – 9 + 5)
f) 21 – (3 – 10 + 11 + 6)

8 Resuelve de una de las formas que ofrece el ejemplo:

- **a) (8 – 13) – (5 – 4 – 7) = (8 – 13) – (5 – 11) =**
  = (–5) – (–6) = –5 + 6 = 1
  b) (8 – 13) – (5 – 4 – 7) = 8 – 13 – 5 + 4 + 7 =
  = 19 – 18 = 1

a) (4 – 9) – (5 – 8)
b) –(1 – 6) + (4 – 7)
c) 4 – (8 + 2) – (3 – 13)
d) 12 + (8 – 15) – (5 + 8)
e) (8 – 6) – (3 – 7 – 2) + (1 – 8 + 2)
f) (5 – 16) – (7 – 3 – 6) – (9 – 13 – 5)

9 Ejercicio resuelto

Calcular: 6 – [5 + (8 – 2)]

a) Primera forma: deshaciendo paréntesis.

6 – [5 + (8 – 2)] = 6 – [5 + 8 – 2] =
= 6 – 5 – 8 + 2 = 8 – 13 = –5

b) Segunda forma: operando dentro de los paréntesis.

6 – [5 + (8 – 2)] = 6 – [5 + (+6)] =
= 6 – [5 + 6] = 6 – [+11] = 6 – 11 = –5

10 Calcula.

a) 7 – [1 + (9 – 13)]
b) –9 + [8 – (13 – 4)]
c) 12 – [6 – (15 – 8)]
d) –17 + [9 – (3 – 10)]
e) 2 + [6 – (4 – 2 + 9)]
f) 15 – [9 – (5 – 11 + 7)]

Multiplicación

Podemos calcular el producto de dos números enteros teniendo en cuenta que una multiplicación es una suma de sumandos iguales:

$(+3) \cdot (-6) =$ → Sumamos tres veces “menos seis”.
→ $+(-6) + (-6) + (-6) = -6 - 6 - 6 = -18$

$(-3) \cdot (-6) =$ → Restamos tres veces “menos seis”.
→ $-(-6) - (-6) - (-6) = +6 + 6 + 6 = +18$

Sin embargo, para multiplicar con rapidez, aplicamos la siguiente regla:

REGLA DE LOS SIGNOS

$+ \cdot + = +$
$+ \cdot - = -$
$- \cdot + = -$
$- \cdot - = +$

REGLA DE LOS SIGNOS

El producto de dos números enteros es:

- Positivo, si los factores tienen signos iguales.
- Negativo, si los factores tienen signos diferentes.

▼ **EJEMPLOS**

$(+4) \cdot (+3) = +12$ $(-5) \cdot (-4) = +20$ $(+6) \cdot (-4) = -24$ $(-4) \cdot (+8) = -32$

División

La división de números enteros guarda con la multiplicación las mismas relaciones que en los números naturales:

$(+4) \cdot (+6) = +24 \longrightarrow (+24) : (+4) = +6$

$(-4) \cdot (-6) = +24 \longrightarrow (+24) : (-4) = -6$

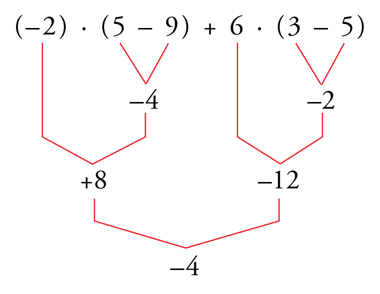
$(+4) \cdot (-6) = -24$ → $(-24) : (+4) = -6$
→ $(-24) : (-6) = +4$

En la división se aplica la misma regla de los signos que en la multiplicación.

Operaciones combinadas

Observa el orden en que realizamos las operaciones para calcular el valor de la siguiente expresión:

Ten en cuenta



REGLA DE PRIORIDAD EN LAS OPERACIONES

$$\boxed{(-2) \cdot (5-9) + 6 \cdot (3-5)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{(-2) \cdot (-4) + 6 \cdot (-2)} \longleftarrow$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{(+8) + (-12)} \longleftarrow$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{8 - 12} = -4 \longleftarrow$$

En las expresiones con operaciones combinadas, hemos de atender:

- Primero, a las operaciones que están dentro de los paréntesis.
- Después, a las multiplicaciones y a las divisiones.
- Por último, a las sumas y a las restas.

Actividades

11 Multiplica.

a) (+10) · (–2)
b) (–4) · (–9)
c) (–7) · (+5)
d) (+11) · (+7)

12 Observa los ejemplos y calcula.

- $\mathbf{\underbrace{(-3) \cdot (+2)} \cdot (-5) = (-6) \cdot (-5) = +30}$
- $\mathbf{(-3) \cdot \underbrace{(+2) \cdot (-5)} = (-3) \cdot (-10) = +30}$

a) (–2) · (–3) · (+4)
b) (–1) · (+2) · (–5)
c) (+4) · (–3) · (+2)
d) (–6) · (–2) · (–5)

13 Divide.

a) (–18) : (+3)
b) (–15) : (–5)
c) (+36) : (–9)
d) (–30) : (–10)
e) (–52) : (+13)
f) (+22) : (+11)

14 Calcula el valor de x en cada caso:

a) (–18) : x = +6
b) (+4) · x = –36
c) x · (–13) = 91
d) x : (–11) = +5

15 Calcula.

a) (+3) · (–5) · (+2)
b) (–4) · (–1) · (+6)
c) (–2) · (–7) · (–2)
d) (+5) · (–4) · (–3)

16 Opera.

a) [(+80) : (–8)] : (–5)
b) [(–70) : (–2)] : (–7)
c) (+50) : [(–30) : (+6)]
d) (–40) : [(+24) : (+3)]

17 Calcula como en el ejemplo.

- **15 – 8 · 3 = 15 – 24 = –9**

a) 18 – 5 · 3 b) 6 – 4 · 2 c) 7 · 2 – 16

18 Calcula.

a) 18 – 15 : 3 b) 3 – 30 : 6 c) 20 : 2 – 11

19 Calcula como en el ejemplo.

- **21 – 4 · 6 + 12 : 3 = 21 – 24 + 4 = 25 – 24 = 1**

a) 20 – 4 · 7 + 11
b) 12 – 6 · 5 + 4 · 2
c) 15 – 20 : 5 – 3
d) 6 – 10 : 2 – 14 : 7
e) 5 · 3 – 4 · 4 + 2 · 6
f) 7 · 3 – 5 · 4 + 18 : 6

20 Observa el ejemplo y calcula.

- **(–3) · (–4) + (–6) · 3 = (+12) + (–18) = 12 – 18 = –6**

a) 5 · (–8) – (+9) · 4 b) 32 : (–8) – (–20) : 5
c) (–2) · (–9) + (–5) · (+4)
d) (+25) : (–5) + (–16) : (+4)
e) (+6) · (–7) + (–50) : (–2)
f) (+56) : (–8) – (–12) · (+3)

21 Calcula.

a) 18 – 5 · (3 – 8) b) 11 – 40 : (–8)
c) 4 · (8 – 11) – 6 · (7 – 9)
d) (4 – 5) · (–3) – (8 – 2) : (–3)

22 Calcula.

a) 5 · (–4) + 2 · (–3)
b) 20 : (–5) – 8 : (+2)
c) 2 · (–8) – 3 · (–7) – 4 · (+3)
d) 6 : (+2) + 5 · (–3) – 12 : (–4)

23 Opera.

a) (–8) · (+2) + (–5) · (–3)
b) (+40) : (–8) – (–30) : (+6)
c) (–2) · (–9) + (–24) : (–3) – (–6) · (–4)
d) (+27) : (–3) – (+3) · (–5) – (–6) · (–2)

Potencias de números enteros

Recuerda que una potencia es una multiplicación de factores iguales:

$$\underset{\text{BASE}}{a}^{\overset{\text{EXPONENTE}}{n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

EJEMPLOS

$(+4)^2 = (+4) \cdot (+4) = +16$

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

Potencias de números negativos

En las sucesivas potencias de un número negativo obtenemos, alternativamente, resultados positivos y negativos:

$(-3)^1 = -3 \qquad (-3)^2 = +9 \qquad (-3)^3 = -27 \qquad (-3)^4 = +81$

Al elevar un número negativo a una potencia:

- Si el exponente es par, el resultado es positivo.

$$(-a)^{n\ (\text{par})} \rightarrow \textbf{positivo}$$

- Si el exponente es impar, el resultado es negativo.

$$(-a)^{n\ (\text{impar})} \rightarrow \textbf{negativo}$$

Actividades

24 Escribe en forma de potencia.

a) $(-2) \cdot (-2)$

b) $(+5) \cdot (+5) \cdot (+5)$

c) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

d) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

25 Copia y completa en tu cuaderno.

POTENCIA	BASE	EXPONENTE	VALOR
$(-1)^7$			
$(-2)^4$			
$(+3)^3$			
$(-4)^2$			

26 Escribe en forma de producto y calcula:

a) $(-2)^6$ b) $(-3)^1$

c) $(+3)^4$ d) $(-5)^2$

e) $(-10)^5$ f) $(-8)^3$

27 Obtén con ayuda de la calculadora como se hace en el ejemplo.

- $\mathbf{12^5} \rightarrow \boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{\times}\,\boxed{\times}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=}\,\boxed{=} \rightarrow \boxed{248832}$

a) 8^6 b) $(-8)^6$

c) 11^5 d) $(-11)^5$

e) 27^7 f) $(-27)^7$

6 Operaciones con potencias

Vas a aprender, ahora, algunas propiedades que facilitan el cálculo con potencias. Por eso, es conveniente que las memorices y que ensayes su aplicación en diferentes situaciones.

Potencia de un producto

Compara las dos expresiones siguientes y observa que en ambas se obtiene el mismo resultado.

▼ **EJEMPLO**

- $(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 8 \cdot 27 = 216$

La **potencia** de un **producto** es igual al producto de las potencias de los factores. $\rightarrow (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

No te confundas

$(2 + 3)^4 = 5^4 = 625$

$2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$

$(2 + 3)^4 \neq 2^4 + 3^4$

La potencia de una suma NO ES IGUAL a la suma de las potencias de los sumandos.

Ejercicio resuelto

Calcular, por el camino más sencillo, $5^6 \cdot 2^6$.

$5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

Potencia de un cociente

Observa otras dos expresiones que también tienen el mismo valor.

▼ **EJEMPLO**

- $(6 : 3)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $6^3 : 3^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6) : (3 \cdot 3 \cdot 3) = 216 : 27 = 8$

La **potencia** de un **cociente** es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor. $\rightarrow (a : b)^n = a^n : b^n$

Ejercicios resueltos

1. **Calcular, por el camino más sencillo, $12^3 : 4^3$.**

   $12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

2. **Calcular: $(6^4 \cdot 5^4) : 15^4$**

   $(6^4 \cdot 5^4) : 15^4 = (6 \cdot 5)^4 : 15^4 = 30^4 : 15^4 = (30 : 15)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Producto de potencias de la misma base

Al multiplicar dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^4 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4 \text{ veces}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ veces}} = 5^7$$

Observa que el exponente del producto final es la suma de los exponentes de los factores.

Para **multiplicar** dos **potencias** de la **misma base,** se deja la base y se suman los exponentes. $\Big\} \rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Por ejemplo:

$$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$$

Cociente de potencias de la misma base

Al dividir dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^7 : 5^3 = 5^4 \longleftrightarrow 5^4 \cdot 5^3 = 5^7$$

Observa que el exponente del cociente es la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

Ten en cuenta

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1 \\ 2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 \end{array}\right\} 2^0 = 1$$

La **potencia cero** de un número es igual a 1.

Para **dividir** dos **potencias** de la **misma base,** se deja la base y se restan los exponentes. $\Big\} \rightarrow a^m : a^n = a^{m-n}$

Por ejemplo:

$$a^8 : a^6 = a^{8-6} = a^2$$

Potencia de otra potencia

Al elevar una potencia a otra potencia, se obtiene una nueva potencia de la misma base.

$$(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$$

Observa que el exponente final es el producto de los exponentes de la expresión inicial.

Para **elevar** una **potencia** a **otra potencia**, se deja la base y se multiplican los exponentes. $\Big\} \rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Por ejemplo:

$$(a^2)^4 = a^{2 \cdot 4} = a^8$$

Actividades

1 Calcula como en el ejemplo y compara los resultados.

- $$\left.\begin{array}{l}\mathbf{(4 \cdot 3)^2 = 12^2 = 144} \\ \mathbf{4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144}\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2}$$

a) $\left.\begin{array}{l}(3 \cdot 5)^2 = \ldots \\ 3^2 \cdot 5^2 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

b) $\left.\begin{array}{l}(4 \cdot 2)^3 = \ldots \\ 4^3 \cdot 2^3 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

c) $\left.\begin{array}{l}(12 : 3)^2 = \ldots \\ 12^2 : 3^2 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

d) $\left.\begin{array}{l}(20 : 4)^3 = \ldots \\ 20^3 : 4^3 = \ldots\end{array}\right\} \ldots$

2 Copia y completa las casillas vacías.

a) $(3 \cdot 5)^4 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

b) $8^3 \cdot 6^3 = (\square \cdot \square)^{\square}$

c) $(6 : 3)^7 = 6^{\square} : 3^{\square}$

d) $15^{\square} : 5^{\square} = (\square : \square)^4$

e) $(a \cdot b)^{\square} = \square^3 \cdot \square^3$

f) $m^2 \cdot n^2 = (\square \cdot \square)^2$

g) $(a : b)^{\square} = a^3 : \square^3$

h) $m^4 : n^4 = (\square : \square)^{\square}$

3 Reduce a una sola potencia como en el ejemplo.

- $\mathbf{2^5 \cdot (-3)^5 = [2 \cdot (-3)]^5 = (-6)^5}$

a) $3^2 \cdot 4^2$ b) $(-2)^3 \cdot 4^3$

c) $(-5)^2 \cdot (+3)^2$ d) $3^6 \cdot (-2)^6$

4 Expresa con una sola potencia igual que en el ejemplo.

- $\mathbf{(-15)^4 : (+3)^4 = [(-15) : (+3)]^4 = (-5)^4 = 5^4}$

a) $9^4 : 3^4$ b) $(+15)^3 : (-5)^3$

c) $(-20)^2 : (-4)^2$ d) $(-18)^4 : (-6)^4$

5 Reflexiona y calcula de la forma más sencilla.

a) $5^3 \cdot 2^3$ b) $4^2 \cdot 5^2$

c) $25^2 \cdot 4^2$ d) $20^3 \cdot 5^3$

e) $16^5 : 8^5$ f) $18^3 : 6^3$

g) $21^4 : 7^4$ h) $35^2 : 5^2$

6 Copia y completa las casillas vacías.

a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^{\square}$ b) $6^4 \cdot 6^3 = 6^{\square}$

c) $a^5 \cdot a^3 = a^{\square}$ d) $m^3 \cdot m^{\square} = m^9$

e) $2^6 : 2^4 = 2^{\square}$ f) $7^8 : 7^5 = 7^{\square}$

g) $a^9 : a^8 = a^{\square}$ h) $m^8 : m^{\square} = m^6$

i) $(4^2)^3 = 4^{\square}$ j) $(5^3)^3 = 5^{\square}$

k) $(a^2)^2 = a^{\square}$ l) $(m^4)^{\square} = m^{12}$

7 Reduce a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^2$ b) $3^2 \cdot 3^5$

c) $10^5 \cdot 10^2$ d) $a^5 \cdot a^5$

e) $m^7 \cdot m$ f) $x^2 \cdot x^6$

8 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $(-6)^3 \cdot (-6)^4 = (-6)^{\square}$ b) $(+3)^6 \cdot (+3)^2 = 3^{\square}$

c) $(-2)^8 \cdot (-2)^2 = 2^{\square}$ d) $(-5)^3 \cdot (+5)^2 = (-5)^{\square}$

9 Reduce a una sola potencia.

a) $2^5 \cdot 2^7$ b) $(-2)^3 \cdot (+2)^6$

c) $(-12)^2 \cdot (+12)^2$ d) $(+9)^4 \cdot (-9)^2$

10 Expresa con una potencia única.

a) $2^6 : 2^2$ b) $3^8 : 3^5$

c) $10^7 : 10^6$ d) $a^{10} : a^6$

e) $m^5 : m$ f) $x^8 : x^4$

11 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $5^9 : 5^3 = 5^{\square}$ b) $(-2)^6 : (-2)^3 = (-2)^{\square}$

c) $(-4)^8 : (+4)^3 = 4^{\square}$ d) $(+6)^8 : (-6)^5 = (-6)^{\square}$

12 Reduce a una potencia única.

a) $(-7)^8 : (-7)^5$ b) $10^9 : (-10)^4$

c) $12^4 : (-12)$ d) $(-4)^{10} : (+4)^6$

13 Reduce a una única potencia.

a) $(5^2)^3$ b) $(2^5)^2$

c) $(10^3)^3$ d) $(a^5)^3$

e) $(m^2)^6$ f) $(x^4)^4$

14 Reduce a una sola potencia.

a) $[(-2)^2]^2$ b) $[(+5)^3]^2$

c) $[(+7)^3]^3$ d) $[(-4)^2]^4$

Raíz cuadrada de un número entero

- La **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

- Los números cuya raíz cuadrada es un número entero se llaman **cuadrados perfectos.**

EJEMPLOS

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{49} = 7 \Leftrightarrow 7^2 = 49 \\ \sqrt{400} = 20 \Leftrightarrow 20^2 = 400 \end{array}\right\} \text{ 49 y 400 son cuadrados perfectos.}$$

Teniendo en cuenta el concepto de raíz cuadrada, vemos que:

Un número positivo tiene dos raíces cuadradas.

$$\sqrt{(+16)} = \begin{array}{l} \nearrow +4 \Leftrightarrow (+4)^2 = +16 \\ \searrow -4 \Leftrightarrow (-4)^2 = +16 \end{array}$$

Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

$\sqrt{(-16)} = x \Leftrightarrow x^2 = -16 \rightarrow$ Imposible.

$\sqrt{(-16)} \rightarrow$ No existe, porque no hay ningún número cuyo cuadrado dé un resultado negativo.

Ejercicios resueltos

1. Calcular las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{(+64)}$ **b)** $\sqrt{(+144)}$ **c)** $\sqrt{(-36)}$

a) Hay que preguntarse qué número elevado al cuadrado da 64.

El número es el 8. Como sabemos que tiene dos raíces:

$$\sqrt{(+64)} = \begin{array}{l} \nearrow +8 \\ \searrow -8 \end{array}$$

b) $\sqrt{(+144)} = \begin{array}{l} \nearrow +12 \\ \searrow -12 \end{array}$

c) Los números negativos no tienen raíz cuadrada.

Actividades

15 Calcula, si existen.

a) $\sqrt{(+1)}$ b) $\sqrt{(-1)}$ c) $\sqrt{(+25)}$

d) $\sqrt{(-36)}$ e) $\sqrt{(+100)}$ f) $\sqrt{(-100)}$

g) $\sqrt{(+121)}$ h) $\sqrt{(-169)}$ i) $\sqrt{(+400)}$

j) $\sqrt{(-400)}$ k) $\sqrt{(+484)}$ l) $\sqrt{(-1\,000)}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Múltiplos y divisores

1 ▼▽▽ Encuentra cuatro parejas múltiplo-divisor entre los siguientes números:

143	12	124	364
180	31	52	13

2 ▼▽▽ Responde justificando tu respuesta.

a) ¿Es 132 múltiplo de 11?

b) ¿Es 11 divisor de 132?

c) ¿Es 574 múltiplo de 14?

d) ¿Es 27 divisor de 1 542?

3 ▼▽▽ Calcula.

a) Los cinco primeros múltiplos de 10.

b) Los cinco primeros múltiplos de 13.

c) Los cinco primeros múltiplos de 31.

4 ▼▽▽ Calcula.

a) Todos los divisores de 18.

b) Todos los divisores de 23.

c) Todos los divisores de 32.

5 ▼▽▽ Copia estos números y selecciona:

66	71	90	103	105
156	220	315	421	708

a) Los múltiplos de 2.

b) Los múltiplos de 3.

c) Los múltiplos de 5.

6 ▼▽▽ Copia estos números, rodea con un círculo los múltiplos de 3 y tacha los múltiplos de 9:

33	41	54	87	108
112	231	341	685	

Números primos y compuestos

7 ▼▽▽ Escribe.

a) Los diez primeros números primos.

b) Los números primos comprendidos entre 50 y 60.

c) Los números primos comprendidos entre 80 y 100.

d) Los tres primeros primos mayores que 100.

8 ▼▽▽ Mentalmente, sin lápiz ni papel, separa los números primos de los compuestos:

4	7	10	15	17
24	31	41	51	67

9 ▼▽▽ Descompón, mentalmente, en el máximo número de factores las siguientes cantidades:

6	8	10	14	15	18
20	24	25	27	30	42

10 ▼▽▽ Descompón en factores primos.

a) 48　b) 54　c) 90　d) 105

e) 120　f) 135　g) 180　h) 200

11 ▼▽▽ Descompón en el máximo número de factores:

a) 378　b) 1 144　c) 1 872

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

12 ▼▽▽ Calcula.

a) Los diez primeros múltiplos de 10.

b) Los diez primeros múltiplos de 15.

c) Los primeros múltiplos comunes de 10 y 15.

d) El mínimo común múltiplo de 10 y 15.

13 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) mín.c.m. (2, 3)　b) mín.c.m. (6, 9)

c) mín.c.m. (4, 10)　d) mín.c.m. (6, 10)

e) mín.c.m. (6, 12)　f) mín.c.m. (12, 18)

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

14 ▼▽▽ Calcula.

a) mín.c.m. (12, 15)
b) mín.c.m. (24, 60)
c) mín.c.m. (48, 54)
d) mín.c.m. (90, 150)
e) mín.c.m. (6, 10, 15)
f) mín.c.m. (8, 12, 18)

15 ▼▽▽ Escribe.

a) Todos los divisores de 18.
b) Todos los divisores de 24.
c) Los divisores comunes de 18 y 24.
d) El máximo común divisor de 18 y 24.

16 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) máx.c.d. (4, 8)
b) máx.c.d. (6, 9)
c) máx.c.d. (10, 15)
d) máx.c.d. (12, 16)
e) máx.c.d. (16, 24)
f) máx.c.d. (18, 24)

17 ▼▽▽ Calcula.

a) máx.c.d. (36, 45)
b) máx.c.d. (48, 72)
c) máx.c.d. (105, 120)
d) máx.c.d. (135, 180)
e) máx.c.d. (8, 12, 16)
f) máx.c.d. (45, 60, 105)

Reflexiona, decide, aplica

18 ▼▽▽ ¿De cuántas formas distintas se pueden envasar 80 botes de mermelada en cajas iguales?

Indica, en cada caso, el número de cajas necesarias y el número de botes por caja.

19 ▼▽▽ Marta ha comprado varios balones por 69 €.

El precio de un balón era un número exacto de euros, sin decimales.

¿Cuántos balones ha comprado y cuánto costaba cada balón?

20 ▼▽▽ En mi colegio hay dos clases de 2.º ESO: 2.º A, con 24 estudianres, y 2.º B, con 30.

Tenemos que hacer equipos con el mismo número de miembros, pero sin mezclar de las dos clases.

Describe todas las formas posibles de hacer los equipos.

21 ▼▼▽ En un acuartelamiento hay 3 007 soldados. ¿Se pueden colocar en formación, con un número exacto de filas y columnas?

Justifica la respuesta.

Suma y resta de números enteros

22 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 5 – 9
b) 5 – 11
c) 13 – 9
d) 22 – 30
e) 21 – 33
f) 46 – 52
g) –8 – 14
h) –21 – 15
i) –33 – 22
j) –13 + 18
k) –22 + 9
l) –37 + 21

23 ▼▽▽ Calcula.

a) 5 – 8 – 4 + 3 – 6 + 9
b) 10 – 11 + 7 – 13 + 15 – 6
c) 9 – 2 – 7 – 11 + 3 + 18 – 10
d) –7 – 15 + 8 + 10 – 9 – 6 + 11

24 ▼▽▽ Quita paréntesis y calcula.

a) (+5) – (–3) – (+8) + (–4)
b) –(–7) – (+5) + (–6) + (+4)
c) +(–9) – (+13) – (–11) + (+5)
d) –(+8) + (–3) – (–15) – (+6) – (+2)

25 ▼▽▽ Calcula.

a) 3 – (5 + 7 – 10 – 9)
b) 4 + (8 – 6 – 10) – (6 – 10 + 4)
c) (7 – 11 – 4) – (9 – 6 – 13)
d) –(6 – 3 – 5) – (–4 – 7 + 15)

26 ▼▼▽ Opera.

a) $16 + [3 - 9 - (11 - 4)]$

b) $8 - [(6 - 9) - (7 - 13)]$

c) $(6 - 15) - [1 - (1 - 5 - 4)]$

d) $(2 - 12 + 7) - [(4 - 10) - (5 - 15)]$

e) $[9 - (5 - 17)] - [11 - (6 - 13)]$

27 ▼▼▽ Quita paréntesis y calcula.

a) $6 - \big(5 - [4 - (3 - 2)]\big)$

b) $6 - \big(7 - [8 - (9 - 10)]\big)$

c) $10 + \big(11 - [12 + (13 - 14)]\big)$

d) $10 - \big(9 + [8 - (7 + 6)]\big)$

e) $[(3 - 8) - 5] + \big(-11 + [7 - (3 - 4)]\big)$

Multiplicación y división de números enteros

28 ▼▽▽ Opera aplicando la regla de los signos.

a) $(-5) \cdot (-6)$
b) $(-21) : (+3)$
c) $(-4) \cdot (+7)$
d) $(+42) : (-6)$
e) $(-6) \cdot (-8)$
f) $(+30) : (+5)$
g) $(+10) \cdot (+5)$
h) $(-63) : (-9)$
i) $(-9) \cdot (-5)$
j) $(+112) : (-14)$

29 ▼▽▽ Obtén el valor de x en cada caso:

a) $x \cdot (-9) = +9$

b) $(-5) : x = -1$

c) $(-5) \cdot x = -45$

d) $x : (-4) = +3$

e) $x \cdot (+6) = -42$

f) $(+28) : x = -7$

30 ▼▼▽ Calcula.

a) $(-2) \cdot [(+3) \cdot (-2)]$
b) $[(+5) \cdot (-3)] \cdot (+2)$
c) $(+6) : [(-30) : (-15)]$
d) $[(+40) : (-4)] : (-5)$
e) $(-5) \cdot [(-18) : (-6)]$
f) $[(-8) \cdot (+3)] : (-4)$
g) $[(-21) : 7] \cdot [8 : (-4)]$
h) $[6 \cdot (-10)] : [(-5) \cdot 6]$

Operaciones combinadas con números enteros

31 ▼▽▽ Calcula.

a) $5 - 4 \cdot 3$
b) $2 \cdot 9 - 7$
c) $4 \cdot 5 - 6 \cdot 3$
d) $2 \cdot 8 - 4 \cdot 5$
e) $16 - 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 - 19$
f) $5 \cdot 6 - 21 - 3 \cdot 7 + 12$

32 ▼▽▽ Opera dentro del paréntesis y, después, multiplica.

a) $3 \cdot (9 - 11)$
b) $-5 \cdot (4 - 9)$
c) $5 \cdot (9 - 4) - 12$
d) $1 + 4 \cdot (6 - 10)$
e) $6 \cdot (8 - 12) - 3 \cdot (5 - 11)$
f) $4 \cdot (13 - 8) + 3 \cdot (9 - 15)$

33 ▼▽▽ Calcula y observa que el resultado varía según la posición de los paréntesis.

a) $17 - 6 \cdot 2$
b) $(17 - 6) \cdot 2$
c) $(-10) - 2 \cdot (-3)$
d) $[(-10) - 2] \cdot (-3)$
e) $(-3) \cdot (+5) + (-2)$
f) $(-3) \cdot [(+5) + (-2)]$

34 ▼▼▽ Calcula paso a paso.

a) $5 \cdot (-4) - 2 \cdot (-6) + 13$

b) $-6 \cdot (+4) + (-3) \cdot 7 + 38$

c) $(-2) \cdot (+8) - (-5) \cdot (-6) + (-9) \cdot (+4)$

d) $-(-9) \cdot (+5) \cdot (-8) \cdot (+7) - (+4) \cdot (-6)$

Potencias de números enteros

35 ▼▽▽ Calcula.

a) $(-2)^1$
b) $(-2)^2$
c) $(-2)^3$
d) $(-2)^4$
e) $(-2)^5$
f) $(-2)^6$
g) $(-2)^7$
h) $(-2)^8$
i) $(-2)^9$

36 ▼▽▽ Calcula.

a) $(-5)^4$
b) $(+4)^5$
c) $(-6)^3$
d) $(+7)^3$
e) $(-8)^2$
f) $(-10)^7$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

37 ▼▽▽ Observa…

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

$(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$

$-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$

$+2^3 = +2 \cdot 2 \cdot 2 = +8$

…y calcula.

a) $(-3)^4$ b) $(+3)^4$

c) -3^4 d) $+3^4$

38 ▼▽▽ Expresa como potencia de un único número.

a) $10^4 : 5^4$ b) $12^7 : (-4)^7$

c) $(-9)^6 : 3^6$ d) $2^6 \cdot 2^6$

e) $(-4)^5 \cdot (-2)^5$ f) $2^4 \cdot (-5)^4$

39 ▼▼▽ Reduce a una sola potencia.

a) $(x^2)^5$ b) $(m^4)^3$

c) $[a^{10} : a^6]^2$ d) $(a \cdot a^3)^3$

e) $(x^5 : x^2) \cdot x^4$ f) $(x^6 \cdot x^4) : x^7$

40 ▼▼▽ Expresa como una potencia única.

a) $5^2 \cdot (-5)^3$ b) $(-6)^8 : (-6)^5$

c) $[7^4 \cdot (-7)^4] : (-7)^6$ d) $(2^4)^3 : 2^9$

e) $[(-3)^4]^3 : [(-3)^3]^3$ f) $(5^2)^5 : [(-5)^3]^2$

Raíces de números enteros

41 ▼▽▽ Calcula.

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{7^2}$ c) $\sqrt{-49}$

d) $\sqrt{15^2}$ e) $\sqrt{225}$ f) $\sqrt{-225}$

g) $\sqrt{2\,500}$ h) $\sqrt{50^2}$ i) $\sqrt{-2\,500}$

42 ▼▼▽ Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt{x^2}$ b) $\sqrt{(-x)^2}$ c) $\sqrt{-x^2}$

d) $\sqrt{a^4}$ e) $\sqrt{(-a)^4}$ f) $\sqrt{-a^4}$

g) $\sqrt{m^6}$ h) $\sqrt{(-m)^6}$ i) $\sqrt{-m^6}$

Interpreta, describe, exprésate

43 ▼▼▽ El brazo mecánico de un robot ha sido programado de la siguiente forma:

— Encendido: inicio del programa.

— Primer minuto: avanza 1 cm y retrocede 5 cm.

— Segundo minuto: avanza 2 cm y retrocede 5 cm.

— Tercer minuto: avanza 3 cm y retrocede 5 cm.

— …

Y así continúa, hasta que, al final de un determinado minuto, se encuentra en la posición inicial. Entonces repite el proceso.

¿Cuántas veces repite el ciclo en hora y media? Justifica la respuesta.

MINUTO	1	2	3	4	5
AVANCE	1	2	3	4	5
RETROCESO	5	5	5	5	5
VARIACIÓN	–4	–3	–2	–1	
POSICIÓN	–4	–7	…		

44 ▼▼▼ Una plataforma petrolífera marina se sostiene sobre flotadores, a 55 metros sobre la superficie del agua, anclada en una zona con una profundidad de 470 m.

Sobre ella, hay una grúa de 35 m de altura, de la que pende un cable y en su extremo un batiscafo auxiliar para los trabajos de mantenimiento de la plataforma.

En este momento, la grúa ha largado 120 metros de cable y sigue bajando el batiscafo a razón de un tercio de metro por segundo.

a) ¿Cuál o cuáles de estas expresiones representan la distancia del batiscafo al fondo en este momento?

$\boxed{470 + 55 + 35 - 120}$ $\boxed{470 - [120 - (55 + 35)]}$

$\boxed{(470 + 55) - (120 - 35)}$

b) ¿Cuánto tardará el batiscafo en llegar al fondo?

c) ¿Cuánto tardará la grúa en izar el batiscafo hasta la superficie de la plataforma, si sube a la misma velocidad que baja?

Resuelve problemas

45 ▼▽▽ Un rollo de cable mide más de 150 m y menos de 200 m. ¿Cuál es su longitud exacta, sabiendo que se puede dividir en trozos de 15 m y también en trozos de 18 m?

46 ▼▽▽ De cierta parada de autobús parten dos líneas, A y B, que inician su actividad a las 7 h de la mañana. La línea A presta un servicio cada 24 minutos, y la línea B, cada 36 minutos. ¿A qué hora vuelven a coincidir en la parada los autobuses de ambas líneas?

47 ▼▽▽ Se desea dividir dos cuerdas de 20 m y 30 m en trozos iguales, lo más grandes que sea posible, y sin desperdiciar nada. ¿Cuánto medirá cada trozo?

48 ▼▼▽ Para pavimentar un suelo de 12,3 m de largo por 9 m de ancho, se han empleado baldosas cuadradas, sin necesidad de cortar ninguna. ¿Qué medida tendrá el lado de cada baldosa, sabiendo que se han empleado las mayores que era posible?

49 ▼▼▽ Julia ha formado el cuadrado más pequeño posible uniendo piezas rectangulares de cartulina, de 12 cm por 18 cm.

¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

¿Cuántas piezas ha empleado?

50 ▼▼▽ En un horno de bollería se han fabricado 2 400 magdalenas y 2 640 mantecados, que se desean comercializar en bolsas con el mismo número de unidades y sin mezclar ambos productos.

¿Cuántas magdalenas o cuántos mantecados se pueden poner en cada bolsa, teniendo en cuenta que el número debe ser superior a 15 e inferior a 30?

51 ▼▼▽ Se desea envasar 125 botes de conserva de tomate y 175 botes de conserva de pimiento en cajas del mismo número de botes, y sin mezclar ambos productos en la misma caja.

¿Cuál es el mínimo número de cajas necesarias?

¿Cuántos botes irán en cada caja?

Autoevaluación

¿Reconoces la relación de divisibilidad?

1 Responde y justifica:

a) ¿Es 31 divisor de 744?

b) ¿Es 999 múltiplo de 99?

2 Escribe:

a) Los cuatro primeros múltiplos de 13.

b) Todos los divisores de 60.

¿Identificas los primeros números primos?

3 Escribe los primos comprendidos entre 20 y 40.

¿Reconoces cuándo un número es múltiplo de 2, de 3, de 5 o de 10?

4 Indica cuáles de estos números son múltiplos de 2, cuáles de 3, cuáles de 5 y cuáles de 10:

897 – 765 – 990 – 2 713 – 6 077 – 6 324 – 7 005

¿Sabes descomponer un número en factores primos?

5 Descompón en factores primos los números 40 y 60.

¿Sabes calcular el máx.c.d. y el mín.c.m.?

6 Calcula: máx.c.d. (40, 60) y mín.c.m. (40, 60).

¿Resuelves expresiones con paréntesis y operaciones combinadas de números enteros?

7 Calcula:

a) 7 – 12 b) 10 – 8 +3 c) 5 – 11 + 8 – 10

8 Calcula el valor de:

a) 2 – (5 – 8) b) (7 – 15) – (6 – 2)

c) 5 – [2 – (3 – 2)]

9 Calcula.

a) 4 · 3 – 13 b) 5 · (–2) + 3 · 4

c) 20 – 4 · 6 – 12 : (–2)

2 Sistema de numeración decimal y sistema sexagesimal

Cuando un astrónomo afirma que un planeta y una estrella coincidieron en un punto de latitud 78° 43' 55'' a las 23 h 15 min 18 s, está usando dos sistemas de numeración:

— Los números 78, 43, 55, 23, 15 y 18 están escritos en notación decimal-posicional (es decir, la que usamos habitualmente, en base 10).

— Tanto las expresiones angulares (en °, ' y '') como las horarias (h, min y s) están basadas en un sistema sexagesimal (base 60).

El sistema de numeración decimal-posicional fue un logro de los indios, hacia el siglo VI. Nos lo trajeron los árabes en el siglo VIII.

El sistema sexagesimal fue creado por los babilonios hace más de tres mil años. Ahora es universalmente utilizado para medir ángulos y tiempos. Por ejemplo, una hora y cuarto, que sería 1,25 h en forma decimal, se escribe 1 h 15 min en sexagesimal.

Lo curioso es que en Europa, durante varios siglos, los números enteros se expresaban en el sistema decimal y las partes fraccionarias en sistema sexagesimal. Por ejemplo, para expresar el número 12,84 se ponía:

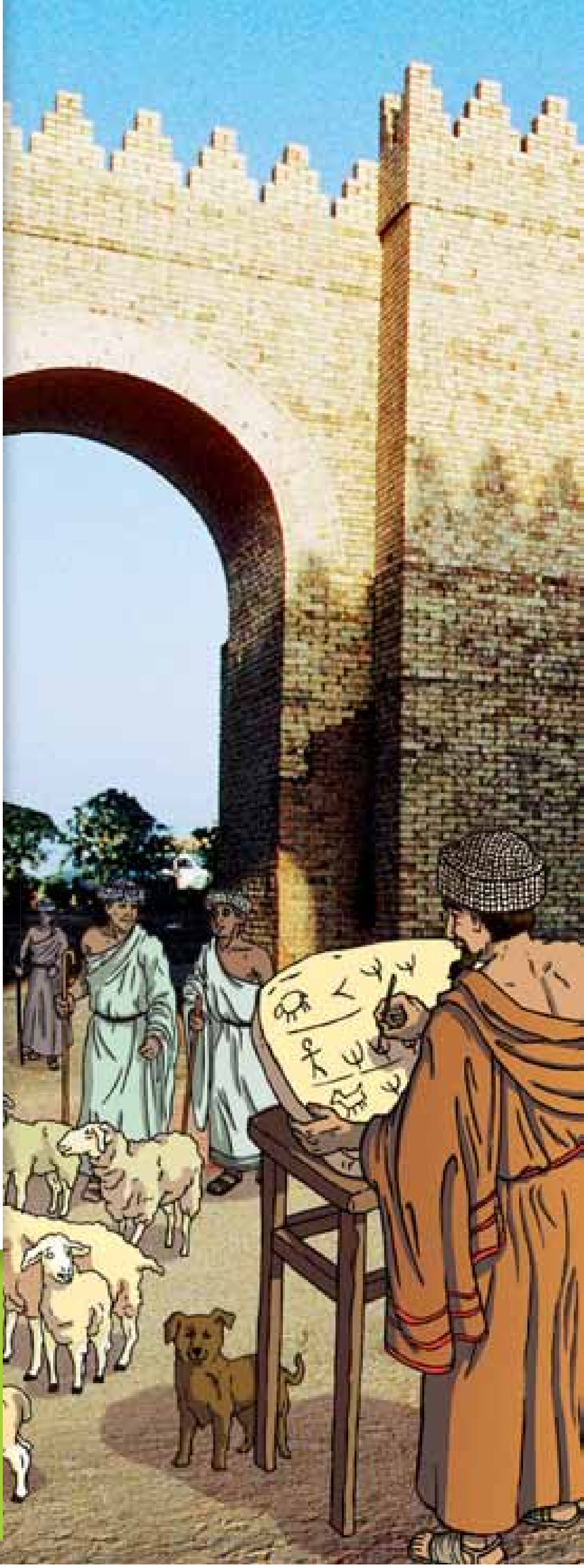
$$12;50,24 \text{ que significaba } 12 + \frac{50}{60} + \frac{24}{60^2}$$

¡Qué complicación!

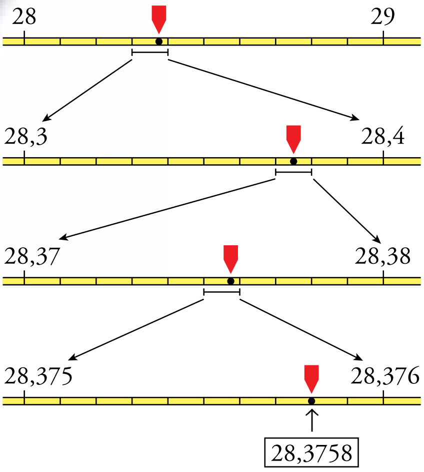
Hasta el siglo XVI no se popularizó el uso de la nomenclatura decimal para expresar partes de la unidad, como hacemos ahora.

DEBERÁS RECORDAR

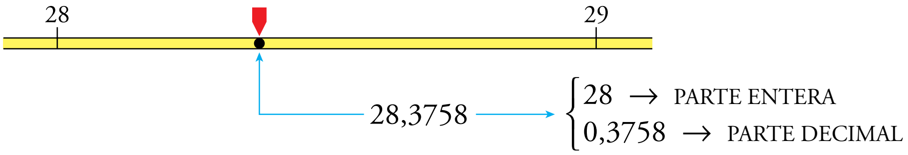
- La estructura del sistema de numeración decimal.
- Cómo se multiplica y se divide por la unidad seguida de ceros.
- Cómo se aproxima un número a un determinado orden de unidades.
- La traducción de algunas cantidades de tiempo del sistema sexagesimal al decimal.



1 El sistema de numeración decimal



Para expresar cantidades comprendidas entre dos números enteros, utilizamos los números decimales.



La parte decimal representa una cantidad menor que la unidad y sus órdenes de unidades tienen la misma estructura que los de la parte entera:

Una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

1 unidad = 10 décimas $\longrightarrow$ $1 = 10 \cdot 0{,}1$

1 décima = 10 centésimas $\longrightarrow$ $0{,}1 = 10 \cdot 0{,}01$

…

1 milésima = 10 diezmilésimas $\longrightarrow$ $0{,}001 = 10 \cdot 0{,}0001$

…

MILLARES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	DÉCIMAS	CENTÉSIMAS	MILÉSIMAS	DIEZMILÉSIMAS	CIENMILÉSIMAS	MILLONÉSIMAS
M	C	D	U,	d	c	m			
		2	8,	3	7	5	8		

➡ Veintiocho unidades y tres mil setecientas cincuenta y ocho diezmilésimas

$$20 + 8 + 0{,}3 + 0{,}07 + 0{,}005 + 0{,}0008 = 28 + \frac{3758}{10\,000}$$

Clases de números decimales

Conviene que sepas diferenciar los distintos tipos de números decimales que te encontrarás en mediciones, resultados de operaciones y problemas.

- **Decimales exactos:** tienen un número limitado de cifras decimales.

  $$4,\underbrace{75}_{\text{DOS CIFRAS DECIMALES}}$$

- **Decimales periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente. Pueden ser de dos tipos:

  Periódico puro:

  $$7{,}151515\ldots = 7,\underbrace{\overset{\frown}{15}}_{\text{PERIODO}}$$

  Periódico mixto:

  $$8{,}24666\ldots = 8,\underbrace{24}_{\text{PARTE DECIMAL NO PERIÓDICA}}\underbrace{\overset{\frown}{6}}_{\text{PERIODO}}$$

- **Decimales no exactos y no periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente.

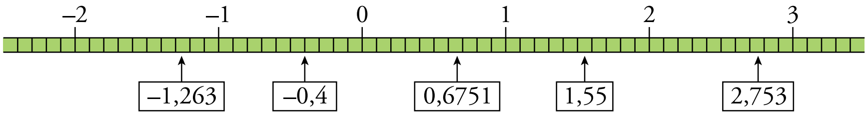
  $$\sqrt{2} = 1{,}4124135\ldots$$

2

Representación y ordenación de números decimales

Cada número decimal se representa con un punto de la recta numérica.

Cada punto de la recta numérica se localiza mediante un número decimal.



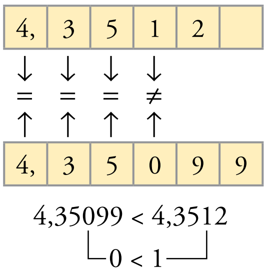
$$-1{,}263 < -0{,}4 < 0{,}6751 < 1{,}55 < 2{,}753$$

Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.

Si elegimos dos números cualesquiera, el menor queda a la izquierda, y el mayor, a la derecha.

Recuerda

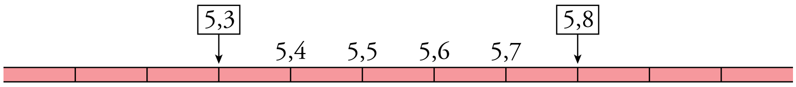
Para comparar dos números decimales, contrastamos cifra a cifra los órdenes de unidades correspondientes, empezando por la izquierda.



Entre dos números decimales siempre hay otro decimal

- Tomemos dos decimales cualesquiera; por ejemplo, 5,3 y 5,8.

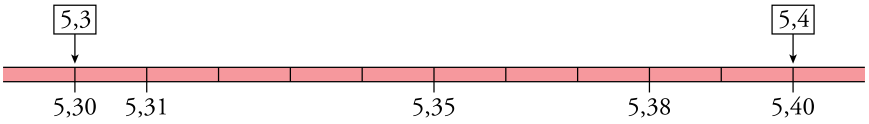
  Es evidente que entre ambos hay otros números.



$$\boxed{5{,}3} < 5{,}4 < 5{,}5 < 5{,}6 < 5{,}7 < \boxed{5{,}8}$$

- Tomemos, ahora, dos consecutivos de los anteriores; por ejemplo, 5,3 y 5,4.

  Ambos números se diferencian en una décima, que se divide en diez centésimas.



$$\boxed{5{,}30} < 5{,}31 < \dots < 5{,}35 < \dots < 5{,}38 < \dots < \boxed{5{,}40}$$

El razonamiento puede continuar indefinidamente, y repetirse para cualquier otro par de números.

- Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.
- Entre dos números decimales cualesquiera hay infinitos decimales.

REGLA PRÁCTICA:

El proceso anterior te resultará más claro si aumentas el número de cifras decimales, añadiendo ceros a la derecha.

▼ EJEMPLO

Intercalemos varios números decimales entre 2,58 y 2,59:

$$\left.\begin{array}{l}2{,}58 = 2{,}580\\ 2{,}59 = 2{,}590\end{array}\right\} \Rightarrow 2{,}580 < 2{,}581 < \dots < 2{,}589 < 2{,}590$$

Ejemplo

Intercalar un número decimal entre

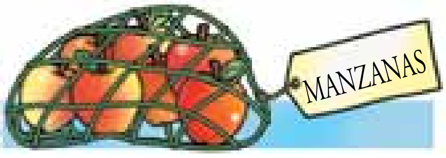
$$\begin{array}{ccccc}\boxed{5{,}09} & < & \dots\dots\dots & < & \boxed{5{,}1}\\ \downarrow & & & & \downarrow\\ \boxed{5{,}090} & < & 5{,}095 & < & \boxed{5{,}100}\end{array}$$

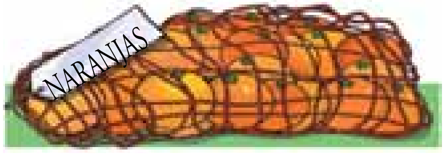
Aproximación de un número decimal a un determinado orden de unidades

En ocasiones, como resultado del cálculo, obtenemos números con excesivas cifras decimales que resultan de manejo engorroso y aportan información poco significativa. En estos casos, sustituimos los resultados por otros más manejables de *valor aproximado*.

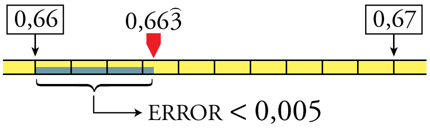
EJEMPLO

Un supermercado ofrece bolsas de manzanas de 3 kg por 1,99 €, y bolsas de naranjas de 5 kg por 2,79 €. ¿A cómo sale el kilo de manzanas? ¿Y el de naranjas?





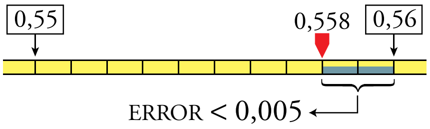
$1{,}99 : 3 = 0{,}66333\ldots$



El resultado $0{,}66\widehat{3}$ está más cerca de 0,66 que de 0,67.

El kilo de manzanas sale por 0,66 €.

$2{,}79 : 5 = 0{,}558$



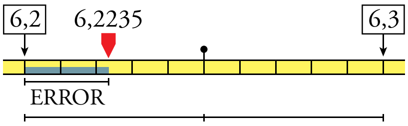
El resultado 0,558 está más cerca de 0,56 que de 0,55.

El kilo de naranjas sale por 0,56 €.

La manipulación de los resultados anteriores recibe el nombre de *redondeo*.

Ten en cuenta

VALOR ⟶ 6,2235



REDONDEO A LAS DÉCIMAS → 6,2

ERROR → $6{,}2235 - 6{,}2 =$
$= 0{,}0235 < 0{,}05$
↓
MEDIA DÉCIMA

El error cometido en el redondeo es inferior a media unidad del orden al que se aproxima.

El **redondeo** consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden de unidades, sumando uno a la última cifra resultante cuando la primera cifra suprimida es 5 o mayor que 5.

Ejercicio resuelto

Aproximar a las décimas y a las centésimas, los números siguientes:

2,818 0,476 1,501 0,099

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS	APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS
2,818	2,8	2,82
0,476	0,5	0,48
1,501	1,5	1,50
0,099	0,1	0,10

Actividades

1 Escribe cómo se leen las cantidades de la tabla:

	C	D	U,	d	c	m			
			0,	0	3	7			
		1	5,	4	6	8			
			0,	0	0	2	4		
4	3	5	8,	6					

2 Escribe cómo se leen las siguientes cantidades:

a) 1,37

b) 5,048

c) 2,0024

d) 0,00538

e) 0,000468

3 Escribe con cifras.

a) Tres unidades y cinco centésimas.

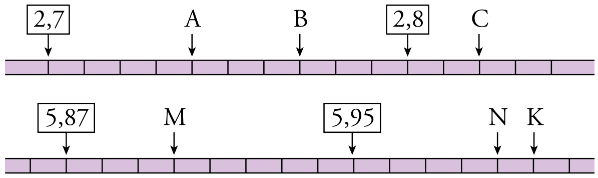
b) Cuarenta y tres milésimas.

c) Ocho cienmilésimas.

d) Doscientas diecinueve millonésimas.

e) Veintitrés millonésimas.

4 Escribe el número asociado a cada letra:



5 Dibuja una recta numérica y representa en ella los siguientes números:

A = 8,7 B = 9 C = 9,4 D = 10

6 Dibuja una recta numérica y representa los números siguientes sobre ella:

M = –0,02 N = 0,07 K = 0,1 H = 0,15

7 Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 7,4; 6,9; 7,09; 7,11; 5,88

b) 3,9; 3,941; 3,906; 4,001; 4,04

c) 0,039; 0,01; 0,06; 0,009; 0,075

8 Copia y completa en tu cuaderno con los signos <, > o =, según corresponda.

2,5 ☐ 2,50 6,1 ☐ 6,987

3,009 ☐ 3,01 4,13 ☐ 4,1300

9 Intercala un número decimal entre:

a) 2,2 y 2,3

b) 4,01 y 4,02

c) 1,59 y 1,6

d) 8 y 8,1

10 Redondea a las décimas.

a) 5,48

b) 2,8346

c) 3,057

11 Redondea a las centésimas.

a) 6,284

b) 1,53369

c) 0,79462

12 Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS
8,53	
5,884	
$2,\widehat{4}$	
$5,\widehat{17}$	
4,083	
6,995	

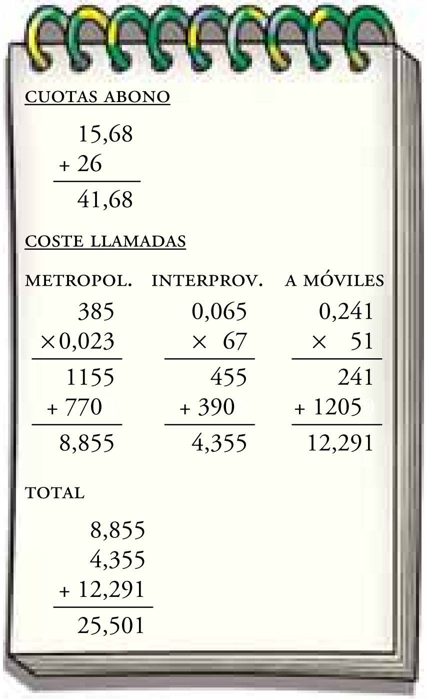
13 Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS
6,527	
0,4639	
1,0894	
2,096	
$5,\widehat{15}$	
$3,\widehat{24}$	

3 Operaciones con números decimales

Ya sabes sumar, restar y multiplicar números decimales. Como repaso, vamos a revisar este recibo de teléfono:

	TELEVOX, S.A.				IMPORTE	SUMAS
A	CUOTAS ABONO					
	– LÍNEA BÁSICA				15,68	
	– LÍNEA ADSL (tarifa plana)				26,00	41,6800
B	CONSUMO LLAMADAS	N.º LLAM.	TIEMPO (minutos)	TARIFAS (€/min)		
	– METROPOLITANAS	8	385	0,023	8,855	
	– INTERPROVINCIALES	16	67	0,065	4,355	
	– A MÓVILES	36	51	0,241	12,291	
	– AL EXTRANJERO	0	0	0,00		25,501
C	DESCUENTOS					
	– AHORRO NÚMS. FIJOS				5,84	
	– PROMOCIÓN FAMILIAS				3,0742	8,9142
RECIBO N.º........................	TOTAL (base imponible A + B – C)					58,2668
ABONADO..........................	IVA (18%)					10,4880
DIRECCIÓN........................	TOTAL					68,75



CUOTAS ABONO

15,68
+ 26
41,68

COSTE LLAMADAS

METROPOL.	INTERPROV.	A MÓVILES
385	0,065	0,241
×0,023	× 67	× 51
1155	455	241
+ 770	+ 390	+ 1205
8,855	4,355	12,291

TOTAL

8,855
4,355
+ 12,291
25,501

Las operaciones necesarias se realizan al margen y se recogen en las siguientes expresiones:

CÁLCULO BASE IMPONIBLE (A + B – C)

$$\overbrace{(15{,}68 + 26{,}00)}^{\text{CUOTA ABONO}} + \overbrace{(385 \cdot 0{,}023 + 67 \cdot 0{,}065 + 51 \cdot 0{,}241)}^{\text{CONSUMO}} - \overbrace{(5{,}84 + 3{,}0742)}^{\text{DESCUENTOS}} =$$

$$= 41{,}68 + (8{,}855 + 4{,}355 + 12{,}291) - 8{,}9142 =$$

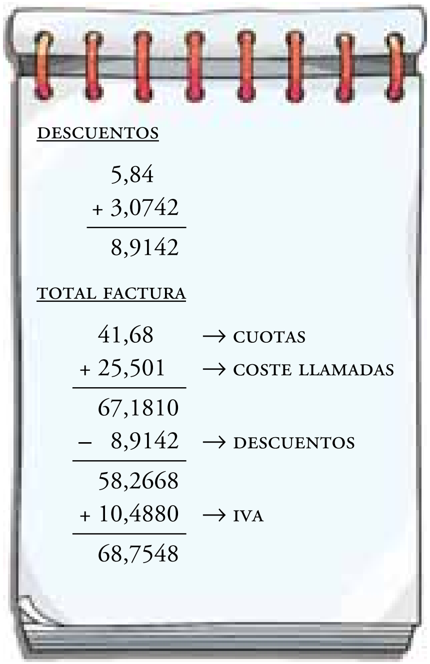
$$= 41{,}68 + 25{,}501 - 8{,}9142 = 67{,}181 - 8{,}9142 = 58{,}2668$$

CÁLCULO DEL IVA (18%)

$$(58{,}2668 \cdot 18) : 100 = 10{,}488024 \xrightarrow[\text{A LAS DIEZMILÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 10{,}4880$$

CÁLCULO DEL TOTAL A PAGAR

$$\overbrace{58{,}2668}^{A + B - C} + \overbrace{10{,}4880}^{\text{IVA}} = 68{,}7548 \xrightarrow[\text{A LAS CENTÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 68{,}75\ €$$



DESCUENTOS

5,84
+ 3,0742
8,9142

TOTAL FACTURA

41,68 → CUOTAS
+ 25,501 → COSTE LLAMADAS
67,1810
– 8,9142 → DESCUENTOS
58,2668
+ 10,4880 → IVA
68,7548

- Para **sumar** o **restar** números decimales, se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de unidades correspondientes.
- Para **multiplicar** números decimales, se opera como si fueran enteros y, después, se separan en el producto tantas cifras decimales como las que reúnen entre los dos factores.

4 División de números decimales

Vamos a repasar ahora los distintos casos de división con números decimales. Para cada uno, partiremos de un problema que da sentido a la operación.

Divisiones con el divisor entero

PROBLEMA 1

Una máquina tejedora ha fabricado una pieza de tela de 25 metros en 8 minutos.

¿Cuántos metros teje en un minuto?

$$\begin{array}{r|l} 25{,}000 & 8 \\ \cline{2-2} 1\ 0 & 3{,}125 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Solución: Teje 3,125 m en un minuto.

PROBLEMA 2

En un obrador de pastelería se han empleado 8,2 kg de harina para la fabricación de 15 tartas iguales. ¿Qué cantidad de harina lleva cada tarta?

$$\begin{array}{l|l} 8{,}2 & 15 \\ \cline{2-2} 0\ 70 & 0{,}5466\ldots \\ 100 & \\ 100 & \\ 10 & \\ \ldots & \end{array}$$

Solución: Cada tarta lleva $0{,}54\overset{\frown}{6} = 0{,}547$ kg.

Para obtener cifras decimales en el cociente:

- Al *bajar* la cifra de las décimas del dividendo, se pone la coma decimal en el cociente y se continúa la división.
- Si no hay suficientes cifras decimales en el dividendo, se añaden los ceros necesarios para alcanzar la aproximación deseada.

Divisiones con el divisor decimal

PROBLEMA 3

Dos kilos y medio de manzanas han costado 4 euros.

¿Cuánto cuesta un kilo de manzanas?

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[d, dashed, bend right, "\cdot 10"'] & : & 2{,}5 \arrow[d, dashed, bend left, "\cdot 10"] \\ 40{,}0 & \Downarrow & 25 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{r|l} 40{,}0 & 25 \\ \cline{2-2} 15\ 0 & 1{,}6 \\ 0\ 0 & \end{array}$$

Solución: Un kilo cuesta 1,6 €.

PROBLEMA 4

Por un consumo de 24,88 metros cúbicos de agua nos ha llegado una factura de 93,3 €. ¿A cómo está el metro cúbico?

$$\begin{tikzcd} 93{,}3 \arrow[d, dashed, bend right, "\cdot 100"'] & : & 24{,}88 \arrow[d, dashed, bend left, "\cdot 100"] \\ 9330{,}00 & \Downarrow & 2488 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{r|l} 9330{,}00 & 2488 \\ \cline{2-2} 1866\ 0 & 3{,}75 \\ 124\ 40 & \\ 00\ 00 & \end{array}$$

Solución: Un metro cúbico cuesta 3,75 €.

Cuando hay **decimales en el divisor:**

Se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor. La nueva división tiene el mismo cociente y el divisor entero.

Recuerda

Si se multiplican el dividendo y el divisor por el mismo número, el cociente no varía.

$$\begin{tikzcd} 6 \arrow[d, "\cdot 10"'] & : & 2 \arrow[d, "\cdot 10"] & = 3 \\ 60 & : & 20 & = 3 \end{tikzcd}$$

COCIENTES IGUALES

Actividades

1 Responde mentalmente.

a) 0,75 + 0,25
b) 0,75 – 0,25
c) 1,80 + 1,20
d) 1,80 – 1,20
e) 2,30 + 1,80
f) 2,30 – 1,80
g) 3,50 + 1,75
h) 3,50 – 1,75

2 Calcula.

a) 2,37 + 0,356
b) 5,86 – 1,749
c) 13,2 + 4,08 + 2,635
d) 15,4 – 6,843
e) 7,04 + 12,283 + 0,05
f) 0,35 – 0,0648

3 Resuelve.

a) 2,37 – 1,26 + 0,8 – 0,35
b) 2,50 – 1,25 – 1,75 – 0,20
c) 13,48 – 10,7 + 5,328 – 6,726
d) 5,6 – 8,42 – 4,725 + 1,48

4 Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

a) Multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir entre…
b) Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir entre…
c) Multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir entre…

5 Calcula mentalmente.

a) 12 · 0,5 b) 28 · 0,5 c) 0,02 · 0,5
d) 8 · 0,25 e) 1,2 · 0,25 f) 0,24 · 0,25
g) 17 · 0,1 h) 2,3 · 0,1 i) 0,6 · 0,1

6 Calcula.

a) 6,3 · 1,24
b) 0,44 · 2,375
c) 0,016 · 0,0025
d) 143 · 0,068
e) 5,48 · 2,63
f) 0,15 · 1,01

7 Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

a) Dividir entre 0,5 es lo mismo que multiplicar por…
b) Dividir entre 0,25 es lo mismo que multiplicar por…
c) Dividir entre 0,1 es lo mismo que multiplicar por…

8 Divide mentalmente.

a) 7 : 0,5 b) 0,3 : 0,5 c) 2,3 : 0,5
d) 2 : 0,25 e) 0,6 : 0,25 f) 1,2 : 0,25
g) 8 : 0,1 h) 0,7 : 0,1 i) 4,8 : 0,1

9 Calcula el cociente exacto o, como máximo, con tres cifras decimales.

a) 8 : 6 b) 218 : 16 c) 3 : 4
d) 12 : 536 e) 149,04 : 23 f) 2,58 : 15

10 Sustituye cada división por otra equivalente con el divisor entero. Después, calcula el cociente exacto o con tres cifras decimales.

a) 6 : 0,2 b) 13 : 0,75
c) 53 : 4,11 d) 4 : 0,009
e) 45,6 : 3,8 f) 23,587 : 5,1
g) 2,549 : 8,5 h) 6,23 : 0,011

11 **Ejercicio resuelto**

Aproximar a las centésimas el cociente de la división 17 : 2,45.

$$\begin{array}{r|l} 1700{,}000 & 2{,}45 \\ \cline{2-2} 230\ 0 & 6{,}938 \\ 09\ 50 & \\ 2\ 150 & \\ 190 & \end{array}$$

APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS → 6,94

12 Aproxima a las centésimas cada cociente:

a) 5 : 6 b) 7 : 9
c) 6 : 3,5 d) 2,7 : 5,9

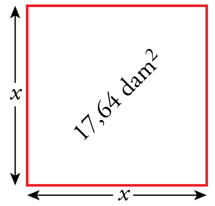
13 Calcula.

a) 2,6 · 100 b) 5,4 : 10 c) 0,83 · 10
d) 12 : 100 e) 0,0048 · 1 000 f) 350 : 1 000

5 Raíz cuadrada de un número decimal

Aplicación

Calcular el lado de un cuadrado conociendo su superficie.



$$x \cdot x = x^2 = 17{,}64$$

$$x = \sqrt{17{,}64} = 4{,}2 \text{ dam}$$

Ya sabes que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado. $\left.\right\}$ $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$

Por ejemplo:

$$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5^2 = 0{,}25 \qquad \sqrt{1{,}44} = 1{,}2 \Leftrightarrow 1{,}2^2 = 1{,}44$$

También sabes que hay muchos números cuya raíz no es exacta. En esos casos, podemos tantear aproximaciones con tantas cifras decimales como queramos. Como ejemplo, vamos a calcular sucesivas aproximaciones de $\sqrt{7}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2^2 = 4 \longrightarrow \text{no llega} \\ 3^2 = 9 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2 < \sqrt{7} < 3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}6^2 = 6{,}76 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2{,}7^2 = 7{,}29 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$$

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}64^2 = 6{,}9696 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2{,}65^2 = 7{,}0225 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$$

La raíz cuadrada en la calculadora

Normalmente, para calcular la raíz cuadrada, usamos la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora, que nos ofrece con comodidad la aproximación deseada.

▼ **EJEMPLO**

Calcular $\sqrt{35}$.

a) Con dos cifras decimales.

En la calculadora obtenemos $\sqrt{35} = 5{,}9160797\ldots$

Para dar la raíz con dos cifras decimales, aproximamos a las centésimas; es decir, $\sqrt{35} = 5{,}92$.

b) Aproximando el resultado a las milésimas.

$\sqrt{35} = 5{,}916$

Actividades

1 Calcula las siguientes raíces exactas:

a) $\sqrt{0{,}04}$ b) $\sqrt{0{,}49}$ c) $\sqrt{0{,}81}$

d) $\sqrt{0{,}0001}$ e) $\sqrt{0{,}0121}$ f) $\sqrt{0{,}1225}$

2 Obtén por tanteo, con una cifra decimal:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{11{,}5}$ c) $\sqrt{150}$

3 Obtén las siguientes raíces con dos cifras decimales. Ayúdate con la calculadora.

a) $\sqrt{7{,}84}$ b) $\sqrt{56}$ c) $\sqrt{39{,}0625}$

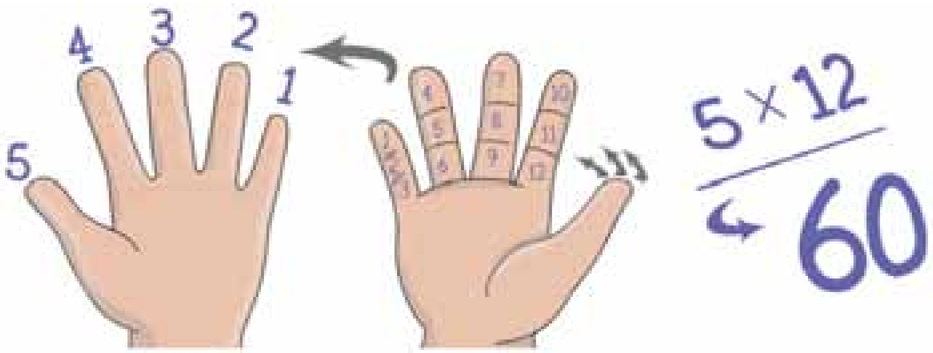
4 Usa la calculadora y redondea a las milésimas.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{2{,}54}$ c) $\sqrt{76{,}38}$

6 El sistema sexagesimal

De la misma forma que nosotros contamos de 10 en 10 (sistema decimal), otras culturas a lo largo de la historia han contado de 60 en 60 (sistema sexagesimal).

- La adopción de 10 como base del sistema de numeración decimal se fundamenta en la forma primitiva de contar utilizando los diez dedos de la mano.
- La adopción del 60 se basa, probablemente, en una forma más sofisticada de contar, utilizando las 12 falanges de los dedos índice, corazón, anular y meñique de una mano recorridos con el pulgar como guía. La cuenta del número de recorridos se llevaba con los dedos de la otra mano.



Medida del tiempo y de la amplitud angular

En la actualidad, el sistema sexagesimal se utiliza en la medida del *tiempo* y en la de la *amplitud angular*. En estas magnitudes, cada unidad se divide en 60 unidades del orden inferior.

TIEMPO

· 60 · 60

HORA	MINUTO	SEGUNDO
h	min	s

AMPLITUD ANGULAR

· 60 · 60

GRADO	MINUTO	SEGUNDO
°	'	''

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ h} = 60\text{ min}\\ 1\text{ min} = 60\text{ s}\end{array}\right\} 1\text{ h} = 60 \cdot 60 = 3\,600\text{ s}$$

$$\left.\begin{array}{l}1° = 60'\\ 1' = 60''\end{array}\right\} 1° = 60 \cdot 60 = 3\,600''$$

Observa que las notaciones de los minutos y los segundos difieren de una magnitud a la otra.

Ten en cuenta

$1\text{ h} = 60\text{ min}$

$1\text{ min} = \frac{1}{60}\text{ h}$

$12\text{ min} = \frac{12}{60}\text{ h} = 0{,}2\text{ h}$

$15\text{ min} = \frac{12}{60}\text{ h} = 0{,}25\text{ h}$

$30\text{ min} = \frac{30}{60}\text{ h} = 0{,}5\text{ h}$

Expresiones complejas e incomplejas

Recuerda que la medida de las cantidades relativas a una magnitud se pueden expresar utilizando simultáneamente varias unidades **(forma compleja)** o una unidad única **(forma incompleja).**

FORMA COMPLEJA		FORMAS INCOMPLEJAS
1 h 15 min	⟷	1,25 h → 75 min
13° 12'	⟷	13,2° → 792'

Transformación de expresiones

La información relativa al tiempo y a la medida de ángulos se suele dar en forma compleja. Sin embargo, al introducirla en la resolución de un problema se ha de expresar en una única unidad (forma incompleja). Es necesario, por tanto, que sepas traducirlo de una forma a la otra. En los siguientes ejemplos aprenderás los procedimientos para hacerlo.

Para el cálculo mental

15 min = 15 : 60 = 0,25 h
⇓
30 min = 0,50 h
45 min = 0,75 h
…
6 min = 6 : 60 = 0,1 h
⇓
12 min = 0,2 h
18 min = 0,3 h
24 min = 0,4 h
…

Paso de complejo a incomplejo

▼ **EJEMPLO 1:** Pasar a segundos 2 h 15 min 54 s.

$$\begin{array}{ccccc} 2\ \text{h} & = & 2 \cdot 3\,600 & = & 7\,200\ \text{s} \\ 15\ \text{min} & = & 15 \cdot 60 & = & 900\ \text{s} \\ 54\ \text{s} & = & & = & 54\ \text{s} \\ \hline 2\ \text{h}\ 15\ \text{min}\ 54\ \text{s} & \multicolumn{3}{c}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}} & 8\,154\ \text{s} \end{array}$$

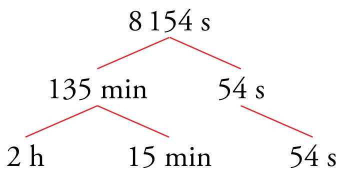
▼ **EJEMPLO 2:** Pasar a horas 2 h 18 min.

$$\begin{array}{ccccc} 2\ \text{h} & = & & = & 2\ \ \text{h} \\ 18\ \text{min} & = & 18 : 60 & = & 0{,}3\ \text{h} \\ \hline 2\ \text{h}\ 18\ \text{min} & \multicolumn{3}{c}{\xrightarrow{\hspace{3cm}}} & 2{,}3\ \text{h} \end{array}$$

Paso de incomplejo a complejo

▼ **EJEMPLO 3:** Pasar a horas, minutos y segundos 8 154 s.

$$\begin{array}{l|l|l} 8154\ \text{s} & 60 & \\ \cline{2-2} 215 & 135\ \text{min} & 60 \\ \cline{3-3} 354 & \boxed{15\ \text{min}} & \boxed{2\ \text{h}} \\ \boxed{54\ \text{s}} & & \end{array}$$



▼ **EJEMPLO 4:** Pasar a horas y minutos 2,7 h.

$$\begin{tikzcd} & \boxed{2\ \text{h}} & \\ 2{,}7\ \text{h} = \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & 0{,}7\ \text{h} \arrow[r, "\cdot 60"] & \boxed{42\ \text{min}} \end{tikzcd}$$

2,7 h = 2 h 42 min

Actividades

1 Expresa en segundos.

a) 37 min
b) 19 min 12 s
c) 1 h 25 min 16 s
d) 2 h 45 min 12 s

2 Expresa en grados.

a) 828'
b) 25 920''
c) 21° 15'
d) 17° 24'

3 Pasa a grados, minutos y segundos.

a) 24 660''
b) 37 240''
c) 78,5'
d) 12,25°

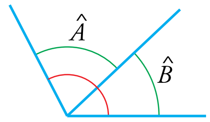
4 Pasa a horas, minutos y segundos.

a) 4 597 s
b) 82,3 min
c) 2,15 h
d) 3,55 h

7 Operaciones en el sistema sexagesimal

En los problemas resueltos que siguen, se expresan algunos procedimientos para operar en forma compleja. Trata de resolverlos, primero, por tus propios medios y, después, compara tus procesos con los que aquí se presentan.

Suma de amplitudes angulares



$\hat{A} = 74° \ 36' \ 52''$

$\hat{B} = 43° \ 18' \ 25''$

$$\begin{array}{rrrr} & 74° & 36' & 52'' \\ + & 43° & 18' & 25'' \\ \hline \hat{A} + \hat{B} = & 117° & 54' & 77'' \\ & & \Downarrow & \\ \hat{A} + \hat{B} = & 117° & 55' & 17'' \end{array}$$

Suma de cantidades en forma compleja

PROBLEMA 1

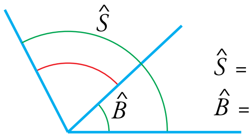
Un autobús de línea ha invertido 2 h 12 min 34 s en el trayecto de ida entre dos ciudades y 1 h 57 min 46 s en el de vuelta. ¿Cuánto ha durado en total el viaje?

$$\begin{array}{r} 2 \text{ h } 12 \text{ min } 34 \text{ s} \\ + \ 1 \text{ h } 57 \text{ min } 46 \text{ s} \\ \hline \underbrace{3 \text{ h } 69 \text{ min } 80 \text{ s}} \end{array} \longrightarrow 3 \text{ h } 70 \text{ min } 20 \text{ s} \longrightarrow 4 \text{ h } 10 \text{ min } 20 \text{ s}$$

En el resultado, transformamos 60 segundos en 1 minuto, y 60 minutos, en 1 hora.

Solución: El viaje ha durado 4 h 10 min 20 s.

Resta de amplitudes angulares



$\hat{S} = 117° \ 55' \ 17''$

$\hat{B} = 43° \ 18' \ 25''$

$$\begin{array}{rrrr} & 117° & 55' & 17'' \\ - & 43° & 18' & 25'' \\ \hline & & \Downarrow & \\ & 117° & 54' & 77'' \\ - & 43° & 18' & 25'' \\ \hline \hat{S} - \hat{B} = & 74° & 36' & 52'' \end{array}$$

Resta de cantidades en forma compleja

PROBLEMA 2

Un helicóptero de salvamento marítimo recibe un aviso de socorro a las 18 h 56 min 45 s, y llega al lugar del accidente a las 19 h 8 min 15 s. ¿Cuánto ha tardado en responder a la llamada?

$$\begin{array}{r} 19 \text{ h } \ \ 8 \text{ min } 15 \text{ s} \\ - \ 18 \text{ h } 56 \text{ min } 45 \text{ s} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 18 \text{ h } 68 \text{ min } 15 \text{ s} \\ - \ 18 \text{ h } 56 \text{ min } 45 \text{ s} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 18 \text{ h } 67 \text{ min } 75 \text{ s} \\ - \ 18 \text{ h } 56 \text{ min } 45 \text{ s} \\ \hline 0 \text{ h } 11 \text{ min } 30 \text{ s} \end{array}$$

Solución: Ha tardado once minutos y medio.

Producto de una cantidad compleja por un número

PROBLEMA 3

La cadena de montaje de una fábrica de electrodomésticos está programada para lanzar un lavavajillas cada 5 minutos y 13 segundos. ¿Cuánto tardará en cubrir un pedido de 50 lavavajillas?

$$\begin{array}{r} 5 \text{ min } 13 \text{ s} \\ \times \ 50 \\ \hline \boxed{250 \text{ min } \ 650 \text{ s}} \end{array}$$

En el resultado, hacemos las siguientes transformaciones:

$$\begin{array}{r|l} 650 \text{ s} & 60 \\ \cline{2-2} 050 \text{ s} & 10 \text{ min} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 260 \text{ min} & 60 \\ \cline{2-2} 20 \text{ min} & 4 \text{ h} \end{array}$$

$$\boxed{650 \text{ s} = 10 \text{ min } 50 \text{ s}} \qquad \boxed{260 \text{ min} = 4 \text{ h } 20 \text{ min}}$$

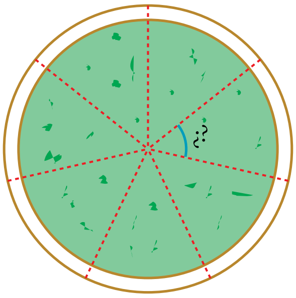
$$\longrightarrow 260 \text{ min } 50 \text{ s} \longrightarrow 4 \text{ h } 20 \text{ min } 50 \text{ s}$$

Solución: Tarda 4 h 20 min 50 s en cubrir el pedido.

Cociente en forma compleja

PROBLEMA 4

Se desea dividir el jardín de una rotonda circular en siete sectores iguales. ¿Cuánto medirá el ángulo de cada sector?



$$\begin{array}{lll|l}
360^\circ & & & 7 \\ \cline{4-4}
\ \ 10 & & & 51^\circ\ 25'\ 42'' \\
\ \ 3^\circ \xrightarrow{\cdot 60} & 180' & & \\
 & \ \ 40 & & \\
 & \ \ 5' \xrightarrow{\cdot 60} & 300'' & \\
 & & \ \ 20 & \\
 & & \ \ \ 6'' &
\end{array}$$

— Se divide 360° entre 7, y el resto se pasa a minutos.

— Se dividen 180' entre 7, y el resto se pasa a segundos.

— Queda un resto de 6''.

Solución: El ángulo de cada sector medirá 51° 25' 42''.

PROBLEMA 5

En un circuito de motociclismo, un piloto ha completado 25 vueltas en un tiempo de 1 h 45 min 25 s. ¿Cuánto ha tardado, por término medio, en cada vuelta?

$$\begin{array}{lll|l}
1\text{ h} & 45\text{ min} & 25\text{ s} & 25 \\ \cline{4-4}
\xrightarrow{\cdot 60} & \underline{60\text{ min}} & + & 0\text{ h } 4\text{ min } 13\text{ s} \\
 & 105\text{ min} & & \\
 & 05\text{ min} \xrightarrow{\cdot 60} & \underline{300\text{ s}} & \\
 & & 325\text{ s} & \\
 & & \ \ 75 & \\
 & & \ \ \ 0 &
\end{array}$$

Solución: Ha tardado, en cada vuelta, 4 minutos y 13 segundos.

Actividades

1 Realiza las sumas siguientes:

a) 6 h 15 min 30 s + 1 h 18 min 45 s

b) 2 h 37 min 12 s + 43 min 18 s

c) 3 h 24 min 16 s + 1 h 50 min 58 s

2 Calcula estas sumas de ángulos:

a) 12° 16' 37'' + 15° 42' 35''

b) 84° 25' 52'' + 12° 46' 33''

3 Realiza las siguientes restas:

a) 3 h 38 min 28 s – 46 min 12 s

b) 2 h 23 min 13 s – 1 h 42 min 20 s

c) 2 h – 1 h 16 min 30 s

4 Calcula estas diferencias de ángulos:

a) 85° 45' – 18° 37' 19''

b) 70° 49' 12'' – 36° 57' 10''

c) 62° 14' 21'' – 18° 27' 35''

5 Calcula.

a) (52 min 13 s) · 10

b) (1° 16' 15'') · 4

6 Calcula la medida de los ángulos cuya amplitud sea el doble y el triple, respectivamente, de la del ángulo $\hat{M}$ = 22° 25' 43''.

7 Divide.

a) 109° : 4

b) 21° 40' : 5

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Sistema de numeración decimal

1 ▼▽▽ Copia y completa.

a) 5 décimas = … milésimas

b) 2 milésimas = … millonésimas

c) 6 cienmilésimas = … centésimas

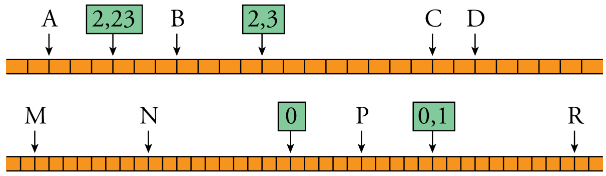
d) 8 millonésimas = … milésimas

2 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 5,1; 5,099; 4,83; 4,9; 4,99

b) 0,21; 0,03; 0,15; 0,209; 0,101; 0,121

3 ▼▽▽ Escribe el número asociado a cada letra:



4 ▼▽▽ Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

NÚMERO	$2,\widehat{7}$	$5,\widehat{29}$	$4,6\widehat{51}$
APROXIMACIÓN A LAS UNIDADES			
APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS MILÉSIMAS			

5 ▼▽▽ Berta pesa 52 kg y 450 gramos. María pesa 52,5 kg. Jacinto pesa más que Berta, pero menos que María.

a) ¿Qué puedes decir del error cometido al estimar el peso de Jacinto en 52 kilos?

b) ¿Y al estimarlo en cincuenta y dos kilos y medio?

Operaciones con números decimales

6 ▼▽▽ Calcula.

a) 3,2 – 1,63 – 0,528

b) 0,85+1,23–0,638–0,4

c) 3,458 – (6,7 – 4,284)

d) 5,2 – (2,798 + 1,36)

7 ▼▽▽ Opera con la calculadora y aproxima el resultado a las centésimas.

a) 2,63 · 0,84

b) 0,27 · 0,086

c) 62,35 : 12

d) 5,27 : 153

e) $\sqrt{851}$

f) $\sqrt{13{,}29}$

8 ▼▽▽ Obtén el resultado con ayuda de la calculadora y redondea a las centésimas.

a) 8,73 : 1,7 – 3,42 : 2,1

b) (8,73 : 1,7 – 3,42) : 2,1

9 ▼▽▽ Opera.

a) 5,8 – 3,2 · 1,6 – 0,29

b) (5,8 – 3,2) · 1,6 – 0,29

c) 5,8 – 3,2 · (1,6 – 0,29)

d) 5,8 – (3,2 · 1,6 – 0,29)

10 ▼▽▽ Para multiplicar por 0,1, podemos dividir entre diez, como ves en el ejemplo.

- **80 · 0,1 = 80 : 10 = 8**

¿Por qué número hay que dividir para…

a) …multiplicar por 0,01?

b) …multiplicar por 0,001?

11 ▼▽▽ Busca, y completa en tu cuaderno, el número decimal que debe ocupar cada casilla.

a) ☐ · 4,8 = 6

b) 0,2 · ☐ = 0,002

c) 7 : ☐ = 5

d) ☐ : 0,25 = 1,2

12 ▼▽▽ Copia y completa en tu cuaderno este cuadrado mágico.

	1,23	
1,08	0,03	0,78

13 ▼▽▽ Continúa en tres términos cada serie:

a) 2,37 - 2,16 - 1,95 - 1,74 - …

b) 5 - 1 - 0,2 - 0,4 - …

c) 0,24 - 1,2 - 6 - 30 - …

14 ▼▽▽ Calcula, con dos cifras decimales, la nota media de Julián en cada asignatura.

a) Lengua: 8 - 6 - 7 - 7 - 6 - 7

b) Matemáticas: 5,2 - 6 - 5,8 - 4,5 - 7,1 - 5,7

Operaciones en el sistema sexagesimal

15 ▼▽▽ Expresa en horas.

a) 48 min

b) 66 min

c) 6 120 s

16 ▼▽▽ Pasa a horas, minutos y segundos.

a) 8,42 h

b) 123,45 min

c) 12 746 s

17 ▼▽▽ Calcula.

a) 37° 50' 18'' + 25° 39'

b) 53° 27' 46'' + 39° 43' 32''

c) (3 h 13 min) – (1 h 52 min 28 s)

d) (4 h 16 min 24 s) – (2 h 39 min 51 s)

18 ▼▽▽ Calcula.

a) (14 min 16 s) · 8

b) (59° 46' 18'') : 6

Resuelve problemas con números decimales

19 ▼▽▽ ¿Cuánto cuestan dos kilos y ochocientos gramos de manzanas a 1,65 € el kilo?

20 ▼▽▽ ¿Cuánto pagaré si compro 1,083 kg de salmón a 9,75 €/kg? (Atención al redondeo).

21 ▼▽▽ Una llamada telefónica a Oslo de 13,5 min ha costado 9,45 €. ¿Cuál es el precio por minuto?

22 ▼▽▽ Para fabricar 3 500 dosis de cierto medicamento, se necesitan 1,96 kg de principio activo. ¿Cuántos gramos de este principio lleva cada dosis?

23 ▼▼▽ Hemos gastado 6,08 € en la compra de un trozo de queso que se vende a 12,80 €/kg. ¿Cuánto pesa la porción adquirida?

24 ▼▼▽ Una sandía de 2 kilos y 625 gramos ha costado 4,2 €. ¿A cómo sale el kilo?

25 ▼▼▽ Marcelo compra un melón que pesa dos kilos y cuatrocientos gramos.

Si el melón se vende a 1,99 €/kg, ¿cuál de estas cantidades debe pagar por la compra?

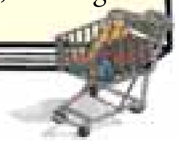
4,80 € 4,90 €

4,78 € 4,88 €

26 ▼▼▽ Karla ha comprado 340 gramos de jamón, ha pagado con un billete de 10 € y le han devuelto 3,88 €. ¿A cómo está el kilo de jamón?

27 ▼▼▽ Para celebrar una fiesta, trece amigos adquieren:

FIESTA:
— 6 botellas de refresco a 1,65 € la botella.
— 1,120 kg de jamón a 27,75 €/kg.
— 5 barras de pan a 0,85 € la barra.
— 350 g de cacahuetes a 9,60 €/kg.
— 0,8 kg de patatas fritas a 5,80 €/kg.



¿Cuánto debe poner cada uno?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas con amplitudes angulares y tiempos

28 ▼▼▽ Un autobús interurbano da una vuelta a su recorrido cada hora y doce minutos. ¿Cuántas vueltas dará en las 12 horas que dura su servicio?

Analiza y exprésate

29 ▼▼▼ Describe las distintas formas en que se ha resuelto la cuestión propuesta, y di si aprecias errores en alguna de ellas.

Un camión circula por una autopista a 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 300 km?

Resolución 1

$$\begin{array}{lr|l}
300 & & 90 \\ \cline{3-3}
30 & \rightarrow 30 & 3\text{ h }20\text{ min} \\
 & \times\ 60 & \\ \cline{2-2}
 & 1\,800 & \\
 & 000 &
\end{array}$$

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 2

$$\begin{array}{r|l}
300{,}00 & 90 \\ \cline{2-2}
30\ 0 & 3{,}33 \\
3\ 00 & \\
30 &
\end{array}$$

El camión tarda 3 h 33 min.

Resolución 3

$$300 = \underset{\substack{\downarrow\\ 1\text{ h}}}{90} + \underset{\substack{\downarrow\\ 1\text{ h}}}{90} + \underset{\substack{\downarrow\\ 1\text{ h}}}{90} + \underset{\substack{\downarrow\\ 20\text{ min}}}{30}$$

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 4

90 km/h = 90 000 : 60 m/min = 1 500 m/min

300 km = 300 000 m

300 000 m : 1 500 m/min = 200 min = 3 h 20 min

El camión tarda 3 h 20 min.

Autoevaluación

¿Lees y escribes números que tengan hasta seis cifras decimales?

1 Escribe cómo se leen:

a) 1,07 b) 0,0023 c) 0,000234

2 Escribe con cifras:

a) Dieciocho centésimas.

b) Trece cienmilésimas.

c) Doscientas treinta y cinco millonésimas.

¿Redondeas un número decimal a las décimas, las centésimas, etc.?

3 Redondea a las centésimas.

a) 5,052 b) 0,55555 c) 0,7481

¿Realizas con agilidad cualquier operación con números decimales?

4 Calcula.

a) 0,25 · 11,48 b) 23 : 4,5

c) 0,08 : 1,6 d) 10,2 : 0,034

¿Pasas cantidades sexagesimales de forma compleja a incompleja, y viceversa?

5 Realiza las siguientes transformaciones:

a) Pasa a segundos 1 h 24 min.

b) Pasa a horas y minutos 2,4 h.

¿Resuelves problemas con números decimales y con cantidades sexagesimales?

6 Un vídeo tiene una duración de una hora y 59 minutos. Si la proyección ha terminado a las 14 h 12 min, ¿a qué hora empezó?

7 ¿Cuánto tarda en recorrer 180 km un camón que circula a la velocidad de 80 km/h?

8 Un mayorista compra en una bodega una cuba con 15 600 litros de vino a 0,60 €/*l*. Lo envasa en botellas de 0,75 *l* y lo vende a un supermercado a 1,20 € la botella.

a) ¿Cuántas botellas llena?

b) ¿Cuánto recibe por la venta de las botellas?

3 Las fracciones

El origen de las fracciones es muy antiguo: babilonios, egipcios, griegos, chinos e indios las manejaban hace miles de años.

Las fracciones de los babilonios eran sexagesimales: solo utilizaban como denominadores el número 60 y sus potencias. Por ejemplo, para $\frac{3}{4}$ ponían $\frac{45}{60}$.

Los egipcios usaban, exclusivamente, fracciones unitarias (con numerador uno). Por ejemplo, para escribir $\frac{3}{5}$ ponían $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.

Eso hacía los cálculos sumamente engorrosos y les obligaba a valerse de complicadas tablas para efectuar operaciones.

Los antiguos griegos, inicialmente, continuaron la tradición egipcia, aunque más adelante pasaron a utilizar las fracciones ordinarias, que llegaron a manejar con gran soltura. Pero se empeñaban en dar el resultado de los problemas como suma de fracciones unitarias. Y este extraño tratamiento mixto se extendió hasta la Europa del siglo XIII.

Los chinos, sin embargo, ya en el siglo IV manejaban con toda destreza las fracciones ordinarias. Como curiosidad, diremos que llamaban *hijo* al numerador y *madre* al denominador.

Los árabes, en su época de expansión y esplendor, también tuvieron grandes matemáticos en cuyos tratados aparecen las fracciones. Así, el nombre de fracción viene de la traducción (siglo XII) de *La Aritmética* de Al-Jwarizmi. La palabra árabe *al-kasr*, que significa *quebrar*, *romper* (se refería al quebrado o fracción de la unidad), se tradujo al latín por *fractio*.

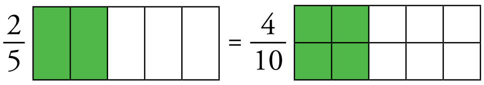
DEBERÁS RECORDAR

- Una fracción es una parte de la unidad.
- Una fracción es una división indicada.
- Una fracción es un operador que actúa sobre un número y lo transforma.
- Diferentes fracciones pueden expresar el mismo valor.
- Cómo se calcula el mínimo común múltiplo de dos números.

1

Fracciones equivalentes

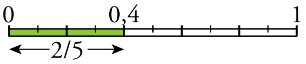
Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad.



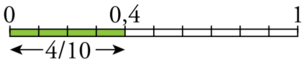
$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

Dos fracciones equivalentes tienen el mismo valor numérico.

$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$



$\frac{4}{10} = 4 : 10 = 0{,}4$



Propiedad fundamental de las fracciones

Si se multiplican los dos miembros de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \boxed{2}}{5 \cdot \boxed{2}} = \frac{4}{10} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot \boxed{3}}{5 \cdot \boxed{3}} = \frac{6}{15}$$

Recuerda

¿Cómo reconocer fracciones equivalentes?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

En las fracciones equivalentes, los productos de los términos cruzados son iguales.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \leftrightarrow \underbrace{2 \cdot 15}_{30} = \underbrace{6 \cdot 5}_{30}$$

Simplificación de fracciones

Como consecuencia de la propiedad anterior, podemos afirmar:

Si se dividen los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

Esta transformación recibe el nombre de **simplificación de fracciones.**

Una fracción que no se puede simplificar se llama **irreducible.**

$$\frac{12}{30} = \frac{12 : 2}{30 : 2} = \frac{6}{15} = \frac{6 : 3}{15 : 3} = \frac{2}{5} \leftrightarrow \text{FRACCIÓN IRREDUCIBLE}$$

Actividades

1 Escribe tres fracciones equivalentes a:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{6}{8}$ c) $\frac{5}{50}$

2 Divide, expresa en forma decimal y comprueba que las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

3 Escribe una fracción equivalente a $\frac{4}{12}$ que tenga por denominador 15.

4 Simplifica.

a) $\frac{12}{20}$ b) $\frac{12}{32}$ c) $\frac{15}{45}$

5 Obtén en cada caso la fracción irreducible:

a) $\frac{15}{18}$ b) $\frac{30}{54}$ c) $\frac{25}{75}$

6 Calcula, en cada igualdad, el término desconocido:

a) $\frac{8}{20} = \frac{10}{x}$ b) $\frac{25}{x} = \frac{15}{9}$ c) $\frac{x}{21} = \frac{12}{28}$

2 Reducción de fracciones a común denominador

Comparar, sumar y restar fracciones es muy sencillo cuando todas tienen el mismo denominador. Por eso, cuando no lo tienen, las sustituimos por otras equivalentes con igual denominador.

Analiza el proceso que se ha de seguir en el ejemplo que viene a continuación.

Recuerda

Para obtener el mínimo común múltiplo de varios números:

- Se descomponen en factores primos.
- Se toman los factores primos comunes y los no comunes, con el mayor exponente.

▼ **EJEMPLO**

Vamos a ordenar de menor a mayor las fracciones $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{30}$ y $\frac{11}{20}$.

- Elegimos como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \end{array}\right\} \to \text{mín.c.m. } (12, 30, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

- En cada fracción, multiplicamos numerador y denominador por el mismo número, el adecuado para obtener 60 en el denominador:

$$\left.\begin{array}{l} 60 : 12 = 5 \to \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60} \\ 60 : 30 = 2 \to \frac{13}{30} = \frac{13 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{26}{60} \\ 60 : 20 = 3 \to \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{33}{60} \end{array}\right\} \underbrace{\frac{26}{60} < \frac{33}{60} < \frac{35}{60}}_{\downarrow}$$

Ahora, ya podemos ordenar las fracciones: $\overbrace{\frac{13}{30} < \frac{11}{20} < \frac{7}{12}}$

Para reducir fracciones a común denominador:

- Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador correspondiente.

Actividades

1 Reduce a común denominador, poniendo como denominador común el que se indica en cada caso.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ → Denominador común: 8

b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9}$ → Denominador común: 18

c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9}$ → Denominador común: 36

d) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}$ → Denominador común: 20

2 Reduce a común denominador los siguientes grupos de fracciones:

a) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{11}{18}$

e) $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{15}$

f) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}$

g) $\frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

h) $\frac{2}{5}, \frac{5}{9}, \frac{11}{15}, \frac{22}{45}$

3 Suma y resta de fracciones

- Para sumar o restar fracciones, las reducimos previamente a común denominador.
- Si alguno de los sumandos es un número entero, lo transformamos en una fracción con denominador la unidad $\left(a = \frac{a}{1}\right)$.

Recuerda

$$\left.\begin{array}{r} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \\ 6 = 2 \cdot 3 \end{array}\right\}$$

$$\text{mín.c.m. } (12, 8, 6) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

EJEMPLO

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{8}+\frac{1}{6} \rightarrow \text{mín.c.m. } (12, 8, 6) = 24$$

$$\boxed{24 : 12 = 2} \qquad \boxed{24 : 8 = 3} \qquad \boxed{24 : 6 = 4}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{7}{12}-\frac{5}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} =$$

$$= \frac{14}{24}-\frac{15}{24}+\frac{4}{24}=\frac{14+4-15}{24}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

Sumas, restas y paréntesis

El manejo de los paréntesis en las sumas y las restas de fracciones sigue las mismas reglas que en los números enteros.

- Si se suprime un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores no varían:

$$+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}$$

- Si se suprime un paréntesis precedido del signo menos, los signos interiores se transforman; más en menos y menos en más:

$$-\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}\right)=-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{m}{n}$$

Fracciones opuestas

- Dos **fracciones** son **opuestas** cuando su suma es cero.
- Toda fracción $\frac{a}{b}$ tiene una opuesta, $\frac{-a}{b}$ $\left(\text{o bien } \frac{a}{-b}\right)$:

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=0$$

EJEMPLO

$$\frac{3}{5} \rightarrow \text{Formas de la opuesta} \begin{cases} -\frac{3}{5} \\ \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{-5} \end{cases}$$

EJEMPLO

- Resolución suprimiendo previamente los paréntesis:

$$\left(2-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{13}{12}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{1}-\frac{4}{3}-\frac{13}{12}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=$$

$$=\frac{24}{12}-\frac{16}{12}-\frac{13}{12}+\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{33-31}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

- Resolución operando dentro de los paréntesis:

$$\left(2-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{13}{12}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{6}{3}-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{13}{12}-\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{15-9}{12}=\frac{2}{3}-\frac{6}{12}=\frac{8}{12}-\frac{6}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Actividades

1 Escribe la fracción opuesta de:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{-2}{3}$ c) $\frac{4}{-5}$

2 Copia y completa en tu cuaderno.

a) $\frac{2}{7} - \frac{2}{\square} = 0$ b) $\frac{3}{4} + \frac{\square}{4} = 0$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{\square} = 0$ d) $\frac{5}{8} - \frac{-5}{\square} = 0$

3 Calcula mentalmente.

a) $1 + \frac{1}{2}$ b) $1 - \frac{1}{2}$ c) $2 + \frac{1}{2}$

d) $1 + \frac{1}{3}$ e) $1 - \frac{1}{3}$ f) $2 + \frac{1}{3}$

g) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ h) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ i) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

4 Calcula.

a) $1 - \frac{3}{7}$ b) $2 - \frac{5}{4}$ c) $\frac{17}{5} - 3$ d) $\frac{13}{15} - 1$

5 Opera.

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{5}{6} - \frac{5}{9}$

d) $\frac{1}{4} + \frac{5}{16}$ e) $\frac{3}{11} - \frac{1}{2}$ f) $\frac{9}{14} + \frac{1}{4}$

6 Opera y simplifica.

a) $\frac{7}{6} + \frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{5} + \frac{3}{10}$ c) $\frac{2}{7} - \frac{11}{14}$

d) $\frac{1}{6} - \frac{1}{14}$ e) $\frac{7}{15} - \frac{3}{10}$ f) $\frac{7}{20} - \frac{4}{15}$

7 Calcula, reduciendo al común denominador que se indica.

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$ → Denominador común: 30

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ → Denominador común: 8

c) $\frac{5}{6} - \frac{3}{9} - \frac{3}{4}$ → Denominador común: 36

d) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ → Denominador común: 6

e) $\frac{7}{9} - \frac{4}{15} - \frac{1}{5}$ → Denominador común: 45

8 Calcula.

a) $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{10} + \frac{4}{5} - \frac{3}{4}$

c) $1 - \frac{6}{7} + \frac{5}{11}$

d) $\frac{9}{5} + \frac{6}{7} - 2$

9 Calcula y simplifica los resultados.

a) $\frac{4}{9} + \frac{5}{6} - \frac{7}{18}$

b) $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} + \frac{27}{35}$

c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$

d) $\frac{13}{12} - \frac{5}{8} - \frac{5}{6}$

10 Opera y compara los resultados.

a) $2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

b) $2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10}$

d) $\frac{3}{5} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}\right)$

11 Quita paréntesis y calcula.

a) $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)$

b) $\frac{3}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$

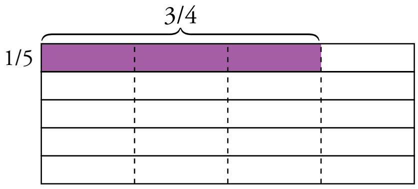
d) $\left(1 - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{9}{14} - \frac{1}{2}\right)$

4 Multiplicación y división de fracciones

Multiplicación

Observa e interpreta los siguientes gráficos:

$$3\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$



$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$$

La forma de llegar a los mismos resultados, sin ayuda de los gráficos, sería:

$$3\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 1}{1\cdot 5}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$$

Para multiplicar fracciones:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad\begin{array}{l}\leftrightarrow \text{ Se multiplican los numeradores.}\\ \leftrightarrow \text{ Se multiplican los denominadores.}\end{array}$$

Fracciones inversas

- Dos **fracciones** son **inversas** cuando su producto es la unidad.
- Toda fracción distinta de cero tiene inversa:

Inversa de $\frac{a}{b}\rightarrow\frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$$

Recuerda

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

— Primero, los paréntesis.

— Después, las multiplicaciones y las divisiones.

— Por último, las sumas y las restas.

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{8}-\frac{15}{48}=\frac{9}{16}$$

División

Recuerda las relaciones entre la multiplicación y la división de enteros.

$$8\cdot 5=40\ \rightarrow\ \begin{cases}40:8=5\\ 40:5=8\end{cases}$$

Estas relaciones se han de mantener con las fracciones.

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}\ \rightarrow\ \begin{cases}\dfrac{8}{15}:\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{3}\\[2ex] \dfrac{8}{15}:\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

En la práctica, para obtener esos resultados al dividir dos fracciones, se multiplica la primera por la inversa de la segunda o, lo que es lo mismo, se multiplican los términos cruzados.

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{15} : \frac{2}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

Para dividir dos fracciones:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ ↔ Se multiplican los términos cruzados.

EJEMPLOS

$$\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5} : 6 = \frac{2}{3} : \frac{6}{1} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Actividades

1 Multiplica.

a) $2 \cdot \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4} \cdot 5$ c) $(-7) \cdot \frac{2}{5}$

d) $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3}$ e) $\frac{3}{5} \cdot \frac{(-2)}{7}$ f) $\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}$

2 Multiplica y reduce como en el ejemplo.

- $\mathbf{\frac{2}{5} \cdot 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{10}{1} = \frac{20}{5} = 4}$

a) $\frac{1}{3} \cdot 6$ b) $\frac{2}{(-3)} \cdot 12$ c) $\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot 7$

d) $\frac{3}{4} \cdot 8$ e) $\frac{5}{3} \cdot (-12)$ f) $\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot (-18)$

3 Multiplica y obtén la fracción irreducible.

a) $\frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2}$ b) $\frac{(-3)}{5} \cdot \frac{(-5)}{3}$ c) $\frac{13}{21} \cdot \frac{7}{13}$

d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2}$ e) $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$ f) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(-\frac{18}{35}\right)$

4 Divide estas fracciones:

a) $4 : \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5} : 2$ c) $\frac{3}{5} : \frac{8}{7}$

d) $\frac{1}{3} : 4$ e) $2 : \frac{3}{5}$ f) $\frac{8}{7} : \frac{3}{5}$

5 **Ejercicio resuelto**

a) $\mathbf{\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9-4}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

b) $\mathbf{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{6}{20} - \frac{1}{3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{3} = \frac{9-10}{30} = \frac{-1}{30}$

6 Calcula y compara los resultados de izquierda y derecha.

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

b) $\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)$

c) $\frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{5}$

d) $\frac{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right)$

7 Opera.

a) $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot 20$

b) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : 7$

c) $\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$ d) $\frac{3}{21} : \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{3}\right)$

5

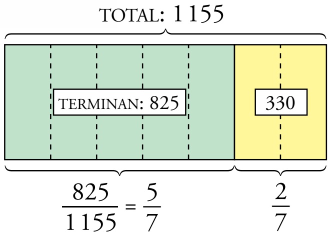
Problemas aritméticos con números fraccionarios

Se presenta una serie de problemas tipo, resueltos, cuya comprensión te facilitará el camino para resolver, por analogía, muchas situaciones con fracciones.

Fracción de una cantidad

PROBLEMA 1: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

En un maratón han tomado la salida 1 155 participantes, pero durante la prueba han abandonado 330. ¿Qué fracción del total de los inscritos ha llegado al final?



$$\left.\begin{array}{l}\text{Fracción que}\\ \text{abandona}\end{array}\right\} \to \frac{330}{1\,155} \xrightarrow[:3]{:3} \frac{110}{385} \xrightarrow[:5]{:5} \frac{22}{77} \xrightarrow[:11]{:11} \frac{2}{7}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fracción que}\\ \text{finaliza}\end{array}\right\} \to \frac{7}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

PROBLEMA 2: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

En un maratón han tomado la salida 1 155 participantes. Durante la prueba han abandonado 2/7 de los corredores. ¿Cuántos han llegado a la meta?

N.° de abandonos → $\frac{2}{7}$ de 1 155 = $\frac{1\,155 \cdot 2}{7} = 330$

N.° de los que terminan → 1 155 – 330 = 825

Suma y resta de fracciones

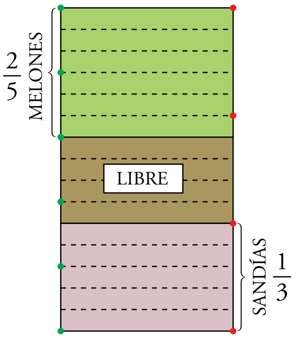
PROBLEMA 3: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

Un hortelano siembra 2/5 de su huerta de melones y 1/3 de la huerta de sandías. ¿Qué parte del terreno queda aún libre?

$$\text{Ocupado}\left\{\begin{array}{l}\to \text{Melones} \to \frac{2}{5}\\[6pt] \to \text{Sandías} \to \frac{1}{3}\end{array}\right\} \frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$$

Libre → $\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$

Solución: Aún quedan libres $\frac{4}{15}$ del terreno.



PROBLEMA 4: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

Un agricultor siembra 2/5 de su huerta de melones y 1/3 de sandías. Si la huerta tiene 3 000 m^2, ¿qué superficie queda sin sembrar?

Sembrado → $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$

Libre → $\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$

Superficie libre → $\frac{4}{15}$ de 3 000 = $\frac{3\,000 \cdot 4}{15}$ = 800 m^2

Multiplicación y división de fracciones

PROBLEMA 5: PRODUCTO

Un frasco de perfume tiene una capacidad de 3/20 de litro. ¿Cuántos litros se necesitan para llenar 30 frascos?

$$\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{3 \cdot 30}{20} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Solución: Para llenar 30 frascos, se necesitan cuatro litros y medio de perfume.

PROBLEMA 6: COCIENTE

Con un bidón que contiene cuatro litros y medio de perfume, se han llenado 30 frascos iguales. ¿Cuál es la capacidad de un frasco?

Cuatro litros y medio → $4 + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\, l$

Capacidad de un frasco → $\frac{9}{2} : 30 = \frac{9}{30 \cdot 2} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}\, l$

PROBLEMA 7: COCIENTE

Un frasco de perfume tiene una capacidad de 3/20 de litro. ¿Cuántos frascos se llenan con un bidón que contiene cuatro litros y medio?

Cuatro litros y medio → $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$$\frac{9}{2} : \frac{3}{20} = \frac{9 \cdot 20}{3 \cdot 2} = \frac{180}{6} = 30$$

Solución: Con cuatro litros y medio se llenan 30 frascos.

Fracción de otra fracción

PROBLEMA 8: CÁLCULO DE LA FRACCIÓN

De un depósito de riego que estaba lleno, se han extraído, por la mañana, 2/3 de su contenido y, por la tarde, 3/5 de lo que quedaba. ¿Qué fracción de depósito queda al final del día?

$$\text{Por la mañana} \begin{cases} \text{Se han extraído } \frac{2}{3}. \\ \text{Queda } \frac{1}{3}. \end{cases}$$

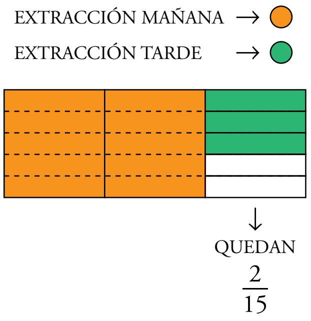
$$\text{Por la tarde} \begin{cases} \text{Se han extraído } \frac{3}{5} \text{ de } \frac{1}{3}. \\ \text{Quedan } \frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}. \end{cases}$$

Solución: Al final del día quedan $\frac{2}{15}$ del depósito.

Recuerda

Para calcular la fracción de otra fracción, se multiplican ambas fracciones:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$



PROBLEMA 9: CÁLCULO DE LA PARTE (PROBLEMA DIRECTO)

De un depósito de riego de 90 000 litros que estaba lleno, se sacan, por la mañana, 2/3 de su contenido y, por la tarde, 3/5 de lo que quedaba. ¿Cuántos litros quedan en el depósito?

	FRACCIÓN EXTRAÍDA	FRACCIÓN RESTANTE
MAÑANA	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
TARDE	$\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Quedan $\frac{2}{15}$ de 90 000 *l*.

$$\frac{2 \cdot 90\,000}{15} = 12\,000\ l$$

Solución: Al final del día quedan 12 000 litros en el depósito.

Actividades

Fracción de una cantidad

1 Roberto ha necesitado 100 pasos para avanzar 80 metros. ¿Qué fracción de metro recorre en cada paso?

2 Se ha volcado una caja que contenía 30 docenas de huevos y se han roto 135. ¿Qué fracción ha quedado?

3 Se ha volcado una caja con 30 docenas de huevos y se han roto tres octavas partes. ¿Cuántos huevos quedan?

Suma y resta de fracciones

4 Una familia dedica dos tercios de sus ingresos a cubrir gastos de funcionamiento, ahorra la cuarta parte del total y gasta el resto en ocio. ¿Qué fracción de los ingresos invierte en ocio?

5 En un congreso internacional, 3/8 de los delegados son americanos; 2/5 son asiáticos; 1/6, africanos, y el resto, europeos. ¿Qué fracción de los delegados ocupan los europeos?

6 Un confitero ha fabricado 20 kilos de caramelos de los que 2/5 son de naranja; 3/10, de limón, y el resto, de fresa. ¿Cuántos kilos de caramelos de fresa ha fabricado?

Producto y división de fracciones

7 Roberto avanza 4 metros en 5 pasos. ¿Qué fracción de metro avanza en cada paso? ¿Y en 100 pasos?

8 ¿Cuántos litros de aceite se necesitan para llenar 300 botellas de tres cuartos de litro?

9 ¿Cuántas botellas de vino de tres cuartos de litro se llenan con un depósito de 1 800 litros?

10 Un bote de suavizante tiene un tapón dosificador con una capacidad de 3/40 de litro. ¿Cuál es la capacidad del bote sabiendo que llena 30 tapones?

11 Un bote de suavizante de dos litros y cuarto proporciona, mediante su tapón dosificador, 30 dosis para lavado automático. ¿Qué fracción de litro contiene cada dosis?

Fracción de otra fracción

12 Un embalse está lleno a principios de verano. En julio pierde 3/7 de su contenido, y en agosto, 3/4 de lo que le quedaba. ¿Qué fracción conserva aún a principios de septiembre?

13 Marta gasta 3/4 de sus ahorros en un viaje, y 2/3 del resto, en ropa. ¿Qué fracción de lo que tenía ahorrado le queda?

14 Marta tenía ahorrados 1 800 euros, pero ha gastado tres cuartas partes en un viaje y dos tercios de lo que le quedaba en reponer su vestuario. ¿Cuánto dinero le queda?

6 Potencias y fracciones

Las propiedades que estudiaste para las potencias de números enteros se conservan con los números fraccionarios. Estas propiedades se traducen en reglas de uso práctico; pero no te limites a memorizarlas, si comprendes su justificación, las usarás con mayor seguridad y eficacia.

Potencia de una fracción

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$$

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}$$

Potencia de un producto de fracciones

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^2 = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{c^2}{d^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^2$$

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Por ejemplo: $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{15}{30}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Potencia de un cociente de fracciones

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^3 = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^3 = \frac{a^3 \cdot d^3}{b^3 \cdot c^3} = \frac{a^3}{b^3} : \frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{c}{d}\right)^3$$

La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Por ejemplo: $\left(\frac{3}{10}\right)^2 : \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{10} : \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{15}{60}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

Producto de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^5}{b^5} = \left(\frac{a}{b}\right)^{5} \leftarrow (5 = 3 + 2)$$

Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

Por ejemplo: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+4} = \left(\frac{2}{5}\right)^7$

Cociente de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^7}{b^7} : \frac{a^4}{b^4} = \frac{a^7 \cdot b^4}{b^7 \cdot a^4} = \frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^{3} \leftarrow (3 = 7 - 4)$$

No lo olvides

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$$

Para dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes.

EJEMPLO

$$\left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^{8-6} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Potencias de exponente cero (a^0)

En principio, la expresión a^0 no tendría sentido; pero a esa combinación de signos le vamos a dar un significado dentro del lenguaje matemático:

- El cociente de dos números iguales es igual a la unidad. → $\frac{5^3}{5^3} = 1$
- Para dividir dos potencias de igual base, restamos los exponentes. → $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5^3}{5^3} = 1 \\ \frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \end{array}\right\} 5^0 = 1$$

Y de la misma forma:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^3 : \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^{3-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \end{array}\right\} \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

No lo olvides

$$a^0 = 1 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

La potencia de exponente cero vale siempre uno (para cualquier base distinta de cero).

Potencia de otra potencia

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^3 = \left[\frac{a^2}{b^2}\right]^3 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^6}{b^6} = \left(\frac{a}{b}\right)^{6} \leftarrow (6 = 2 \cdot 3)$$

No lo olvides

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

EJEMPLO

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^9}$$

Números y potencias de base 10

Ya conoces la descomposición polinómica de un número entero según las sucesivas potencias de base diez.

$$2\,458 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Esto nos proporciona un método para expresar con comodidad números de muchas cifras.

Ejercicios resueltos

Expresar como potencia de base 10 los siguientes números:

a) Un millón de billones.

$$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$$

b) La distancia media de la Tierra al Sol es 149 598 000 km.

$$149\,598\,000 \approx 150\,000\,000 = 150 \cdot 1\,000\,000$$

Distancia media de la Tierra al Sol $\approx 150 \cdot 10^6$ km $= 1{,}5 \cdot 10^8$ km

Reflexiona

$$52\,463\,000\,000\,000 = 52 \cdot 10^{12}$$

¿Cuál de las dos formas te parece más efectiva?

Actividades

1 Calcula.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ d) $\left(\frac{1}{10}\right)^6$

2 Calcula, como en el ejemplo, por el camino más corto.

- $\mathbf{\frac{15^4}{5^4} = \left(\frac{15}{5}\right)^4 = 3^4 = 81}$

a) $\frac{12^3}{4^3}$ b) $\frac{8^5}{4^5}$ c) $\frac{5^4}{10^4}$

d) $5^2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2$ e) $(-4)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ f) $10^2 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^2$

3 Reduce.

a) $\frac{x^6}{x^2}$ b) $\frac{z^4}{z^4}$ d) $\frac{x^7 \cdot x^{10}}{x^{12}}$ d) $\frac{a^3 \cdot a^7}{a^4 \cdot a^5}$

4 Reduce a una sola potencia.

a) $x^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3$ b) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^3$ c) $\left(\frac{z}{m}\right)^4 \cdot \frac{z}{m}$

5 Reduce.

a) $\left(\frac{x}{y}\right)^4 \cdot y^4$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^3$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^4$

d) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 : x^3$ e) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 : \left(\frac{1}{b}\right)^3$ f) $\left(\frac{x}{y}\right)^5 : \frac{y}{x}$

6 Calcula.

a) 2^0 b) 5^0 c) 10^0 d) $(-4)^0$

7 Escribe la descomposición polinómica de:

a) 72,605

b) 658,32

8 Expresa con todas sus cifras.

a) $5 \cdot 10^6$

b) $34 \cdot 10^7$

9 Expresa en forma abreviada que:

Un año luz equivale a 9 460 800 000 000 km.

7 Fracciones y números decimales

Las notaciones fraccionaria y decimal son formas numéricas y, como verás ahora, muchas cantidades se pueden expresar tanto en la una como en la otra.

Paso de fracción a decimal

Ya sabes que una fracción es una división indicada cuyo resultado es un decimal exacto o un decimal periódico.

$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$	$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1{,}\widehat{6}$	$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8\widehat{3}$
DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO PURO	DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

Toda fracción se puede pasar a forma decimal. Para ello, se divide el numerador entre el denominador. Sin embargo, lo contrario no es cierto: solo se pueden pasar a fracción los decimales exactos y los periódicos.

Decimal exacto. Paso a fracción

Un decimal exacto se transforma en fracción quitándole la coma y dividiéndolo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se hayan suprimido.

▼ **EJEMPLOS**

$$0{,}7 = \frac{7}{10}$$

$$1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

$$0{,}875 = \frac{875}{1\,000} = \frac{7}{8}$$

Actividades

1 Expresa en forma decimal.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{2}{9}$ f) $\frac{17}{110}$

2 Expresa en forma de fracción.

a) 0,5 b) 0,8

c) 1,6 d) 0,04

e) 1,35 f) 0,325

3 Tantea, prueba y resuelve:

a) Comprueba con la calculadora.

$$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}11111\ldots$$

$$\frac{2}{9} = 2 : 9 = 0{,}22222\ldots$$

$$\frac{3}{9} = 3 : 9 = 0{,}33333\ldots$$

b) Busca la fracción generatriz de:

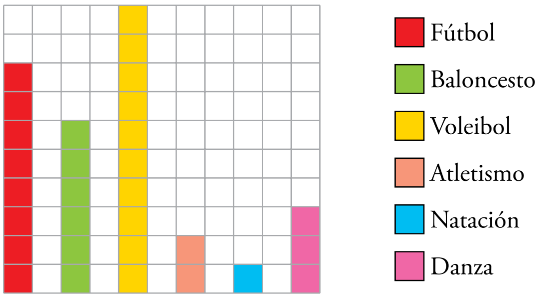
0,44444… 0,55555… 1,55555…

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Aplicación de conceptos

1 ▼▽▽ La gráfica informa sobre los deportes preferidos en una clase de 30 estudiantes de segundo de ESO.



¿Qué fracción de la clase…

a) … practica fútbol?

b) … practica baloncesto?

c) … no practica baloncesto?

d) … no practica ni fútbol, ni baloncesto?

2 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $\frac{2}{3}$ de 60 b) $\frac{1}{10}$ de 90 c) $\frac{3}{4}$ de 120

d) $\frac{2}{7}$ de 35 e) $\frac{5}{9}$ de 18 f) $\frac{3}{5}$ de 100

3 ▼▽▽ ¿Cuántos gramos son?

a) $\frac{3}{4}$ de kilo b) $\frac{3}{5}$ de kilo c) $\frac{7}{20}$ de kilo

4 ▼▽▽ ¿Cuántos minutos son?

a) $\frac{5}{6}$ de hora b) $\frac{3}{12}$ de hora c) $\frac{4}{5}$ de hora

5 ▼▽▽ ¿Qué fracción de hora son?

a) 5 minutos b) 24 minutos c) 360 segundos

Fracciones y decimales

6 ▼▽▽ Expresa en forma decimal.

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{27}{50}$ c) $\frac{13}{125}$

d) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{5}{11}$

7 ▼▼▽ Pasa a forma fraccionaria.

a) 1,1 b) 0,13 c) 0,008

d) $0,\widehat{8}$ e) $1,\widehat{8}$

Equivalencia de fracciones

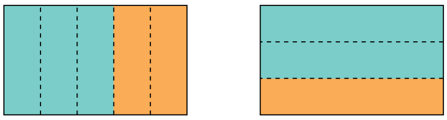
8 ▼▽▽ Escribe:

a) Una fracción equivalente a 4/10 que tenga por numerador 6.

b) Una fracción equivalente a 15/45 que tenga por denominador 12.

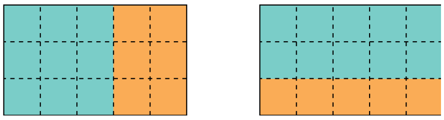
c) Una fracción que sea equivalente a 35/45 y tenga por numerador 91.

9 ▼▽▽ Estos dos trozos de tela son igual de grandes:



¿Cuál de los dos tiene una porción mayor de verde?

Explica la transformación que propone este gráfico para resolver la pregunta:



10 ▼▽▽ Calcula x en cada caso:

a) $\frac{6}{22} = \frac{15}{x}$ b) $\frac{21}{49} = \frac{x}{35}$

c) $\frac{13}{x} = \frac{11}{99}$ d) $\frac{x}{78} = \frac{91}{169}$

11 ▼▽▽ Reduce a común denominador.

a) $1, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$ b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}$

12 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor.

a) $\frac{9}{10}$; 0,6; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{5}$; $1,\widehat{1}$ b) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{6}$

13 ▼▼▽ Continúa en tres términos cada serie.

a) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \ldots$ b) $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \ldots$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Suma y resta de fracciones

14 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $1 - \frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$ c) $1 + \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ f) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

15 ▼▽▽ Calcula y simplifica.

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{2}{15}$

c) $\frac{1}{6} - \frac{5}{9} + \frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{3} - 2 + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}$

16 ▼▼▽ Opera.

a) $2 - \left(1 + \frac{3}{5}\right)$ b) $\left(1 - \frac{3}{4}\right) - \left(2 - \frac{5}{4}\right)$

Multiplicación y división de fracciones

17 ▼▽▽ Calcula y simplifica.

a) $\frac{3}{7} \cdot 14$ b) $\frac{2}{5} : 4$ c) $\frac{7}{2} \cdot \frac{4}{(-7)}$

d) $\frac{3}{11} : \frac{(-5)}{11}$ e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{20}$ f) $\frac{4}{15} : \frac{2}{5}$

Operaciones combinadas

18 ▼▼▽ Opera y reduce.

a) $\left(1 - \frac{5}{7}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{5}\right)$ b) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) : \left(1 + \frac{1}{8}\right)$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right)$ d) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)$

Potencias y fracciones

19 ▼▼▽ Reduce a una potencia única.

a) $a^5 \cdot a^2$ b) $a \cdot a^2 \cdot a^3$

c) $x^5 \cdot x^{-3}$

20 ▼▼▽ Simplifica.

a) $x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$ b) $x^3 : \left(\frac{1}{x}\right)^5$ c) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \cdot b^4$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3 : a^3$ e) $(a^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^7$ f) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^3}\right)^3$

21 ▼▽▽ Escribe con todas sus cifras estas cantidades:

a) $37 \cdot 10^7$ b) $64 \cdot 10^{11}$ c) $3,5 \cdot 10^{13}$

22 ▼▽▽ Expresa en forma abreviada como se ha hecho en el ejemplo.

- **$5\,300\,000\,000 = 53 \cdot 10^8$**

a) 8 400 000

b) 61 000 000 000

Interpreta, describe, exprésate

23 ▼▼▽ Aquí tienes la resolución que han presentado David y Olga al siguiente problema:

Una empresa de coches usados recibe un lote de 180 vehículos. El primer mes vende las tres cuartas partes. El siguiente mes coloca la quinta parte del lote. ¿Cuántos coches le quedan aún por vender?

Solución de David

- 3/4 de 180 = (180 : 4) · 3 = 135
- 1/5 de 180 = 180 : 5 = 36
- 135 + 36 = 171
- 180 – 171 = 9

Solución de Olga

- $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15 + 4}{20} = \frac{19}{20}$
- $\frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$
- 1/20 de 180 = 180 : 20 = 9

Ambos se han limitado a realizar las operaciones sin explicar el proceso. Hazlo tú, indicando el significado de cada operación y el resultado obtenido en cada caso.

Resuelve problemas

24 ▼▽▽ Un barco lleva recorridas las tres décimas partes de un viaje de 1 700 millas. ¿Cuántas millas le faltan todavía por recorrer?

25 ▼▽▽ Por tres cuartos de kilo de cerezas hemos pagado 1,80 €. ¿A cómo está el kilo?

26 ▼▼▽ Durante un apagón de luz, se consumen tres décimas partes de una vela de cera. Si el cabo restante mide 21 cm, ¿cuál era la longitud total de la vela?

27 ▼▽▽ La tercera parte de los 240 viajeros que ocupan un avión son europeos, y 2/5, africanos. El resto son americanos.

¿Cuántos americanos viajan en el avión?

28 ▼▽▽ Bernardo tiene 1 500 € en su cuenta y gasta 2/5 en una cadena musical y la cuarta parte de lo que le queda en una colección de discos.

¿Qué fracción le queda del dinero que tenía? ¿Cuánto le queda?

29 ▼▽▽ Un granjero tiene a finales de mayo unas reservas de 2 800 kg de pienso para alimentar a su ganado. En junio gasta 3/7 de sus existencias, y en julio, 3/4 de lo que le quedaba.

¿Cuántos kilos de pienso tiene a primeros de agosto?

30 ▼▼▽ Un frasco de perfume tiene una capacidad de 1/20 de litro. ¿Cuántos frascos se pueden llenar con un bidón que contiene tres litros y medio?

31 ▼▽▽ Una empresa comercializa jabón líquido en envases de plástico con una capacidad de 3/5 de litro.

¿Cuántos litros de jabón se necesitan para llenar 100 envases?

32 ▼▽▽ La abuela ha hecho dos kilos y cuarto de mermelada y con ella ha llenado seis tarros iguales.

¿Qué fracción de kilo contiene cada tarro?

33 ▼▼▽ Dos problemas similares.

a) De un tambor de detergente de 5 kg se han consumido 3 kg. ¿Qué fracción queda del contenido original?

b) De un tambor de detergente de 5 kg se han consumidos dos kilos y tres cuartos. ¿Qué fracción queda del contenido original?

Problemas "+"

34 ▼▼▽ María recoge en su huerta una cesta de manzanas. De vuelta a casa, se encuentra a su amiga Sara y le da la mitad de la cesta más media manzana. Después, pasa a visitar a su tía Rosa y le da la mitad de las manzanas que le quedaban más media manzana. Por último, se encuentra con su amigo Francisco y vuelve a hacer lo mismo: le da la mitad más media.

Entonces se da cuenta de que tiene que volver a la huerta porque se ha quedado sin nada.

¿Cuántas manzanas cogió, teniendo en cuenta que en ningún momento partió ninguna?

☞ *Recorre el problema al revés.*

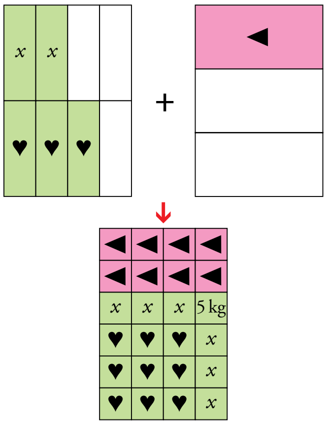
	HABÍA		SE LLEVA		QUEDA
SARA		→		→	
ROSA	?	→	?	→	1
FRANCISCO		→	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	→	0
	1		1		

35 ▼▼▼ En el baile, tres cuartas partes de los hombres están bailando con tres quintas partes de las mujeres. ¿Qué fracción de los asistentes no está bailando?

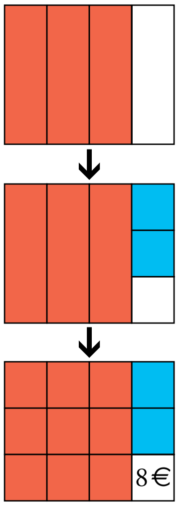
Ejercicios y problemas

36 ▼▼▼ Inventa un problema para cada uno de estos gráficos.

a)



b)



Autoevaluación

¿Conoces y aplicas los conceptos de fracción?

1 Expresa en forma decimal.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{3}$ c) $\frac{5}{4}$

2 Calcula.

a) $\frac{3}{5}$ de 45 b) $\frac{5}{2}$ de 20

¿Conoces y aplicas el concepto de equivalencia de fracciones?

3 Simplifica.

a) $\frac{50}{75}$ b) $\frac{27}{45}$ c) $\frac{210}{180}$

4 Reduce a común denominador las fracciones $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$ y $\frac{11}{18}$.

¿Conoces y aplicas algoritmos para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones?

5 Calcula.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$ b) $\frac{5}{9}-\frac{7}{12}+\frac{11}{18}$

6 Calcula.

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3}\cdot 6$ d) $\frac{2}{3}:4$

¿Resuelves expresiones con números fraccionarios y operaciones combinadas?

7 Calcula.

a) $\frac{11}{12}-\left[1-\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\right]$ b) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2-\frac{2}{5}\right)$

¿Conoces y aplicas las propiedades de las potencias con números fraccionarios?

8 Calcula.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 6^3$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^2:\left(\frac{3}{5}\right)^3$

¿Diferencias los distintos tipos de problemas con números fraccionarios y los resuelves?

9 Un quiosco recibe de madrugada 225 revistas. Vende por la mañana 1/3 del total, y, por la tarde, 2/5 también del total. ¿Cuántas revistas le quedan al finalizar la jornada?

10 Un señor sale casa con 60 €. Gasta en un vestido 1/3 de su dinero, y, en el mercado, 2/5 de lo que le quedaba.

a) ¿Qué fracción de dinero le queda?

b) ¿Cuánto dinero le queda?

4 Proporcionalidad y porcentajes

El concepto de proporcionalidad nace a la vez que la actividad humana y aparece en los vestigios de todas las culturas, asociado inicialmente a problemas y a situaciones prácticas:

— Una oveja por cinco gallinas; dos ovejas por diez gallinas; …

— Tres cántaros llenan dos odres; seis cantaros llenan cuatro…

En la antigua Grecia, los matemáticos reflexionaron sobre la proporcionalidad analizando sus leyes y relaciones. Es decir, empezaron a formalizar y a construir un cuerpo teórico, independiente de situaciones concretas.

Bastante más tarde, en el Renacimiento, el desarrollo del comercio, y por consiguiente de los bancos, amplía sus demandas en el terreno del cálculo y la contabilidad. Esas necesidades dan un nuevo impulso a la proporcionalidad, concretándose en el avance de la matemática comercial. Porcentajes, descuentos, deudas, plazos…

— Si te presto 100 doblones durante un mes, te cobro 106; si me pides doscientos durante un año, te cobro…

En la actualidad, la proporcionalidad resulta imprescindible en el desarrollo de cualquier ciencia aplicada, y tú la encontrarás al estudiar física, química, biología, estadística, etc. Y sobre todo, si te fijas, verás que la utilizas, junto al cálculo mental, en multitud de situaciones cotidianas: comprar, distribuir, predecir, especular, hacer recuentos, …

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se generan fracciones equivalentes a una dada.
- Cómo se calcula la fracción de una cantidad.
- Cómo se calcula el valor decimal de una fracción.
- Hay magnitudes que no guardan relación de proporcionalidad.

1 Razones y proporciones

Ahora, vas a aprender algunos términos nuevos que pertenecen al lenguaje de las matemáticas, pero que te servirán también para enriquecer tu lenguaje cotidiano.

La **razón** de los números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$ (o su irreducible).

▼ **EJEMPLOS**

- La razón de los números 3 y 4 es $\frac{3}{4}$.
- La razón de los pesos de Rita y Manuel es $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{\text{PESO DE RITA}}{\text{PESO DE MANUEL}} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Una **proporción** es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Una proporción se lee así: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a$ es a b como c es a d.

Cálculo del término desconocido de una proporción

Una proporción está formada por una pareja de fracciones equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \qquad \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \leftrightarrow \underbrace{75 \cdot 4}_{300} = \underbrace{100 \cdot 3}_{300}$$

Esto nos permite calcular el término desconocido de una proporción:

$$\frac{4}{x} = \frac{10}{15} \rightarrow 60 = x \cdot 10 \rightarrow x = \frac{60}{10} = 6$$

Para calcular el término desconocido en una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se aplica esta propiedad de las fracciones equivalentes:

El producto de los extremos, *a* y *d*, es igual al de los medios, *b* y *c*.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow a \cdot x = b \cdot c \rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Para automatizar el cálculo

🔵/🔴 = 🔴/x ⟶ x = (🔴 · 🔴)/🔵

🔴/⚫ = x/🔴 ⟶ x = (🔴 · 🔴)/⚫

🔴/x = 🟡/🔴 ⟶ x = (🔴 · 🔴)/🟡

x/🔴 = 🔴/🟢 ⟶ x = (🔴 · 🔴)/🟢

Actividades

1 Elige la respuesta correcta en cada caso:

a) La razón de 5 y 15 es: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

b) La razón de 24 y 36 es: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}$

2 Escribe tres parejas de números cuya razón sea $\frac{2}{5}$.

3 Calcula el término desconocido en cada proporción:

a) $\frac{1}{3} = \frac{5}{x}$ b) $\frac{6}{9} = \frac{10}{x}$ c) $\frac{x}{3} = \frac{35}{7}$

d) $\frac{15}{6} = \frac{x}{13}$ e) $\frac{14}{x} = \frac{21}{33}$ f) $\frac{91}{42} = \frac{x}{9}$

4 La razón de las edades de Rita y Manuel es 9/10. Si Rita tiene 18 años, ¿cuántos tiene Manuel?

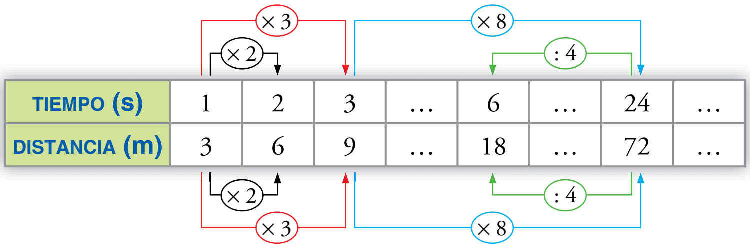
2 Magnitudes directamente proporcionales

En las magnitudes directamente proporcionales, multiplicando (dividiendo) por el mismo número dos valores correspondientes se obtiene otro par de valores correspondientes.

MAGNITUD A	*a*	2 · *a*	3 · *a*	…	*ka*
MAGNITUD B	*b*	2 · *b*	3 · *b*	…	*kb*

EJEMPLO

Un corredor avanza a 3 m/s. La distancia recorrida según pasa el tiempo es:



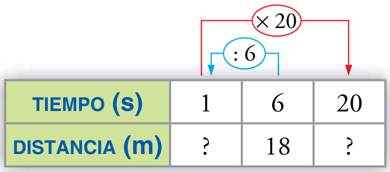
TIEMPO (s)	1	2	3	…	6	…	24	…
DISTANCIA (m)	3	6	9	…	18	…	72	…

Resolución de problemas: reducción a la unidad

La propiedad anterior permite completar cualquier par de valores de la tabla a partir de un par conocido. Atiende al método utilizado en el ejemplo (reducción a la unidad).

EJEMPLO

Un corredor de medio fondo ha avanzado 18 metros en 6 segundos. Si va a velocidad constante, ¿qué distancia recorrerá en 20 segundos?

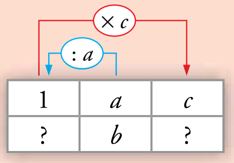


TIEMPO (s)	1	6	20
DISTANCIA (m)	?	18	?

TIEMPO (s)		DISTANCIA (m)
6 s	→	18 m
1 s	→	18 : 6 = 3 m
20 s	→	3 · 20 = 60 m

Método de reducción a la unidad

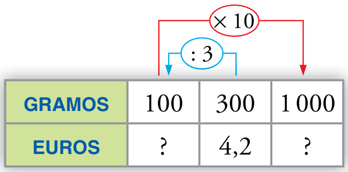
- Consiste en calcular, primero, el valor asociado a la unidad en la tabla de valores correspondientes.
- Conociendo ese dato, no hay dificultad en completar cualquier otro par de valores correspondientes.



1	*a*	*c*
?	*b*	?

Ejemplo

¿A cómo sale el kilo?



GRAMOS	100	300	1 000
EUROS	?	4,2	?

GRAMOS		EUROS
300 g	→	4,2 €
100 g	→	4,2 : 3 = 1,4 €
1 kg = 1 000 g	→	1,4 · 10 = 14 €

Un kilo de queso cuesta 14 €.

Actividades

1 Resuelve mentalmente.

a) Un grifo arroja 12 litros de agua en 3 minutos. ¿Cuántos litros arroja en 5 minutos?

b) Tres cajas de chinchetas pesan 150 gramos. ¿Cuánto pesan 10 cajas?

2 ¿Cuánto pagaré por 300 gramos de un salmón ahumado que se vende a 16 € el kilo?

3 Por dejar el coche en un aparcamiento durante 4 horas, ayer pagué 5 €. ¿Cuánto pagaré hoy por 7 horas?

Otras relaciones en las tablas de proporcionalidad directa

En una tabla de proporcionalidad directa, con dos pares cualesquiera de valores correspondientes se construyen dos fracciones equivalentes; es decir, una proporción.

▼ EJEMPLO

Una fuente arroja 1,5 litros de agua por minuto:

MINUTOS	1	2	3	4	5	…
LITROS	1,5	3	4,5	6	7,5	…

Elegimos dos pares cualesquiera:

MINUTOS	…	3	…	5
LITROS	…	4,5	…	7,5

$$\rightarrow \frac{3}{4,5} = \frac{5}{7,5} \leftrightarrow \underbrace{3 \cdot 7,5}_{22,5} = \underbrace{5 \cdot 4,5}_{22,5}$$

La proporción anterior también se puede escribir así: $\frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5}$

Comprueba que ocurre lo mismo para cualquier par de columnas de la tabla.

En una tabla de proporcionalidad directa, dos pares de valores correspondientes forman una proporción.

Resolución de problemas: regla de tres

Basándonos en lo anterior y en el cálculo del término desconocido de una proporción, obtenemos un método cómodo para resolver problemas de proporcionalidad: *la regla de tres*.

▼ EJEMPLO

Una fuente ha llenado un bidón de 6 litros en 4 minutos. ¿Cuántos litros de agua arrojará en 10 minutos?

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{LITROS}} & & \underline{\text{MINUTOS}} \\ 6 & \longrightarrow & 4 \\ x & \longrightarrow & 10 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}6\\x\end{array}}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \underline{\text{PROPORCIÓN}} \\ \frac{6}{x} = \frac{4}{10} \end{array} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 10}{4} = 15$$

Solución: En 10 minutos arroja 15 litros.

Regla de tres

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{MAGNITUD A}} & & \underline{\text{MAGNITUD B}} \\ a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & d \end{array}$$

- Se ordenan los datos y la incógnita.
- Se construye la proporción con los términos en el orden en que aparecen. $\rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
- Se calcula el término desconocido de la proporción. $\rightarrow x = \frac{\bullet \cdot \bullet}{\bullet}$

Problemas resueltos

1. Un avión, que vuela a velocidad constante, ha recorrido 91 millas en 35 minutos. Si sigue a la misma velocidad, ¿qué distancia recorrerá en los próximos 20 minutos?

TIEMPO (min)		DISTANCIA (millas)
35	⟶	91
20	⟶	x

La proporción es:

$$\frac{35}{20} = \frac{91}{x} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 91}{35} = 52$$

Solución: En 20 minutos recorrerá 52 millas.

2. Un avión, que viaja a la velocidad constante, ha tardado 35 minutos en recorrer 91 millas. Si sigue a la misma velocidad, ¿cuanto tiempo tardará en recorrer las 52 millas que le faltan para llegar a su destino?

DISTANCIA (millas)		TIEMPO (min)
91	⟶	35
52	⟶	x

La proporción es:

$$\frac{91}{52} = \frac{35}{x} \rightarrow x = \frac{35 \cdot 52}{91} = 20$$

Solución: Tardará 20 minutos en recorrer las 52 millas que le faltan.

Actividades

4 Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora.

¿Cuánto tardará en llenar 1 000 botellas?

5 En un taller de confección se han necesitado siete metros y medio de tela para confeccionar 6 camisas.

¿Cuántos metros de tela se necesitarán para cubrir un pedido de ochenta camisas?

6 Un granjero ha gastado 260 € en 325 dosis de vacuna para su ganado.

¿Cuánto debe gastar aún si necesita adquirir 180 dosis más?

7 En un colegio que tiene 480 alumnos, tres de cada diez han tenido gripe.

¿Cuántos alumnos han padecido esa enfermedad?

8 De la vendimia de las 10 primeras parras de una viña se han obtenido 125 kilos de uva.

¿Qué cosecha cabe esperar de toda la viña, que tiene 362 parras?

9 ¿Cuánto costará un trozo de queso de 465 gramos si el queso se vende a 13,5 euros el kilo?

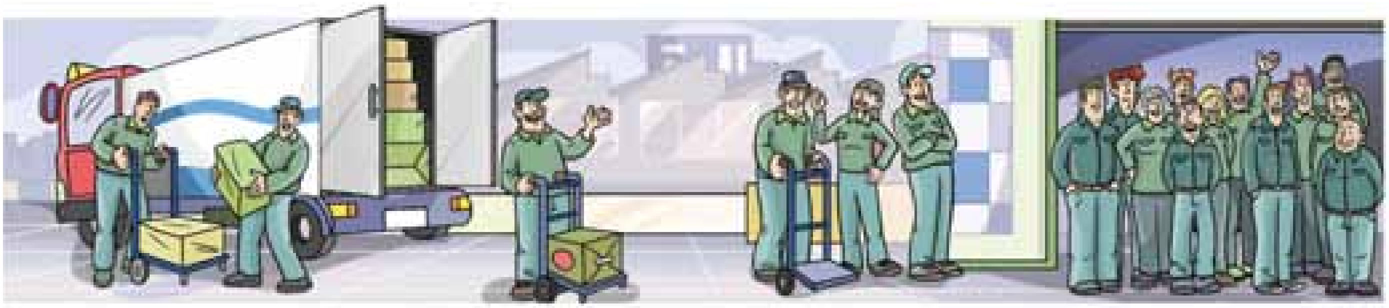
(Redondea el resultado a los céntimos).

3 Magnitudes inversamente proporcionales

Recuerda que en las magnitudes inversamente proporcionales, si se aumenta un valor de una de ellas al doble, al triple, etc., el correspondiente valor de la otra disminuye a la mitad, a la tercera parte, etc.

▼ **EJEMPLO**

Dos trabajadores descargan un camión en seis horas. Veamos cómo varía el tiempo de descarga al variar el número de trabajadores.



Nosotros dos tardamos 6 h. Yo, solo, 6 · 2 = 12 h Entre los tres, 12 : 3 = 4 h Los 12 tardamos 1 hora.

× 3 : 2 × 4

N.º DE TRABAJADORES	1	2	3	4	6	12
TIEMPO DE DESCARGA (h)	12	6	4	3	2	1

× 2 : 3 : 4

En las magnitudes inversamente proporcionales, si se multiplica (o divide) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por dicho número.

MAGNITUD A	a	$a \cdot 3$	$a : 5$
MAGNITUD B	b	$b : 3$	$b \cdot 5$

Resolución de problemas: reducción a la unidad

Aplicaremos el método que ya conocemos (buscar el valor asociado a la unidad), teniendo en cuenta lo que hemos visto más arriba.

▼ **EJEMPLO**

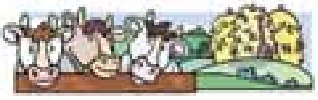
Un granjero tiene alfalfa en el almacén para alimentar a sus 3 vacas durante 10 días. ¿Cuánto le duraría el forraje si tuviera 5 vacas?

× 5 : 3

N.º DE VACAS	1	3	5
DÍAS	?	10	?

× 3 : 5

N.º DE VACAS		DURACIÓN ALIMENTO
3	⟶	10 días
1	⟶	10 · 3 = 30 días
5	⟶	30 : 5 = 6 días



Tenemos alimento para 10 días.

Para mí sola, duraría el triple:

10 · 3 = 30 días

A las cinco nos duraría menos:

30 : 5 = 6 días

Proporciones en las tablas de proporcionalidad inversa

Volviendo al ejemplo de la página anterior, observa que el producto de dos valores correspondientes es siempre el mismo:

1	2	3	4	…
12	6	4	3	…

$$\rightarrow \; 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = \dots$$

Esto nos permite construir proporciones a partir de dos pares de valores, pero ordenando los elementos de distinta forma que en la proporcionalidad directa.

TRABAJADORES	2	3
HORAS	6	4

$$\rightarrow \; 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \; \rightarrow \; \frac{2}{4} = \frac{3}{6}, \text{ o bien } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Resolución de problemas: regla de tres inversa

Aplicaremos la regla de tres, pero para construir la proporción invertiremos la razón de los valores en una de las magnitudes.

Ten en cuenta

$$\begin{array}{ccc} \text{MAGNITUD A} & & \text{MAGNITUD B} \\ a & \longrightarrow & b \\ c & \longrightarrow & x \end{array}$$

$$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{x}{b}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{c}{a} = \frac{b}{x}}$$

Se invierte el orden en los elementos de una de las magnitudes.

▼ **EJEMPLO**

Un ciclista, a 20 km/h, tarda 30 minutos en ir de un pueblo a la aldea vecina. ¿Cuánto tardará un motorista, a 50 km/h?

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{VELOCIDAD} & & \text{TIEMPO (min)} \\ 20 & \longrightarrow & 30 \\ 50 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \; \begin{array}{c}\text{PROPORCIÓN} \\ \dfrac{20}{50} = \dfrac{x}{30}, \text{ o bien } \dfrac{50}{20} = \dfrac{30}{x}\end{array}$$

Solución: $x = \dfrac{20 \cdot 30}{50} = 12$ minutos

Actividades

1 Completa en tu cuaderno estas tablas:

MAGNITUD A	1	2	3	4			10
MAGNITUD B	30	15			6	5	

MAGNITUD H	1	2	3	4	6	8	
MAGNITUD N			16	12			4

2 Construye tres proporciones diferentes con los valores de esta tabla de proporcionalidad inversa:

MAGNITUD A	1	2	4	5
MAGNITUD B	40	20	10	8

3 Un coche, a 80 km/h, tarda 2 h en llegar a Barcelona. ¿Cuánto tardaría un camión, a 40 km/h? ¿Y un bólido, a 160 km/h?

4 Tres operarios limpian un parque en 7 horas. ¿Cuánto tardarían en hacer el mismo trabajo 7 operarios?

5 Un conducto de agua, con un caudal de 3 litros por segundo, tarda 20 minutos en llenar un depósito.

a) ¿Cuánto tardaría con un caudal de 2 litros por segundo?

b) ¿Y si fuera de 10 litros por segundo?

6 Un tractor ara un campo en 15 horas.

a) ¿Cuánto tardarían dos tractores?

b) ¿Y tres tractores?

c) ¿Y cuatro tractores?

7 Cuatro trabajadores descargan un camión en 3 horas.

a) ¿Cuánto tardarían 8 trabajadores?

b) ¿Y 5 trabajadores?

4 Los porcentajes

Un porcentaje se puede contemplar como una *proporción*, como una *fracción* o como un *número decimal*.

Un porcentaje indica una proporción

Con la frase *El 30% de los jóvenes chatea a través de internet*, estamos diciendo que de cada 100 jóvenes chatean 30.

TOTAL	100	200	300	50	250	…
PARTE (30%)	30	60	90	15	?	…

Vemos que se trata de una tabla de proporcionalidad directa, lo que nos permite tratar una situación de porcentaje como una situación de proporcionalidad.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\text{TOTAL}} & & \underline{\text{PARTE (30\%)}} \\ 100 & \longrightarrow & 30 \\ 250 & \longrightarrow & x \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \frac{100}{250} = \frac{30}{x} \rightarrow x = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

$$30\% \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75 \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{En un grupo de 250 jóvenes, hay 65 que}\\ \text{chatean en internet.}\end{array}\right.$$

Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad, se multiplica la cantidad por el tanto y se divide entre 100. $\Bigg\}$ $a\% \text{ de } C = \dfrac{C \cdot a}{100}$

Un porcentaje es una fracción

Tomar el 30% de una cantidad es dividir la cantidad en 100 partes y tomar 30; es decir, tomar la fracción $\dfrac{30}{100}$.

$$30\% \text{ de } 250 = \frac{30}{100} \text{ de } 250 = \frac{250 \cdot 30}{100} = 75$$

Un porcentaje se puede calcular como la fracción de una cantidad. $\Big\}$ $a\% \text{ de } C = \dfrac{a}{100} \text{ de } C = \dfrac{C \cdot a}{100}$

Un porcentaje se asocia a un número decimal

Un porcentaje se puede expresar en forma de fracción y, a su vez, la fracción en forma de número decimal, lo que nos proporciona una forma rápida para el cálculo de porcentajes.

$$30\% \rightarrow \frac{30}{100} \rightarrow 30 : 100 \rightarrow 0{,}30 \qquad 30\% \text{ de } 250 = 250 \cdot 0{,}30 = 75$$

Para calcular un porcentaje, se multiplica el total por el tanto por ciento expresado en forma decimal.

Ejemplo

$12\% \rightarrow \dfrac{12}{100} = 0{,}12$

$12\% \text{ de } 80 = 80 \cdot 0{,}12 = 9{,}6$

Cálculo rápido de algunos porcentajes

Algunos porcentajes equivalen a fracciones muy sencillas, lo que facilita el cálculo. Ten en cuenta las que vas a ver a continuación; sobre todo, para el cálculo mental.

- **El 50% es la mitad.**

$$50\% \rightarrow \frac{50}{100} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \text{Para calcular el 50\%, se divide entre 2.}$$

Por ejemplo: 50% de 47 = $\frac{1}{2}$ de 47 = 47 : 2 = 23,5

- **El 25% es la cuarta parte.**

$$25\% \rightarrow \frac{25}{100} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \text{Para calcular el 25\%, se divide entre 4.}$$

Por ejemplo: 25% de 88 = $\frac{1}{4}$ de 88 = 88 : 4 = 22

- **El 20% es la quinta parte.**

$$20\% \rightarrow \frac{20}{100} \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \text{Para calcular el 20\%, se divide entre 5.}$$

Puedes razonar de la misma forma estrategias para calcular porcentajes habituales: el 10%, el 5%, el 75%, etc.

Ten en cuenta

50% → $\frac{1}{2}$

25% → $\frac{1}{4}$

75% → $\frac{3}{4}$

20% → $\frac{1}{5}$

10% → $\frac{1}{10}$

5% → $\frac{1}{20}$

Actividades

1 Calcula mentalmente.

a) 20% de 200 b) 15% de 200 c) 10% de 200

d) 8% de 200 e) 60% de 50 f) 30% de 50

g) 12% de 50 h) 8% de 50 i) 2% de 50

2 Calcula mentalmente.

a) 50% de 46 b) 50% de 120 c) 25% de 40

d) 75% de 40 e) 25% de 24 f) 75% de 24

g) 10% de 460 h) 5% de 460 i) 10% de 70

3 Calcula.

a) 12% de 750 b) 35% de 240 c) 85% de 360

d) 14% de 650 e) 2,5% de 20 f) 95% de 20

g) 150% de 40 h) 115% de 200 i) 200% de 10

4 Copia y completa en tu cuaderno, asociando cada porcentaje con un número decimal:

PORCENTAJE	35%	24%		8%		95%	120%	
EXPRESIÓN DECIMAL	0,35		0,52		0,03			1,50

5 El 62% de los cargos directivos de una empresa metalúrgica son varones. ¿Qué porcentaje son mujeres?

6 Unos grandes almacenes anuncian rebajas del 15%. Al comprar un producto rebajado, ¿qué porcentaje se paga?

7 Una biblioteca pública adquiere 260 nuevos libros de los que el 25% son novelas. ¿Cuántas novelas se han adquirido?

8 En una aldea de 875 habitantes solo queda un 12% de jóvenes. ¿Cuántos jóvenes viven en la aldea?

9 En clase somos treinta, y el 90% hemos aprobado el examen de Matemáticas. ¿Cuántos hemos aprobado?

10 En un país de quince millones de habitantes, el 8% son inmigrantes extranjeros. ¿Cuántos inmigrantes alberga?

11 Un avión transporta 425 viajeros. El 52% son europeos; el 28%, americanos; el 12%, africanos, y el resto, asiáticos. ¿Cuál es el porcentaje de asiáticos? ¿Cuántos asiáticos viajan en el avión?

Problemas con porcentajes

Cualquier situación de porcentaje maneja básicamente tres elementos: un *total*, un *tanto por ciento* y una *parte* del total. Veámoslo con un ejemplo.

EJEMPLO

De una autopista en construcción que tendrá una longitud total de 180 km, ya se ha construido el 35%. ¿Cuántos kilómetros hay ya construidos?

$$35\% \text{ de } 180 = \frac{180 \cdot 35}{100} = 180 \cdot 0{,}35 = 63 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{TOTAL} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 180 \text{ km} \\ \text{TANTO POR CIENTO} \ldots\ldots & 35\% \\ \text{PARTE} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 63 \text{ km} \end{array} \right.$$

Solución: Ya se han construido 63 km.

Veamos, ahora, otros problemas en los que se pide calcular el total o el tanto por ciento.

Ten en cuenta

$$a\% \text{ de } C = P$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \text{TOTAL} & & \text{PARTE} \\ 100 & \longrightarrow & a \\ C & \longrightarrow & P \end{array}$$

$$\Downarrow$$

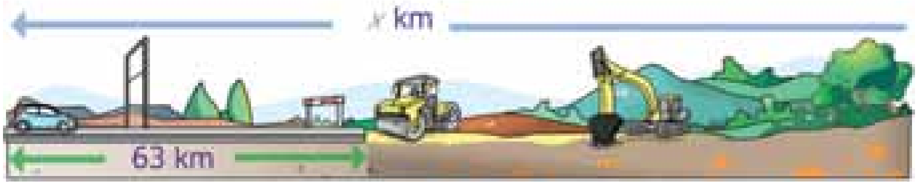
$$P = \frac{a \cdot C}{100}$$

$$C = \frac{P \cdot 100}{a}$$

$$a = \frac{P \cdot 100}{C}$$

Cálculo del total, conocidos el tanto por ciento y la parte

De la nueva autopista en construcción, ya se han completado 63 km, lo que supone un 35% del total proyectado. ¿Cuál será la longitud de la carretera, una vez finalizada?



$$\left. \begin{array}{ccc} \text{TOTAL} & & \text{PARTE} \\ 100 & \longrightarrow & 35 \\ x & \longrightarrow & 63 \end{array} \right\} \quad \frac{100}{x} = \frac{35}{63} \to x = \frac{63 \cdot 100}{35} = 180$$

Solución: La autopista tendrá una longitud total de 180 km.

Cálculo del tanto por ciento, conocidos el total y la parte

De los 180 km proyectados para una autopista, ya se han completado 63 km. ¿Qué porcentaje está ya construido?

$$\left. \begin{array}{ccc} \text{TOTAL} & & \text{PARTE} \\ 180 & \longrightarrow & 63 \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array} \right\} \quad \frac{180}{100} = \frac{63}{x} \to x = \frac{100 \cdot 63}{180} = 35$$

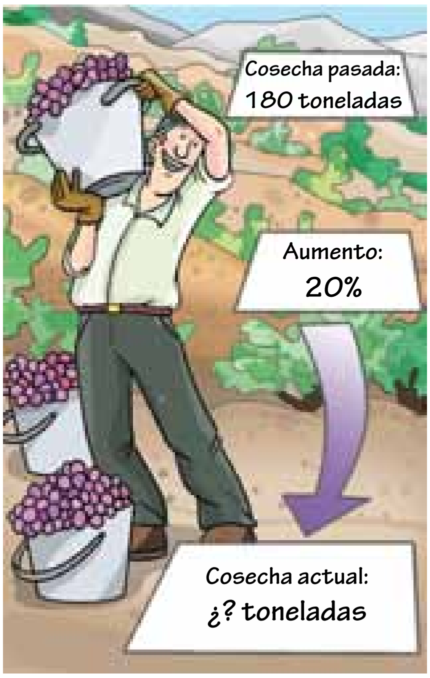
De cada 100 km, se han construido 35; es decir, el 35%.

Solución: Se ha construido ya el 35% de la autopista.

Aumentos porcentuales

Este tipo de problemas aparecen frecuentemente en nuestra realidad cotidiana.

Un viticultor recogió en la campaña pasada 180 toneladas de uva, pero este año espera un 20% más. ¿Cuántas toneladas espera cosechar este año?



- **Primera forma**

$$\boxed{\text{COSECHA ACTUAL}} = \boxed{\text{180 TONELADAS}} + \overset{\text{20\% de 180}}{\boxed{\text{AUMENTO}}}$$

$$\text{AUMENTO} \longrightarrow \text{20\% de } 180 = \frac{180 \cdot 20}{100} = 36 \text{ toneladas}$$

$$\text{COSECHA ACTUAL} \longrightarrow 180 + 36 = 216 \text{ toneladas}$$

Solución: Este año espera recoger 216 toneladas de uva.

- **Segunda forma**

Un aumento del 20% significa que 100 t se convierten en 120 t.

$$\begin{array}{ccc} \text{COSECHA PASADA} & & \text{COSECHA ACTUAL} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 100 & \longrightarrow & 120 \\ 180 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{180} = \frac{120}{x} \rightarrow x = \frac{180 \cdot 120}{100} = 216 \text{ t}$$

- **Forma rápida**

Observa que, en realidad, en el punto anterior hemos calculado el 120% de 180 toneladas, por lo que podíamos haber resuelto el problema así:

$$\text{COSECHA ACTUAL} \longrightarrow \text{120\% de } 180 = 180 \cdot 1{,}20 = 216 \text{ toneladas}$$

Aumentar una cantidad en un a% equivale a calcular el $(100 + a)$% de dicha cantidad.

Ten en cuenta

$$\text{120\% de } x = 216$$
$$\Downarrow$$
$$x \cdot 1{,}20 = 216$$
$$\Downarrow$$
$$x = 216 : 1{,}20 = 180$$

Problema resuelto

1. Una población costera tiene 35 000 habitantes en invierno, pero en verano, con el turismo, aumenta en un 40%. ¿Cuántos residentes tiene durante el verano?

Primera forma

$$\text{AUMENTO: 40\% de } 35\,000 = \frac{35\,000 \cdot 40}{100} = 14\,000$$

$$\text{HABITANTES EN VERANO: } 35\,000 + 14\,000 = 49\,000$$

Segunda forma

$$\begin{array}{ccc} \text{POBLACIÓN VERANO} & & \text{POBLACIÓN INVIERNO} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 100 & \longrightarrow & 140 \\ 35\,000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \frac{100}{35\,000} = \frac{140}{x} \rightarrow x = \frac{35\,000 \cdot 140}{100} = 49\,000$$

Solución: En verano albergará a 49 000 residentes.

Forma rápida

La población en verano es el 140% de la población en invierno.

Población en verano: 140% de 35 000 = 35 000 · 1,40 = 49 000 habitantes.

Disminuciones porcentuales

¿Cómo varía una cantidad cuando se reduce en un determinado porcentaje?

¿Cuál es el coste final de una bicicleta de 620 € que está rebajada un 15%?

- **Primera forma**

$$\boxed{\text{PRECIO FINAL}} = \boxed{620\ €} - \overset{15\%\ \text{de}\ 620}{\boxed{\text{REBAJA}}}$$

$$\text{REBAJA} \rightarrow 15\%\ \text{de}\ 620 = \frac{620 \cdot 15}{100} = 93\ €$$

$$\text{PRECIO FINAL} \rightarrow 620 - 93 = 527\ €$$

Solución: La bicicleta, rebajada, cuesta 527 €.

- **Segunda forma**

Una rebaja del 15% significa que de cada 100 € pagamos 85 €.

PRECIO INICIAL		PRECIO REBAJADO
100	⟶	85
620	⟶	x

$$\frac{100}{620} = \frac{85}{x} \rightarrow x = \frac{620 \cdot 85}{100} = 527\ €$$

- **Forma rápida**

Observa que, en realidad, el precio rebajado es el 85% de 620 €, por lo que podemos resolver el problema así:

$$\text{PRECIO FINAL} \rightarrow 85\%\ \text{de}\ 620 = 620 \cdot 0{,}85 = 527\ €$$

Disminuir una cantidad en un $a\%$ equivale a calcular el $(100 - a)\%$ de dicha cantidad.

Ten en cuenta

85% de $x = 527$

⇓

$x \cdot 0{,}85 = 527$

⇓

$x = 527 : 0{,}85 = 620$

Problema resuelto

1. **Un teatro ha vendido 4 600 entradas en la semana del estrno de una nueva obra. El gerente estima que en la segunda semana la venta descenderá en un 20%. ¿Cuántas entradas espera vender en la segunda semana?**

Primera forma

$$\text{DISMINUCIÓN: } 20\%\ \text{de}\ 4\,600 = \frac{4\,600 \cdot 20}{100} = 920$$

VENTAS ESPERADAS EN LA SEGUNDA SEMANA: $4\,600 - 920 = 3\,680$

Solución: En la segunda semana se esperan unas ventas de 3 680 entradas.

Segunda forma

VENTAS 1^a SEMANA		VENTAS 2^a SEMANA
100	⟶	80
4 600	⟶	x

$$\frac{100}{4\,600} = \frac{80}{x} \rightarrow x = \frac{4\,600 \cdot 80}{100} = 3\,680$$

Solución: En la segunda semana se esperan unas ventas de 3 680 entradas.

Forma rápida

Las ventas descienden un 20%. Es decir, quedan en un 80%.

Ventas 2^a semana: 80% de 4 600 = 4 600 · 0,80 = 3 680 entradas.

Actividades

1 Calcula, mentalmente, el valor de x.

a) 50% de $x = 80$

b) 25% de $x = 6$

c) 10% de $x = 40$

d) 75% de $x = 15$

e) 5% de $x = 2$

f) 20% de $x = 6$

g) x% de 15 = 30

h) x% de 40 = 10

i) x% de 8 = 80

j) x% de 80 = 20

2 Resuelve:

a) Un pastelero saca del horno una bandeja con 80 mantecados. Al envasarlos se le rompe un 5%. ¿Cuántos se le han roto?

b) Un pastelero saca del horno una bandeja de mantecados y al envasarlos se le rompen cuatro, lo que supone un 5% del total.

¿Cuántos mantecados había en la bandeja?

c) Un pastelero saca del horno una bandeja con 80 mantecados y al envasarlos se le rompen 4.

¿Que tanto por ciento de los mantecados se le han roto?

3 Resuelve:

a) El 75% de los 220 asistentes a un congreso de economía habla inglés.

¿Cuántos de los asistentes hablan inglés?

b) El 75% de los asistentes a un congreso de economía habla inglés. Sabiendo que 165 hablan ingles, ¿cuál es el número total de asistentes?

c) De los 220 asistentes a un congreso de economía, 165 hablan inglés.

¿Qué porcentaje de asistentes habla ingles?

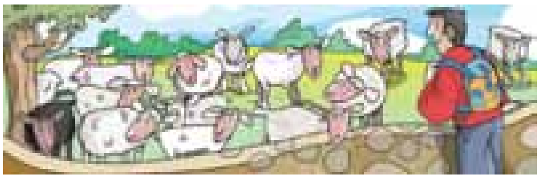
Cada problema con sus inversos

4 Resuelve cada apartado:

a) En un rebaño de 175 ovejas, el 8% son negras. ¿Cuántas ovejas negras tiene el rebaño?

b) En un rebaño hay 14 ovejas negras, lo que supone el 8% del total. ¿Cuántas ovejas tiene en total el rebaño?

c) En un rebaño que tiene 175 ovejas, 14 son negras. ¿Cuál es el porcentaje de negras?



Problemas para calcular la cantidad inicial

5 Marta gasta el 25% del dinero que llevaba en el monedero, y aún le quedan 6 €. ¿Cuanto llevaba en el monedero?

6 En la bolsa de caramelos, el 20% son de limón. Hay 30 caramelos de limón.

¿Cuántos caramelos hay en la bolsa?

7 Roberto ha leído 48 páginas de una novela, lo que supone el 30% del total.

¿Cuántas páginas tiene en total la novela?

8 Hoy han faltado al ensayo de la banda 6 músicos, lo que supone un 20% del total.

¿Cuántos músicos componen la banda?

Problemas para calcular el tanto por ciento

9 Adriano tenía ahorrados 200 € y ha gastado 50 € en un reproductor MP3. ¿Qué tanto por ciento de sus ahorros ha gastado?

10 De las 24 solicitudes de trabajo que ha recibido una empresa, ha aceptado 21. ¿Qué porcentaje ha sido rechazado?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Razones y proporciones

1 ▼▽▽ Escribe:

a) Tres pares de números cuya razón sea 2/3.

b) Tres parejas de números que estén en relación de cinco a uno.

c) Tres parejas de números que estén en razón de tres a cuatro.

2 ▼▽▽ Calcula x en las siguientes proporciones:

a) $\frac{6}{9}=\frac{10}{x}$ b) $\frac{6}{4}=\frac{x}{6}$ c) $\frac{8}{x}=\frac{12}{15}$

d) $\frac{x}{21}=\frac{4}{28}$ e) $\frac{x}{39}=\frac{30}{65}$ f) $\frac{14}{x}=\frac{49}{42}$

Relaciones de proporcionalidad

3 ▼▽▽ Indica, entre los siguientes pares de magnitudes, los que guardan relación de proporcionalidad directa, los que la guardan inversa y los que no guardan relación de proporcionalidad:

a) El número de kilos vendidos y el dinero recaudado.

b) El número de operarios que hacen un trabajo y el tiempo invertido.

c) La edad de una persona y su altura.

d) La velocidad de un vehículo y la distancia que ha recorrido en media hora.

e) El tiempo que permanece abierto un grifo y la cantidad de agua que arroja.

f) El caudal de un grifo y el tiempo que tarda en llenar un depósito.

g) El número de páginas de un libro y su precio.

Problemas de proporcionalidad directa e inversa

4 ▼▽▽ Calcula mentalmente y contesta.

a) Un tren recorre 240 km en 3 horas. ¿Qué distancia recorre en 2 horas?

b) Dos kilos de manzanas cuestan 1,80 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos?

c) Cuatro obreros hacen un trabajo en 3 horas. ¿Cuánto tardarían seis obreros?

d) Cinco entradas para un concierto han costado 40 euros. ¿Cuánto cuestan cuatro entradas?

e) Un ciclista, a 20 km/h, recorre cierta distancia en 3 horas. ¿Cuánto tardará una moto a 60 km/h?

5 ▼▽▽ Dos kilos y medio de patatas cuestan 1,75 €. ¿Cuánto cuestan tres kilos y medio?

6 ▼▽▽ Cuatro operarios tardan 10 horas en limpiar un solar. ¿Cuánto tardarían 5 operarios?

7 ▼▽▽ Una cuadrilla de soladores, trabajando 8 horas diarias, renuevan la acera de una calle en 15 días. ¿Cuánto tardarían trabajando 10 horas diarias?

8 ▼▽▽ Un paquete de 500 folios pesa 1,8 kg. ¿Cuánto pesará una pila de 850 folios?

9 ▼▽▽ Una máquina embotelladora llena 750 botellas en un cuarto de hora. ¿Cuántas botellas llena en hora y media?

10 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Una motobomba, en 7 horas, ha vertido 1 250 metros cúbicos de agua a un aljibe. ¿Cuánto tardará en aportar los 1 000 metros cúbicos que aún faltan para llenarlo?

PROP. DIRECTA

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{m}^3 & & \text{HORAS} \\ \hline 1\,250 & \longrightarrow & 7 \\ 1\,000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1\,250}{1\,000}\cdot\frac{7}{x} \rightarrow x=\frac{700}{125}$$

$$\begin{array}{r|l} 700\text{ h} & 125 \\ \hline 075 & 5\text{ h }36\text{ min} \\ \times\ \ 60 & \\ \hline 4500\text{ min} & \\ 0750 & \\ 000 & \end{array}$$

Solución: Tardará 5 h 36 min.

11 ▼▼▽ Un ciclista ha recorrido 25 kilómetros en hora y cuarto. A esa velocidad, ¿cuánto tardaría en recorrer una etapa de 64 kilómetros?

12 ▼▼▽ Un tren, a 90 km/h, cubre un recorrido en 6 horas. ¿Cuánto tardaría a 100 km/h?

Cálculo con porcentajes

13 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 50% de 220 b) 50% de 82
c) 50% de 12 d) 25% de 800
e) 75% de 800 f) 25% de 280

14 ▼▽▽ Obtén mentalmente el valor de x en cada caso:

a) 50% de $x = 150$ b) 50% de $x = 7$
c) 25% de $x = 120$ d) 25% de $x = 6$
e) 75% de $x = 150$ f) 75% de $x = 9$

15 ▼▽▽ Calcula.

a) 15% de 160
b) 13% de 700
c) 12% de 3 625
d) 4% de 75
e) 76% de 1 200
f) 5% de 182
g) 2,4% de 350
h) 1,7% de 2 500

Relaciones porcentajes-fracciones-decimales

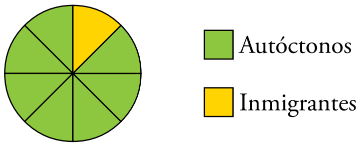
16 ▼▽▽ ¿Qué fracción irreducible asocias a cada uno de estos porcentajes?

a) 50% b) 25% c) 75% d) 10%
e) 20% f) 5% g) 30% h) 70%

17 ▼▽▽ Completa en tu cuaderno.

PORCENTAJE	25%	20%	80%	5%	2%
FRACCIÓN	1/4				
N.º DECIMAL	0,25	0,20			

18 ▼▽▽ El gráfico representa la relación entre la población autóctona y la inmigrante en un pueblo agrícola del sur de España.



a) ¿Qué fracción de la población es inmigrante?
b) ¿Cuántas de cada 1 000 personas son inmigrantes?
c) ¿Cuántas de cada 100 personas son inmigrantes?
d) ¿Cuál es el porcentaje de inmigrantes?

Problemas de porcentajes

19 ▼▽▽ Un empleado gana 1 700 euros al mes y gasta el 40% en pagar la hipoteca de su vivienda. ¿Cuánto le queda para afrontar el resto de sus gastos?

20 ▼▽▽ De una clase de 35 alumnos, han ido de excursión 28. ¿Qué tanto por ciento ha faltado a la excursión?

21 ▼▼▽ Un hotel tiene 187 habitaciones ocupadas, lo que supone el 85% del total.

¿De cuántas habitaciones dispone el hotel?

22 ▼▼▽ Un jugador de baloncesto ha efectuado 25 lanzamientos y ha conseguido 16 canastas.

¿Cuál es su porcentaje de aciertos?

23 ▼▼▽ Un embalse está al final del verano al 23% de su capacidad. Si en este momento contiene 35 decámetros cúbicos de agua, ¿cuál es la capacidad total del embalse?

24 ▼▼▽ Un jersey que costaba 45 € se vende en las rebajas por 36 €.

¿Qué tanto por ciento se ha rebajado?

25 ▼▽▽ Hace cinco años compré un piso por 240 000 €. En este tiempo la vivienda ha subido un 37%.

¿Cuánto vale ahora mi piso?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

26 ▼▽▽ Un embalse tenía, a principios de verano, 775 decámetros cúbicos de agua. Durante el estío, sus reservas han disminuido en un 68%. ¿Cuáles son las reservas actuales ahora, al final del verano?

Interpreta, describe, exprésate

27 ▼▼▽ Amelia, Tomás y Sara han resuelto el mismo problema de diferentes formas. Explica lo que ha hecho cada uno.

Una oficina tiene 45 empleados y en agosto se va de vacaciones el 80%. ¿Cuántos empleados trabajan en agosto?

Resolución de Amelia

$$100\% - 80\% = 20\% \rightarrow 20\% \text{ de } 45 = \frac{45 \cdot 20}{100} = 9$$

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Resolución de Tomás

$$80\% \text{ de } 45 = \frac{45 \cdot 80}{100} = 36 \rightarrow 45 - 36 = 9$$

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Resolución de Sara

TOTAL	→	DE VACACIONES	+	TRABAJANDO
100	→	80	+	20
10	→	8	+	2
5	→	4	+	1
40	→	32	+	8
45	→	36	+	9

Solución: En agosto trabajan 9 empleados.

Problemas "+"

28 ▼▼▽ Calcula los intereses que genera un préstamo de 6 000 euros al 4,5% durante 5 meses.

Autoevaluación

¿Aplicas la reducción a la unidad y la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad?

1 Resuelve por reducción a la unidad.

a) Un manantial ha arrojado 180 litros de agua en 6 minutos.

¿Cuántos litros entregará en un cuarto de hora?

b) Abriendo 6 bocas de riego, un pilón de agua se vacía en 50 minutos.

¿Cuánto tardará en vaciarse abriendo solo 4 bocas de riego?

2 Resuelve utilizando la regla de tres.

a) Un coche, a una media de 100 km/h, hace un viaje en 6 horas.

¿Cuánto tardará en hacer el mismo viaje un camión a 80 km/h?

b) Por un besugo de 875 gramos, Carmen ha pagado 10,85 €.

¿Cuánto pagará Miguel por otro besugo que pesa 1,2 kg?

¿Asocias un porcentaje a una fracción o a un número decimal?

3 Completa la tabla en tu cuaderno.

PORCENTAJE	25%	80%	6%		
FRACCIÓN				1/5	
N.° DECIMAL					0,07

4 Calcula:

a) 65% de 80 b) 4% de 3 200 c) 16% de 160

¿Diferencias y resuelves distintos problemas de porcentajes (directos, inversos, de aumentos y disminuciones porcentuales, interés bancario, etc.?

5 De un depósito de agua que contenía 36 000 litros, se ha gastado un 15%. ¿Cuántos litros quedan?

6 En una clase de 30 alumnos y alumnas, hoy han faltado 6. ¿Qué porcentaje ha faltado?

7 Un hospital tiene 210 camas ocupadas, lo que supone el 75% de las camas disponibles. ¿De cuántas camas dispone el hospital?

5 Álgebra

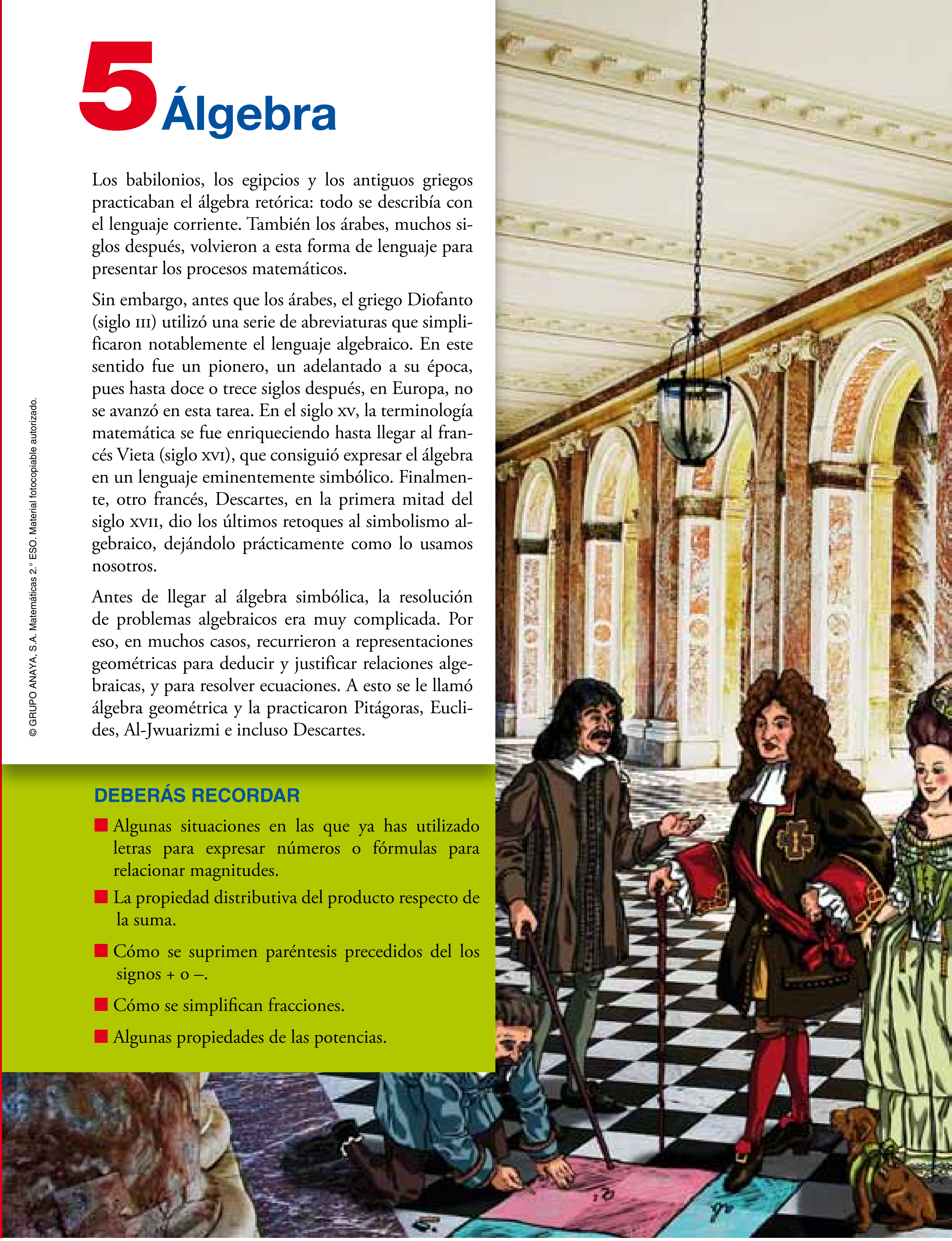
Los babilonios, los egipcios y los antiguos griegos practicaban el álgebra retórica: todo se describía con el lenguaje corriente. También los árabes, muchos siglos después, volvieron a esta forma de lenguaje para presentar los procesos matemáticos.

Sin embargo, antes que los árabes, el griego Diofanto (siglo III) utilizó una serie de abreviaturas que simplificaron notablemente el lenguaje algebraico. En este sentido fue un pionero, un adelantado a su época, pues hasta doce o trece siglos después, en Europa, no se avanzó en esta tarea. En el siglo XV, la terminología matemática se fue enriqueciendo hasta llegar al francés Vieta (siglo XVI), que consiguió expresar el álgebra en un lenguaje eminentemente simbólico. Finalmente, otro francés, Descartes, en la primera mitad del siglo XVII, dio los últimos retoques al simbolismo algebraico, dejándolo prácticamente como lo usamos nosotros.

Antes de llegar al álgebra simbólica, la resolución de problemas algebraicos era muy complicada. Por eso, en muchos casos, recurrieron a representaciones geométricas para deducir y justificar relaciones algebraicas, y para resolver ecuaciones. A esto se le llamó álgebra geométrica y la practicaron Pitágoras, Euclides, Al-Jwuarizmi e incluso Descartes.

DEBERÁS RECORDAR

- Algunas situaciones en las que ya has utilizado letras para expresar números o fórmulas para relacionar magnitudes.
- La propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
- Cómo se suprimen paréntesis precedidos del los signos + o –.
- Cómo se simplifican fracciones.
- Algunas propiedades de las potencias.



1

El álgebra: ¿para qué sirve?

Llamamos **álgebra** a la parte de las matemáticas en la que se utilizan letras para expresar números de valor desconocido o indeterminado; es un lenguaje que facilita la construcción de los procesos matemáticos.

A continuación, se exponen algunas de las aplicaciones del álgebra:

Para expresar propiedades de las operaciones aritméticas

EJEMPLO

Propiedad distributiva:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos parciales del número por cada sumando. $\Big\}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Para generalizar la evolución de series numéricas (TÉRMINO GENERAL)

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 2 & 6 & 12 & 20 & \dots \\ (0 \cdot 1) & (1 \cdot 2) & (2 \cdot 3) & (3 \cdot 4) & (4 \cdot 5) & \end{array}\right\} a_n = \begin{cases} \to (n-1) \cdot n \\ \to n^2 - n \end{cases}$$

Así, por ejemplo, si queremos saber el décimo término de la serie:

$$a_{10} = 9 \cdot 10 = 90 \quad \text{o bien} \quad a_{10} = 10^2 - 10 = 90$$

Para expresar la relación entre variables relativas a distintas magnitudes (FÓRMULAS)

EJEMPLO

$$\left.\begin{array}{llll} C \to \text{Capital} & & t \to \text{Tiempo (años)} \\ r \to \text{Porcentaje} & & I \to \text{Beneficio (Interés)} \end{array}\right\} I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Así, un capital de 5 000 € colocado al 5% anual durante 4 años produce… $\Big\}$ $I = \dfrac{5\,000 \cdot 5 \cdot 4}{100} = 1\,000$ €

Para manejar numeros de valor indeterminado y sus operaciones (EXPRESIONES ALGEBRAICAS)

EJEMPLOS

- Un número natural ⟶ a
- El siguiente ⟶ $a + 1$
- El doble del siguiente ⟶ $2 \cdot (a + 1)$
- Otro número ocho unidades menor ⟶ $a - 8$
- El cuadrado del número más el triple del número ⟶ $a^2 + 3a$

Para expresar relaciones que facilitan la resolución de problemas (ECUACIONES)

EJEMPLO

Laura gasta la mitad de su paga en el cine y la tercera parte en un bocadillo. Así, solo le quedan dos euros. ¿Cuánto tenía de paga?

Traduzcamos el enunciado:

Total paga: x

Coste cine: $\frac{x}{2}$

Coste bocadillo: $\frac{x}{3}$

Por tanto:

$$\boxed{\text{COSTE CINE}} + \boxed{\text{COSTE BOCADILLO}} + \boxed{2\text{ €}} = \boxed{\text{TOTAL PAGA } (x)}$$

$$\frac{x}{2} \quad + \quad \frac{x}{3} \quad + \quad 2 \quad = \quad x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2 = x \rightarrow x = 12 \qquad \textit{Comprobación: } \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + 2 = 12$$

Solución: Laura tenía 12 € de paga.

Actividades

1 ¿Cuál de las identidades corresponde al enunciado?

Propiedad asociativa de la multiplicación:

Si al multiplicar tres o más números se agrupan de diferentes formas, el resultado no varía.

$$\boxed{a \cdot b \cdot c = c \cdot a \cdot b}$$

$$\boxed{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$

$$\boxed{a \cdot (c + 1) = a \cdot c + a}$$

2 Copia y completa las casillas vacías.

1	2	3	4	5	…	n
			10		…	$3n - 2$

1	2	3	4	5	…	n
		15			…	$n^2 - 2n$

3 Escribe el término general de estas series:

a) 1 - 4 - 9 - 16 - 25 - … → $a_n = ?$

b) 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - … → $b_n = ?$

4 La suma de los n primeros números naturales es:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

Calcula la suma 1 + 2 + 3 + … + 50.

5 Traduce en tu cuaderno a lenguaje algebraico las edades de los miembros de esta familia:

	EDAD
SARA Tiene x años	x
ROSA (hermana mayor) Le saca 2 años a Sara.	
ANA (madre) Tenía 25 años cuando Sara nació.	
JOAQUÍN (padre) Cuadruplica la edad de Sara.	

2 Expresiones algebraicas

Una expresión formada por letras y números recibe el nombre de **expresión algebraica.**

Empecemos estudiando las más sencillas: los monomios.

Monomios

Un **monomio** es el *producto* indicado de un valor conocido **(coeficiente)** por uno o varios valores desconocidos, representados por letras **(parte literal).**

$$\underbrace{\mathbf{3}}_{\text{COEFICIENTE}}\underbrace{\boldsymbol{a}}_{\text{PARTE LITERAL}} \qquad \underbrace{\mathbf{\tfrac{3}{5}}}_{\text{COEFICIENTE}}\underbrace{\boldsymbol{xy^2}}_{\text{PARTE LITERAL}}$$

Ejemplo

$$\underbrace{-5ax^2}\longrightarrow \boxed{\text{MONOMIO}}$$

$$\boxed{\text{COEFICIENTE}} \longrightarrow -5$$

$$\boxed{\text{PARTE LITERAL}} \longrightarrow ax^2$$

$$\boxed{\text{GRADO}} \longrightarrow 3$$

$$\underbrace{a\cdot x\cdot x}_{3}$$

GRADO DE UN MONOMIO

Se llama grado de un monomio al número de factores que forman la parte literal.

$$4\,\underbrace{a^2}_{a\,\cdot\,a} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{MONOMIO DE}\\ \text{SEGUNDO GRADO}\end{array}\right. \qquad 5\,\underbrace{x^2y^2}_{x\,\cdot\,x\,\cdot\,y\,\cdot\,y} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{MONOMIO DE}\\ \text{CUARTO GRADO}\end{array}\right.$$

VALOR NUMÉRICO DE UN MONOMIO

Es el valor del monomio cuando las letras toman valores concretos.

El valor numérico de $2ab^2$ para $a = 1$ y $b = 2$ es 8. $\Big\}$ $2ab^2 \xrightarrow[b\,=\,2]{a\,=\,1} 2\cdot 1\cdot 2^2 = 8$

Ejemplo

$$5\,\underbrace{x^2} \longleftrightarrow \frac{1}{2}\,\underbrace{x^2}$$

IDÉNTICA PARTE LITERAL

MONOMIOS SEMEJANTES

Se dice que dos monomios son semejantes cuando tienen la parte literal idéntica.

$$3a \xrightarrow[\text{SEMEJANTES}]{\text{SON}} -2a \qquad 4x^2y \xrightarrow[\text{SEMEJANTES}]{\text{SON}} \frac{1}{5}\,x^2y$$

Suma de monomios

- Dos monomios solo se pueden sumar si son semejantes. En ese caso, se suman los coeficientes, dejando la misma parte literal.
- Si los monomios no son semejantes, la suma queda indicada.

$5a + 2a = 7a$ $\quad$ $3x + 2x^2 \longrightarrow$ queda indicada

$8x^2 - 3x^2 = 5x^2$ $\quad$ $a^2 - a + a^2 = 2a^2 - a \longrightarrow$ queda indicada

Actividades

1 Copia en tu cuaderno y completa.

MONOMIO	$8a$	$-3x$	a^2b	$\frac{2}{3}xy^4$	
COEFICIENTE			1		$\frac{1}{4}$
PARTE LITERAL					ab
GRADO					

2 Ejercicio resuelto

Sumar las expresiones siguientes:

a) $\boldsymbol{x+x}=2x$ **b)** $\boldsymbol{m+m}=2m$

c) $\boldsymbol{a^2+a^2}=2a^2$ **d)** $\boldsymbol{x^2+x^2+x^2}=3x^2$

3 Suma los monomios siguientes:

a) $a+a$ b) $m+m+m$

c) $x+x+x$ d) $n+n+n+n$

e) x^2+x^2 f) $a^3+a^3+a^3+a^3$

4 Ejercicio resuelto

Sumar estas expresiones:

a) $\boldsymbol{3x+x}=4x$ **b)** $\boldsymbol{2m+3m}=5m$

c) $\boldsymbol{5a^2+2a^2}=7a^2$ **d)** $\boldsymbol{3n^3+n^3+2n^3}=6n^3$

5 Suma las siguientes expresiones:

a) $4a+a$ b) $x+5x$

c) $5m+3m$ d) $4n+4n$

e) $3x^2+6x^2$ f) $5a^2+a^2+2a^2$

g) $m^3+2m^3+4m^3$ h) $3x^4+6x^4+2x^4$

6 Ejercicio resuelto

Restar las siguientes expresiones:

a) $\boldsymbol{5x-x}=4x$ **b)** $\boldsymbol{2a-6a}=-4a$

c) $\boldsymbol{4a^2-a^2}=3a^2$ **d)** $\boldsymbol{5x^3-2x^3}=3x^3$

7 Resta estos monomios:

a) $8x-3x$ b) $4a-7a$

c) $7m-m$ d) $8n-7n$

e) $11x^2-6x^2$ f) $5a^2-9a^2$

g) $7m^3-4m^3$ h) $4n^4-n^4$

8 Ejercicio resuelto

Reducir.

a) $\boldsymbol{5x+3+x-7}=\overbracket{5x+x}+\overbracket{3-7}=6x-4$

b) $\boldsymbol{3a+2a^2-5a+a^2}=\overbracket{2a^2+a^2}+\overbracket{3a-5a}=$
$=3a^2-2a$

9 Reduce todo lo posible.

a) $3x+x+2+6$ b) $4a+2a-7+5$

c) $3a+3-2a+1$ d) $5-3x+4x-4$

e) $5x+2-3x+x$ f) $2a-3-2+3a$

g) $7-4a-7+5a$ h) $4x-3-4x+2$

10 Reduce.

a) x^2+4+x^2+1 b) $5x^2-3-4x^2+1$

c) $x^2-6x+2x+x^2$ d) $3x+4x^2-x^2+x$

e) $x^2+4x+1+2x+3$ f) $5x^2+3x-4x^2-2x+1$

g) $3x^2+4-x^2+2x-5$ h) $10-3x+x^2-7-4x$

11 Ejercicio resuelto

Eliminar paréntesis y reducir.

a) $\boldsymbol{(5x+1)-(2x-3)}=5x+1-2x+3=$
$=5x-2x+1+3=3x+4$

b) $\boldsymbol{(4x^2-6)-(x^2-2x+1)}=4x^2-6-x^2+2x-1=$
$=4x^2-x^2+2x-6-1=3x^2+2x-7$

12 Quita paréntesis y reduce.

a) $3x+(2x-1)$ b) $7x-(5x-4)$

c) $6x-(4x+2)$ d) $3x-(x+5)$

e) $(x-5)+(x-3)$ f) $(4x+2)-(3x+2)$

13 Quita paréntesis y reduce.

a) $(3x^2-5x+2)+(x^2-2x+1)$

b) $(5x^2-2x-3)-(4x^2+3x-1)$

c) $(x-3)+(x^2+2x+1)$

d) $(6x^2-x)-(3x^2-5x+6)$

14 Calcula:

a) El valor numérico de $5x^2$ para $x=1$.

b) El valor numérico de $-4x^2$ para $x=-3$.

c) El valor numérico de $-2xy$ para $x=3$ e $y=-5$.

Multiplicación de monomios

Recordando que un monomio es un producto de números y letras, deducimos que el producto de dos monomios es otro monomio.

EJEMPLO

$(3a) \cdot (2a) = 3 \cdot 2 \cdot a \cdot a = 6a^2$

$(5x) \cdot (-3x^2) = 5 \cdot (-3) \cdot x \cdot x^2 = -15x^3$

$(3a) \cdot \left(\frac{5}{6}ab\right) = 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot a \cdot a \cdot b = \frac{15}{6}a^2b = \frac{5}{2}a^2b$

Observa

$$\overset{\text{GRADO 2}}{(2x^2)} \cdot \overset{\text{GRADO 3}}{(3x^3)} = \underset{\text{GRADO 5}}{6x^5}$$

El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.

División de monomios

El cociente de dos monomios puede ser un número, otro monomio o una fracción algebraica.

EJEMPLO

$(2a^2b) : (3a^2b) = \frac{2\cancel{a^2}\cancel{b}}{3\cancel{a^2}\cancel{b}} = \frac{2}{3} \longrightarrow$ (número)

$(15x^4) : (3x^3) = \frac{5 \cdot \cancel{3x^3} \cdot x}{\cancel{3x^3}} = 5x \longrightarrow$ (monomio)

$(2ab) : (6b^2) = \frac{\cancel{2} \cdot a \cdot \cancel{b}}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{b} \cdot b} = \frac{a}{3b} \longrightarrow$ (fracción algebraica)

Teniendo en cuenta que las letras representan números, en las operaciones con expresiones algebraicas se conservan todas las propiedades de las operaciones numéricas.

Actividades

15 Haz las multiplicaciones siguientes:

a) $(3x) \cdot (5x)$

b) $(-a) \cdot (4a)$

c) $(4a) \cdot (-5a^2)$

d) $\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot (6x)$

e) $\left(\frac{x^2}{3}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)$

f) $(5a) \cdot \left(-\frac{1}{5}a^2\right)$

16 **Ejercicio resuelto**

Multiplicar.

$(\mathbf{2ab^2}) \cdot (\mathbf{3a^2b^2}) = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^2 = 6a^3b^4$

17 Multiplica estos monomios:

a) $(3x) \cdot (5xy)$

b) $(-2ab) \cdot (4b)$

c) $(4x^3y) \cdot (xy)$

d) $\left(-\frac{2}{3}ab\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}ab\right)$

18 Simplifica como en los ejemplos.

- $\mathbf{\frac{20x^3}{4x^2} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{x^2} \cdot x}{\cancel{4} \cdot \cancel{x^2}} = \frac{5x}{1} = 5x}$
- $\mathbf{\frac{3a}{15a^2} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{a}}{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{a} \cdot a} = \frac{1}{5a}}$

a) $\frac{4x}{2}$

b) $\frac{3}{3a}$

c) $\frac{5x}{10x}$

d) $\frac{12a^2}{4a}$

e) $\frac{15x}{3x^2}$

f) $\frac{8a^2}{8a^3}$

19 Divide.

a) $(10x) : (2x)$

b) $(5a^2) : (15a^2)$

c) $(14a^2) : (-7a)$

d) $(6x^3) : (9x^2)$

e) $(10x^2) : (5x^3)$

f) $(-5a) : (-5a^3)$

3 Polinomios

- La suma (o resta) indicada de dos monomios es un **binomio.**
- La suma (o resta) indicada de tres monomios es un **trinomio.**
- En general, la suma (o resta) de varios monomios es un **polinomio.**

EJEMPLOS

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}x+y\\ a^2-1\end{array}\right\}\text{BINOMIOS}\\ \left.\begin{array}{l}x^2-3x+1\\ a^2-ab+2\end{array}\right\}\text{TRINOMIOS}\\ 5x^4-3x^3+2x-1\end{array}\right\}\text{POLINOMIOS}$$

GRADO DE UN POLINOMIO

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

EJEMPLO

$$\underbrace{2x^4}_{\boxed{\text{GRADO }4}}-\underbrace{5x^2}_{\boxed{\text{GRADO }2}}+\underbrace{3x}_{\boxed{\text{GRADO }1}}-\underbrace{8}_{\boxed{\text{GRADO }0}}\longrightarrow\text{POLINOMIO DE CUARTO GRADO}$$

Valor numérico de un polinomio

Cuando en un polinomio las letras toman valores concretos, también el polinomio toma un valor concreto.

EJEMPLO

Dado el polinomio $3x^2-2x+5$:

- Para $x=0 \rightarrow 3\cdot 0^2-2\cdot 0+5=0-0+5=5$
  El valor numérico de $3x^2-2x+5$ para $x=0$ es 5.
- Para $x=-2 \rightarrow 3\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)+5=12+4+5=21$
  El valor numérico de $3x^2-2x+5$ para $x=-2$ es 21.

Observa que el valor numérico de un polinomio depende del valor que tomen las letras.

Actividades

1 Indica el grado de cada polinomio:

a) x^2-3x+7 b) x^4-2 c) $5x^3-3x^2$

2 Calcula el valor numérico de x^3-5x^2-11.

a) Para $x=1$. b) Para $x=-1$.

3 Calcula el valor numérico de $3ab^2-5a+3b$ para $a=2$ y $b=-1$.

4 Calcula, por tanteo, los valores de x que anulan cada polinomio:

a) x^2-2x+1 b) x^3-8 c) x^4-x^3

Suma de polinomios

Regla práctica

Para **sumar** dos (o más) **polinomios,** se colocan uno bajo el otro, haciendo coincidir, en la misma columna, los monomios semejantes.

Para sumar dos o más polinomios, tendremos en cuenta lo que ya sabemos sobre la suma de monomios.

Por ejemplo, sumemos los polinomios $A = 2x^3 - 3x^2 + 6$ y $B = x^2 - 5x + 4$:

- Con lo que ya sabemos, podríamos actuar así:

$$\begin{aligned} A + B &= (2x^3 - 3x^2 + 6) + (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 + x^2 - 5x + 4 = \\ &= 2x^3 - 3x^2 + x^2 - 5x + 6 + 4 = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10 \end{aligned}$$

- En la práctica, se suele hacer de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rl} A \rightarrow & 2x^3 - 3x^2 + 0x + 6 \\ B \rightarrow & x^2 - 5x + 4 \\ \hline A + B \rightarrow & 2x^3 - 2x^2 - 5x + 10 \end{array}$$

Resta de polinomios

Regla práctica

Para **restar** dos **polinomios,** se suma el primero con el opuesto del segundo. Es decir, se le cambia el signo al segundo y se suman.

Restemos los mismos polinomios A y B de antes.

- Con lo que ya sabemos, podríamos actuar como sigue:

$$\begin{aligned} A - B &= (2x^3 - 3x^2 + 6) - (x^2 - 5x + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 6 - x^2 + 5x - 4 = \\ &= 2x^3 - 3x^2 - x^2 + 5x + 6 - 4 = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

- En la práctica, se suele hacer así:

$$\begin{array}{rl} A \rightarrow & 2x^3 - 3x^2 + 0x + 6 \\ -B \rightarrow & - x^2 + 5x - 4 \\ \hline A - B \rightarrow & 2x^3 - 4x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

Producto de un polinomio por un número

Recuerda que para multiplicar un número por una suma, debemos multiplicar el número por cada sumando (propiedad distributiva).

▼ **EJEMPLO**

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\ \times 2 \\ \hline 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad (x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \cdot 2 = 2x^3 - 8x^2 + 10x - 2$$

Actividades

5 Copia y completa.

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x - 7 \\ + \; x^2 - 8x + 5 \\ \hline \square - \square - \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2 \\ + \; 2x^3 + 2x^2 - 6x - 9 \\ \hline \square - \square + \square - \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2 + \square - 1 \\ + \; \square - \square + x + \square \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

6 Dados los polinomios $A = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$ y $B = 2x^3 - x^2 - 7x - 1$, calcula.

a) $A + B$

b) $A - B$

7 Calcula.

a) $3 \cdot (2x + 5)$

b) $5 \cdot (x^2 - x)$

c) $7 \cdot (x^3 - 1)$

d) $(-2) \cdot (5x - 3)$

4 Extracción de factor común

Cuando hablamos de extraer *factor común* nos referimos a una transformación a la que se pueden someter ciertas sumas y restas y que resulta muy útil en el cálculo algebraico.

Observa la siguiente expresión:

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d \left\{ \begin{array}{l} \text{— Es una suma cuyos sumandos son productos.} \\ \text{— Todos los productos tienen el } \textit{factor común } a. \end{array} \right.$$

Entonces, podemos transformar la suma en un producto **sacando factor común** y colocando un paréntesis.

$$\boxed{a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b + c - d)}$$

Observa que la transformación no es otra cosa que la aplicación de la propiedad distributiva.

EJEMPLOS

a) $4 \cdot a + 4 \cdot b = 4 \cdot (a + b)$

b) $a^2 + ab = a \cdot a + a \cdot b = a \cdot (a + b)$

c) $x^3 - 2x^2 + 5x = x^2 \cdot x - 2x \cdot x + 5 \cdot x = (x^2 - 2x + 5) \cdot x$

Como caso particular, podemos estudiar qué ocurre cuando el factor común a extraer coincide con uno de los sumandos.

En este caso, en su lugar en la suma queda la unidad.

$$a + ab = a \cdot 1 + ab = a \cdot (1 + b)$$

EJEMPLOS

a) $a^2 + 5a^3 = a^2 \cdot (1 + 5a)$

b) $x^3 + 6x^2 - x = (x^2 + 6x - 1) \cdot x$

c) $3m^2n - 2mn^2 + mn = mn \cdot (3m - 2n + 1)$

Actividades

1 Copia y completa.

a) $7x + 7y = 7 \cdot (\square + \square)$

b) $6a - 9b = 3 \cdot (\square - \square)$

c) $2x + xy = x \cdot (\square + \square)$

d) $x + x^2 - x^3 = x \cdot (\square + \square - \square)$

e) $5x^2 + 10xy + 15x = 5x \cdot (\square + \square + \square)$

2 Extrae factor común.

a) $8x + 8y$

b) $3a + 3b$

c) $5x + 10$

d) $8 + 4a$

e) $x^2 + xy$

f) $2a^2 + 6a$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Utiliza el lenguaje algebraico

1 ▼▽▽ Llamando x a un número cualquiera, escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:

a) El triple de x.

b) La mitad de su anterior.

c) El resultado de sumarle tres unidades.

d) La mitad de un número tres unidades mayor que x.

e) El triple del número que resulta de sumar a x cinco unidades.

f) Un número 5 unidades mayor que el triple de x.

2 ▼▽▽ En una granja hay C caballos, V vacas y G gallinas. Asocia cada una de estas expresiones al número de:

a) Patas

b) Cabezas

c) Orejas

d) Picos más alas

A $\boxed{2C + 2V}$ B $\boxed{C + V + G}$

C $\boxed{4(C + V) + 2G}$ D $\boxed{3G}$

3 ▼▽▽ Copia en tu cuaderno y completa.

1	2	3	4	5	…	n
		22			…	$3n^2 - 5$

1	2	3	4	5	…	n
			10		…	$\frac{n(n + 1)}{2}$

4 ▼▽▽ Siguiendo la lógica de la tabla, completa en tu cuaderno las casillas vacías.

1	2	3	5	10	15	20	n
0	3	8	24			399	

1	2	3	5	10	20	25	n
1	4	7	13			73	

5 ▼▽▽ Sabiendo que los valores a, b y c se relacionan mediante la fórmula

$$a = \frac{3b + 2c}{5}$$

completa la tabla en tu cuaderno.

b	0	0	2	3	4
c	0	5	7	3	9
a					

Monomios

6 ▼▽▽ Copia y completa.

MONOMIO	$8a$	$\frac{2}{3}xy$	
COEFICIENTE			1
PARTE LITERAL			a^3b
GRADO			

7 ▼▽▽ Opera.

a) $2x + 8x$

b) $7a - 5a$

c) $6a + 6a$

d) $15x - 9x$

e) $3x + x$

f) $10a - a$

g) $a + 7a$

h) $2x - 5x$

8 ▼▽▽ Reduce.

a) $3x + y + 5x$

b) $2a + 4 - 5a$

c) $7 - a - 5$

d) $3 + 2x - 7$

e) $2x + 3 - 9x + 1$

f) $a - 6 - 2a + 7$

g) $8a - 6 - 3a - 1$

h) $5x - 2 - 6x - 1$

9 ▼▽▽ Quita paréntesis y reduce.

a) $x - (x - 2)$

b) $3x + (2x + 3)$

c) $(5x - 1) - (2x + 1)$

d) $(7x - 4) + (1 - 6x)$

e) $(1 - 3x) - (1 - 5x)$

f) $2x - (x - 3) - (2x - 1)$

g) $4x - (2x - 1) + 5x - (4x - 2)$

10 ▼▽▽ Opera y reduce.

a) $5x \cdot 2$ b) $6x : 2$

c) $3x \cdot 4x$ d) $12x : 3x$

e) $\frac{2}{3}x \cdot 6x$ f) $\frac{3}{4}x^2 : \frac{1}{4}x$

g) $x^2 \cdot x^3$ h) $x^5 : x^2$

i) $3x \cdot 5x^3$ j) $15x^6 : 5x^4$

Polinomios

11 ▼▽▽ Indica el grado de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ b) $4 - 3x^2$

c) $2x^5 - 4x^2 + 1$ d) $7x^4 - x^3 + x^2 + 1$

12 ▼▽▽ Reduce.

a) $x^2 - 6x + 1 + x^2 + 3x - 5$

b) $3x - x^2 + 5x + 2x^2 - x - 1$

c) $2x^2 + 4 + x^3 - 6x + 2x^2 - 4$

d) $5x^3 - 1 - x + x^3 - 6x^2 - x^2 + 4$

13 ▼▽▽ Quita paréntesis y reduce.

a) $(3x^2 - 5x + 6) + (2x - 8)$

b) $(6 - 3x + 5x^2) - (x^2 - x + 3)$

c) $(9x^2 - 5x + 2) - (7x^2 - 3x - 7)$

d) $(3x^2 - 1) - (5x + 2) + (x^2 - 3x)$

14 ▼▽▽ Copia y completa.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x - 5 \\ +\ \square x^2 + \square x - \square \\ \hline 5x^2 - x - 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \square x^3 - 3x^2 + \square x - 8 \\ +\ 4x^3 + \square x^2 - 5x - \square \\ \hline 6x^3 + 2x^2 - x - 10 \end{array}$$

15 ▼▽▽ Considera los polinomios siguientes:

$A = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 2$

$B = x^3 - 3x + 1$

$C = 2x^2 + 4x - 5$

Calcula.

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $B - C$

Extracción de factor común

16 ▼▽▽ Extrae factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $3x + 3y + 3z$ b) $2x - 5xy + 3xz$

c) $a^2 + 3a$ d) $3a - 6b$

e) $2x + 4y + 6z$ f) $4x - 8x^2 + 12x^3$

g) $9a + 6a^2 + 3a^3$ h) $2a^2 - 5a^3 + a^4$

Relaciona y aplica tus conocimientos

17 ▼▽▽ En un campo de cultivo hay cuatro estanques. Llamando C a la cantidad de agua que tendrá un estanque dentro de m minutos, asocia cada estanque con la expresión que le corresponde.

ESTANQUE M: Contiene 4 500 litros de agua y se abre un grifo que le aporta 4 litros por minuto.

ESTANQUE N: Contiene 4 500 litros de agua y se le conecta una bomba que extrae 4 litros por minuto.

ESTANQUE P: Contiene 40 metros cúbicos de agua y se conecta a una tubería que aporta 4,5 metros cúbicos a la hora.

ESTANQUE Q: Contiene 40 metros cúbicos de agua y se abre una boca de riego que extrae 4,5 metros cúbicos a la hora.

$$\boxed{C = 40\,000 + \frac{4\,500 \cdot m}{60}} \qquad \boxed{C = 4\,500 - 4 \cdot m}$$

$$\boxed{C = 40\,000 - \frac{4\,500 \cdot m}{60}} \qquad \boxed{C = 4\,500 + 4 \cdot m}$$

18 ▼▼▽ El importe bruto, I, sin IVA, del recibo de la luz de cierta compañía eléctrica se calcula según la fórmula:

$$I = F + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot P$$

$F \rightarrow$ Gastos fijos y alquiler de equipos de medida (€)

$L_{AC} \rightarrow$ Lectura actual (kWh)

$L_{ANT} \rightarrow$ Lectura anterior (kWh)

$P \rightarrow$ Precio del kWh (€/kWh)

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

a) Escribe la fórmula en su versión actualizada, si los gastos fijos son de 8,50 € y el kilovatio hora cuesta 0,80 €.

b) ¿Cuál de las siguientes sería la fórmula actualizada de la factura, en su formato final, incluyendo el 18% de IVA?

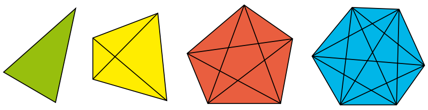
$$I = \frac{8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80 + 18}{100}$$

$$I = [8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80] \cdot 1{,}18$$

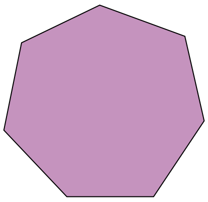
$$I = 8{,}50 + (L_{AC} - L_{ANT}) \cdot 0{,}80 + 1{,}18$$

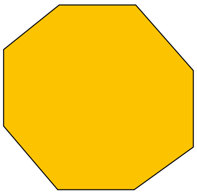
19 ▼▼▽ El empleado de la compañía eléctrica del ejercicio anterior leyó el mes pasado, en el contador de la vivienda de la familia Herranz, 2 457 kWh, y este mes, 2 516 kWh. ¿A cuánto asciende la factura de este mes?

20 ▼▼▼ Observa el número de diagonales de estos polígonos.



Traza las diagonales de un heptágono y de un octógono.





Comprueba que:

— El número de diagonales que salen de un vértice es igual al número de lados menos tres.

— Cada diagonal toca a dos vértices.

Teniendo eso en cuenta:

a) Completa la tabla en tu cuaderno.

N.º DE LADOS	3	4	5	6	7	8	10	20
N.º DIAGONALES	0	2	5	9				

b) Escribe la fórmula que te permite calcular el número de diagonales (*D*), sabiendo el número de lados (*n*).

Autoevaluación

¿Interpretas y aplicas el lenguaje algebraico en enunciados, fórmulas, propiedades, generalizaciones, etc.?

1 Completa en tu cuaderno las casillas vacías, siguiendo la lógica de la tabla.

1	3	5	8	10		15	*n*
2	12	22	37		57		

2 Llamando x a un número, expresa en lenguaje algebraico:

a) Su doble. b) El siguiente de su doble.

c) El doble de su siguiente. d) El triple de su mitad.

¿Reconoces los monomios, los polinomios y todos sus elementos?

3 ¿Cuáles son el coeficiente y el grado del monomio $-\frac{2}{3}xy^2$?

4 Calcula el valor numérico del polinomio $4x^2 - 3x + 7$ para $x = 1$.

¿Operas con monomios y polinomios?

5 Reduce estas expresiones:

a) $2x + 4 + x - 6$ b) $5x^2 + 2 + 6x - x - 3x^2 + 1$

6 Opera y reduce:

a) $3 \cdot (-5x)$ b) $6\,x \cdot \frac{1}{2}x$ c) $10x^2 : 5x$

7 Opera:

a) $5 \cdot (x - 2)$ b) $3 \cdot (x^2 - x + 1)$ c) $(-2) \cdot (2 - x)$

8 Opera y reduce:

a) $4 \cdot (x + 1) - 3x$ b) $3 \cdot (x - 2) - 2 \cdot (x - 3)$

c) $2 \cdot (x^2 + x) - (2x^2 + 5)$

9 Saca factot común: a) 5a + 5b b) $3x - 6$ c) $3a^2 + 6$

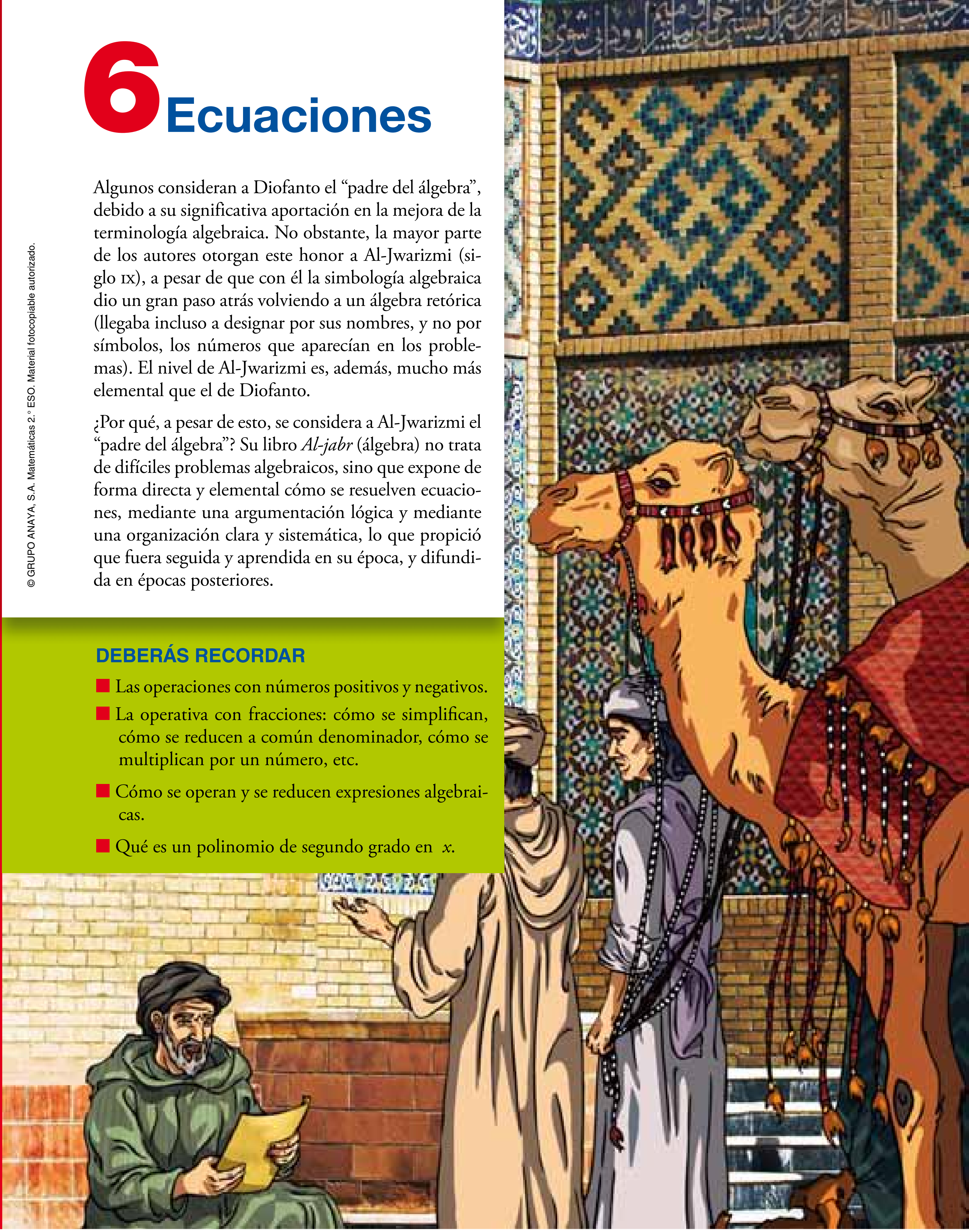
6 Ecuaciones

Algunos consideran a Diofanto el “padre del álgebra”, debido a su significativa aportación en la mejora de la terminología algebraica. No obstante, la mayor parte de los autores otorgan este honor a Al-Jwarizmi (siglo IX), a pesar de que con él la simbología algebraica dio un gran paso atrás volviendo a un álgebra retórica (llegaba incluso a designar por sus nombres, y no por símbolos, los números que aparecían en los problemas). El nivel de Al-Jwarizmi es, además, mucho más elemental que el de Diofanto.

¿Por qué, a pesar de esto, se considera a Al-Jwarizmi el “padre del álgebra”? Su libro *Al-jabr* (álgebra) no trata de difíciles problemas algebraicos, sino que expone de forma directa y elemental cómo se resuelven ecuaciones, mediante una argumentación lógica y mediante una organización clara y sistemática, lo que propició que fuera seguida y aprendida en su época, y difundida en épocas posteriores.

DEBERÁS RECORDAR

- Las operaciones con números positivos y negativos.
- La operativa con fracciones: cómo se simplifican, cómo se reducen a común denominador, cómo se multiplican por un número, etc.
- Cómo se operan y se reducen expresiones algebraicas.
- Qué es un polinomio de segundo grado en x.



1

Ecuaciones: significado y utilidad

Una ecuación expresa, mediante una igualdad algebraica, una relación entre cantidades cuyo valor, de momento, no conocemos.

Esas cantidades se representan con letras.

EJEMPLOS

- La mitad de un número es igual a su quinta parte más seis unidades:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Un número} \to x\\ \text{Su mitad} \to \dfrac{x}{2}\\ \text{Su quinta parte} \to \dfrac{x}{5}\end{array}\right\} \to \textbf{Ecuación} \to \frac{x}{2}=\frac{x}{5}+6$$

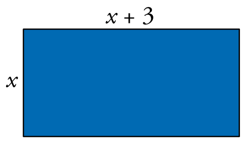
- La edad de Laura coincide con la quinta parte de la que tendrá dentro de 28 años:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Edad de Laura} \to x\\ \text{Edad dentro de 28 años} \to x+28\end{array}\right\} \to \textbf{Ecuación} \to x=\frac{x+28}{5}$$

- Una habitación rectangular es tres metros más larga que ancha, y su superficie es de 28 m^2:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ancho} \to x\\ \text{Largo} \to x+3\end{array}\right\} \to \textbf{Ecuación} \to x \cdot (x+3)=28$$

Ejemplo



Área: $x \cdot (x+3)$

¿Para qué sirven las ecuaciones?

Las ecuaciones permiten codificar relaciones en lenguaje algebraico y, a partir de ahí, manejarlas matemáticamente. Eso, como comprobarás más adelante, supone una **potentísima herramienta para resolver problemas.**

Pero antes, debes aprender a resolverlas.

¿Qué es resolver una ecuación?

Resolver una ecuación es encontrar el valor, o los valores, que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

EJEMPLO

En la ecuación $\frac{x}{2}=\frac{x}{5}+6$, la igualdad se cumple solamente para el valor $x=20$.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{5}+6\\ x=20\end{array}\right\} \quad \underbrace{\frac{20}{2}}_{10}=\underbrace{\frac{20}{5}+6}_{10}$$

Diremos, entonces, que la solución de la ecuación es $x=20$.

Resuelve ecuaciones “con lo que ya sabes”

Antes de aprender ninguna técnica específica, ten en cuenta que razonando con lo que ya sabes, o tanteando, puedes resolver muchas ecuaciones.

▼ EJEMPLOS

Para resolver las siguientes ecuaciones, responde a las preguntas sugeridas en cada caso:

a) $3x = 24$ → ¿Qué número multiplicado por 3 da 24?

b) $5x - 20 = 0$ → Piensa primero: ¿A qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?

Y, después: ¿Cuánto debe valer x?

c) $\frac{4x+3}{5} = 1$ → Piensa primero: ¿Qué número dividido entre 5 da 1? ¿Cuál es el valor de $4x + 3$?

Y, después: ¿Cuánto debe valer $4x$? ¿Cuánto debe valer x?

d) $\sqrt{2x+1} = 5$ → Piensa primero: ¿Qué número tiene 5 por raíz cuadrada? ¿Cuánto debe valer $2x + 1$?…

Y, después: ¿Cuánto debe valer $2x$? ¿Cuánto debe valer x?

Actividades

1 Asocia cada enunciado con la ecuación que lo expresa algebraicamente:

a) La tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más una unidad.

b) La edad de Andrés es el triple que la de su hermana, y entre los dos suman 8 años.

c) Un rectángulo es 3 metros más largo que ancho, y su perímetro mide 26 metros.

d) He pagado 2 € por tres lapiceros y un bolígrafo. Pero el bolígrafo costaba el doble que un lapicero.

e) Un ciclista ha recorrido la distancia desde A hasta B a la velocidad de 15 km/h. Si hubiera ido a 10 km/h, habría tardado una hora más.

$\boxed{x + 3x = 8}$ $\boxed{x + (x + 3) + x + (x + 3) = 26}$

$\boxed{x + x + x + 2x = 2}$ $\boxed{\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 1}$ $\boxed{\frac{x}{10} = \frac{x}{15} + 1}$

2 Resuelve en el orden en que aparecen.

a) $3x = 21$

b) $3x - 1 = 20$

c) $\frac{3x-1}{5} = 4$

d) $\sqrt{\frac{3x-1}{5}} = 2$

3 Resuelve con lo que sabes.

a) $7x = 35$

b) $4x - 12 = 0$

c) $x + 3 = 10$

d) $2x - 4 = 6$

e) $\frac{x+1}{3} = 2$

f) $\frac{3x-4}{2} = 1$

g) $\frac{7}{x+1} = 1$

h) $\frac{10}{2x-3} = 2$

i) $x^2 + 1 = 26$

j) $\sqrt{3x+1} = 5$

4 Encuentra alguna solución por tanteo.

a) $x^2 + 2x + 1 = 4$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $\frac{x}{4} + \frac{8}{x} = 3$

d) $x^3 - \sqrt{x} = 0$

2 Ecuaciones: elementos y nomenclatura

- **Miembros de una ecuación:** Son cada una de las expresiones que aparecen a ambos lados del signo de igualdad.
- **Términos:** Son los sumandos que forman los miembros.

$$\overbrace{\underset{\uparrow}{3x} + \underset{\uparrow}{1}}^{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \overbrace{\underset{\uparrow}{9} - \underset{\uparrow}{x}}^{\text{SEGUNDO MIEMBRO}}$$

TÉRMINOS

- **Incógnitas:** Son las letras que aparecen en la ecuación.

  Por ejemplo:

  $3x + 1 = 9 - x$ → Ecuación con una incógnita, x.

  $5x + 3y = y + 2$ → Ecuación con dos incógnitas, x e y.

- **Soluciones:** Son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

  Por ejemplo:

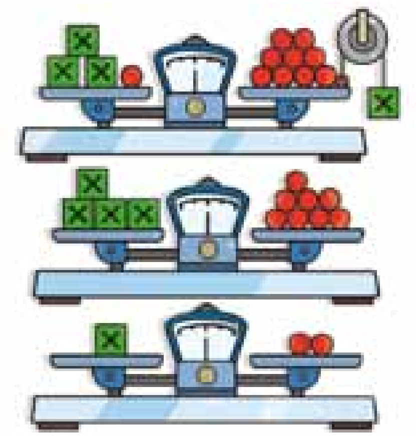
  $$3x + 1 = 9 - x \quad \begin{cases} x = 2 \text{ es solución, ya que } 3 \cdot 2 + 1 = 9 - 2. \\ x = 1 \text{ no es solución, ya que } 3 \cdot 1 + 1 \neq 9 - 1. \end{cases}$$

- **Grado de una ecuación:** Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros, una vez reducida la ecuación.

  Por ejemplo:

  $3x + 1 = 9 - x$ → Ecuación de primer grado.

  $x^2 - 3x + 1 = 2x - 5$ → Ecuación de segundo grado.



- **Ecuaciones equivalentes:** Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas incógnitas y las mismas soluciones.

  Por ejemplo:

  $$\left.\begin{array}{l} 3x + 1 = 9 - x \\ 4x + 1 = 9 \\ 4x = 8 \end{array}\right\} \text{Son equivalentes. Las tres tienen como solución } x = 2.$$

Actividades

1 Copia y asocia cada ecuación con su o sus soluciones:

$4x + 4 = 5$

$4x - 3 = x + 3$

$x^2 - 3 = 2x$

$3x = x + 1$

$\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{-1}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{2}$

2 De las ecuaciones siguientes, agrupa las que sean equivalentes:

a) $4x = 20$

b) $3x - 1 = 8$

c) $5x - 4 = x$

d) $3x = 9$

e) $4x - 5 = 15$

f) $4x - 4 = 0$

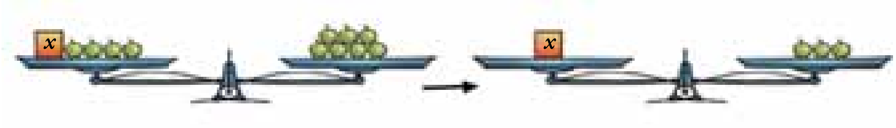
3

Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones

Ahora vas a estudiar los procedimientos básicos para resolver ecuaciones. Aunque los ejemplos son muy sencillos y la solución salta a la vista, sigue las técnicas que se exponen, pues te servirán para resolver casos más complejos.

Resolución de la ecuación $x + a = b$

▼ **EJEMPLO:** $x + 4 = 7$



$$\begin{gathered} x + 4 = 7 \\ \downarrow \\ x + \cancel{4} - \cancel{4} = 7 - 4 \\ \downarrow \\ x = 3 \end{gathered}$$

- Restando 4 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 3$.

Para resolver la ecuación $x + a = b$, restamos a en ambos miembros.

$$x + a = b \;\rightarrow\; x + \cancel{a} - \cancel{a} = b - a \;\rightarrow\; x = b - a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está sumando en uno de los miembros, pasa restando al otro.

EJEMPLOS

a) $$\begin{gathered} x + 4 = 7 \\ \downarrow \\ x = 7 - 4 \\ \downarrow \\ x = 3 \end{gathered}$$

b) $$\begin{gathered} x + 5 = 1 \\ \downarrow \\ x = 1 - 5 \\ \downarrow \\ x = -4 \end{gathered}$$

Resolución de la ecuación $x - a = b$

▼ **EJEMPLO:** $x - 2 = 6$

$$\begin{gathered} x - 2 = 6 \\ \downarrow \\ x - \cancel{2} + \cancel{2} = 6 + 2 \\ \downarrow \\ x = 8 \end{gathered}$$

- Sumando 2 a los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 8$.

Para resolver la ecuación $x - a = b$, sumamos a en ambos miembros.

$$x - a = b \;\rightarrow\; x - \cancel{a} + \cancel{a} = b + a \;\rightarrow\; x = b + a$$

En la práctica

REGLA

Lo que está restando en uno de los miembros, pasa sumando al otro.

EJEMPLOS

a) $$\begin{gathered} x - 2 = 6 \\ \downarrow \\ x = 6 + 2 \\ \downarrow \\ x = 8 \end{gathered}$$

b) $$\begin{gathered} 5 - x = 2 \\ \downarrow \\ 5 - 2 = x \\ \downarrow \\ x = 3 \end{gathered}$$

Actividades

1 Resuelve aplicando las técnicas recién aprendidas.

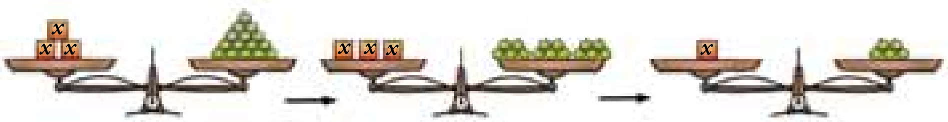
a) $x + 3 = 4$
b) $x - 1 = 8$
c) $x + 5 = 11$
d) $x - 7 = 3$
e) $x + 4 = 1$
f) $x - 2 = -6$
g) $9 = x + 5$
h) $5 = x - 4$
i) $2 = x + 6$

2 Resuelve aplicando las técnicas anteriores.

a) $x + 6 = 9$
b) $x - 4 = 5$
c) $2 - x = 4$
d) $5 + x = 4$
e) $3 + x = 3$
f) $6 = x + 8$
g) $0 = x + 6$
h) $1 = 9 - x$
i) $4 = x - 8$

Resolución de la ecuación *a* · *x* = *b*

▼ **EJEMPLO:** $3x = 15$



$$\begin{gathered} 3x = 15 \\ \downarrow \\ \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3} \\ \downarrow \\ x = 5 \end{gathered}$$

- Dividiendo por 3 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 5$.

Para resolver la ecuación $ax = b$, dividimos ambos miembros por a. $\Big\}$ $ax = b \rightarrow \frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{b}{a} \rightarrow x = \frac{b}{a}$

En la práctica

REGLA: Lo que está multiplicando a un miembro (a todo él) pasa dividiendo al otro.

EJEMPLOS

a) $3x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{3} \rightarrow x = 5$

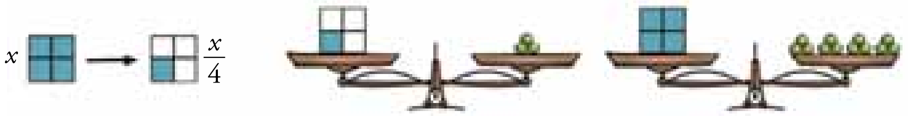
b) $7x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{7}$

Casos especiales

- La ecuación $0 \cdot x = 6$ no tiene solución. No hay ningún número que multiplicado por cero dé seis.
- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones. Cualquier número multiplicado por cero da cero.

Resolución de la ecuación *x*/*a* = *b*

▼ **EJEMPLO:** $\frac{x}{4} = 3$



$$\begin{gathered} \frac{x}{4} = 3 \\ \downarrow \\ \frac{x}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} = 3 \cdot 4 \\ \downarrow \\ x = 12 \end{gathered}$$

- Multiplicando por 4 los dos miembros, se obtiene una ecuación equivalente.
- La solución es $x = 12$.

Para resolver la ecuación $\frac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos miembros por a. $\Big\}$ $\frac{x}{a} = b \rightarrow \frac{x}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a} = b \cdot a \rightarrow x = b \cdot a$

En la práctica

REGLA: Lo que está dividiendo a un miembro (a todo él) pasa multiplicando al otro.

EJEMPLOS

a) $\frac{x}{4} = 3 \rightarrow x = 3 \cdot 4 \rightarrow x = 12$

b) $\frac{x}{2} = \frac{7}{10} \rightarrow x = \frac{7}{10} \cdot 2 \rightarrow x = \frac{7}{5}$

Actividades

1 Resuelve con las técnicas que acabas de aprender.

a) $4x = 20$ b) $\frac{x}{2} = 1$ c) $3x = 12$

d) $\frac{x}{5} = 2$ e) $8 = 4x$ f) $4 = \frac{x}{2}$

2 Resuelve combinando las técnicas anteriores.

a) $3x - 2 = 0$ b) $4x + 5 = 13$ c) $2x - 5 = 9$

d) $8 - 3x = 2$ e) $\frac{x}{2} + 4 = 7$ f) $\frac{x}{3} - 2 = 3$

4 Resolución de ecuaciones sencillas

El método para resolver una ecuación consiste en ir transformándola, mediante sucesivos pasos, en otras equivalentes más sencillas hasta despejar la incógnita.

Para transformar una ecuación en otra equivalente más sencilla, utilizaremos dos recursos:

- Reducir sus miembros.
- Transponer los términos.

Analiza los siguientes ejemplos y resuelve las ecuaciones que siguen. Para que puedas evaluar tu trabajo, tienes las soluciones al margen.

▼ EJEMPLO 1

$2x - 5 = 3$

TRANSPONER

$2x = 3 + 5$ Sumamos 5 en ambos miembros.

REDUCIR

$2x = 8$

TRANSPONER

$x = \frac{8}{2}$ Dividimos ambos miembros entre 2.

REDUCIR

$x = 4$

Ten en cuenta

- La ecuación $0 \cdot x = 0$ tiene infinitas soluciones.
- La ecuación $0 \cdot x = k$, con $k \neq 0$, no tiene solución.

Practica

① $2x - 1 = 1$

② $5x - 3 = 2$

③ $7x - 5 = 9$

④ $10 + 3x = 4$

⑤ $2x - 3 = -1$

⑥ $8 = 5x - 2$

⑦ $0 = 3x + 12$

⑧ $5 - x = 2$

⑨ $6 - 2x = 4$

⑩ $4 - 5x = 9$

⑪ $3x - 1 = 1$

⑫ $4 = 3x + 5$

⑬ $5 = 4x + 7$

⑭ $0x + 2 = 2$

⑮ $0x + 1 = 4$

Soluciones

① 1	② 1	③ 2
④ –2	⑤ 1	⑥ 2
⑦ –4	⑧ 3	⑨ 1
⑩ –1	⑪ 2/3	⑫ –1/3
⑬ –1/2	⑭ I.S.(*)	⑮ S.S.(**)

(*) → I.S. (infinitas soluciones).

(**) → S.S. (sin solución).

▼ EJEMPLO 2

$5\,x + 1 - 3x = 7$

R

$2x + 1 = 7$

T

$2x = 7 - 1$

R

$2x = 6$

T

$x = \frac{6}{2}$

R

$x = 3$

▼ EJEMPLO 3

$4x - x + 3 = 7 - 5$

R

$3x + 3 = 2$

T

$3x = 2 - 3$

R

$3x = -1$

T

$x = \frac{-1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$

Practica

⑯ $8x - 4 + x = 5$

⑰ $5x - 8 - x = 7 - 3$

⑱ $3x + 10 + x = 2$

⑲ $7x - 2x - 3 = 7$

⑳ $3x + 15 + 2x = -5$

㉑ $5 + 2x + 1 = 7$

㉒ $5 - x + 2 = 10$

㉓ $7x + 3 - 9x = 5$

㉔ $5 - 1 = x + 5 - 2x$

㉕ $1 = x + 1 + 2x$

㉖ $4 = x + 5 - 6x$

㉗ $9 = 4x + 1 - 6x$

㉘ $5 = 3x - 1 + 5x$

㉙ $7x + 2 - 7x = 3 - 1$

㉚ $5x + 3 - 5x = 7$

Soluciones

⑯ 1	⑰ 3	⑱ –2
⑲ 2	⑳ –4	㉑ 1/2
㉒ –3	㉓ –1	㉔ 1
㉕ 0	㉖ 1/5	㉗ –4
㉘ 3/4	㉙ I.S.	㉚ S.S.

A medida que las ecuaciones se complican, se abren diferentes opciones de resolución. Cualquiera es válida, siempre que operes correctamente.

A continuación, puedes ver un ejemplo resuelto de dos formas:

▼ EJEMPLO 4

OPCIÓN A

La incógnita, en el miembro de la izquierda.

$$\begin{aligned} & 2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1 \\ \text{R} \ \downarrow \ & -3x - 1 = 3 + 3x \\ \text{T} \ \downarrow \ & -3x - 3x = 3 + 1 \\ \text{R} \ \downarrow \ & -6x = 4 \\ \text{T} \ \downarrow \ & x = \frac{4}{-6} \\ \text{R} \ \downarrow \ & x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

OPCIÓN B

La incógnita, en el miembro en el que tome coeficiente positivo.

$$\begin{aligned} & 2x - 1 - 5x = 2 + 3x + 1 \\ \text{R} \ \downarrow \ & -3x - 1 = 3 + 3x \\ \text{T} \ \downarrow \ & -1 - 3 = 3x + 3x \\ \text{R} \ \downarrow \ & -4 = 6x \\ \text{T} \ \downarrow \ & \frac{-4}{6} = x \\ \text{R} \ \downarrow \ & x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Practica

㉛ $2x - 1 = x + 2$

㉜ $3x + 2 = x + 6$

㉝ $2x + 1 = 5x - 5$

㉞ $1 - x = 4 - 2x$

㉟ $x - 6 = 5x - 2$

㊱ $3 + 7x = 2x + 5$

㊲ $6x - 2 + x = 2x + 3$

㊳ $8x + 3 - 5x = 7 - 2x - 1$

㊴ $4x + 5 + x = 7 + 3x - 3$

㊵ $8 - x + 1 = 4x - 1 - 7x$

㊶ $7x - 4 - 3x = 2 + 4x - 6$

㊷ $2 + 3x - 5 = 4x - 2 - x$

Soluciones

㉛ 3	㉜ 2	㉝ 2
㉞ 3	㉟ –1	㊱ 2/5
㊲ 1	㊳ 3/5	㊴ –1/2
㊵ –5	㊶ I.S.	㊷ S.S.

Cuando una ecuación contiene paréntesis, comenzaremos suprimiéndolos y reduciendo.

▼ EJEMPLO 5

$$\begin{aligned} & 5x - 2(2x - 2) = 8 - (3 + 2x) \\ \text{R} \ \downarrow \ & 5x - 4x + 4 = 8 - 3 - 2x \\ \text{R} \ \downarrow \ & x + 4 = 5 - 2x \\ \text{T} \ \downarrow \ & x + 2x = 5 - 4 \\ \text{R} \ \downarrow \ & 3x = 1 \\ \text{T} \ \downarrow \ & x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Practica

㊸ $x - 7 = 6 - (x - 3)$

㊹ $x - (1 - 3x) = 8x - 1$

㊺ $1 - (3x - 9) = 5x - 4x + 2$

㊻ $13x - 15 - 6x = 1 - (7x + 9)$

㊼ $7x - (4 + 2x) = 1 + (x - 2)$

㊽ $2(3x - 1) - 5x = 5 - (3x + 11)$

㊾ $1 - 2(2x - 1) = 5x - (5 - 3x)$

㊿ $7 - (2x + 9) = 11x - 5(1 - x)$

(51) $4(5x - 3) - 7x = 3(6x - 4) + 10$

(52) $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$

(53) $16x - 7(x + 1) = 2 - 9(1 - x)$

(54) $6 - (8x + 1) = 4x - 3(2 + 4x)$

Soluciones

㊸ 8	㊹ 0	㊺ 2
㊻ 1/2	㊼ 3/4	㊽ –1
㊾ 2/3	㊿ 1/6	(51) –2
(52) 1	(53) I.S.	(54) S.S.

5 Ecuaciones con denominadores

Cuando en los términos de una ecuación aparecen denominadores, la transformaremos en otra equivalente que no los tenga. Para ello, *multiplicaremos los dos miembros* de la ecuación por un número que sea múltiplo de todos los denominadores.

El múltiplo más adecuado es el más pequeño; es decir, el *mínimo común múltiplo de los denominadores.*

▼ **EJEMPLO**

$$\frac{5x}{6} - 1 = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$$

$$12 \cdot \left(\frac{5x}{6} - 1\right) = 12 \cdot \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{4}\right)$$

mín.c.m. (6, 3, 4) = 12

Multiplicamos los dos miembros por 12.

$$\frac{60x}{6} - 12 = \frac{12x}{3} - \frac{36}{4}$$

$$10x - 12 = 4x - 9$$

Al quitar paréntesis y reducir, desaparecen los denominadores.

$$10x - 4x = -9 + 12$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

A partir de ahí, actuaremos como ya sabemos.

Para **eliminar** los **denominadores** en una ecuación, se multiplican ambos miembros por el mínimo común múltiplo de todos ellos.

Una estrategia similar

- Reducir a común denominador:

$$\frac{5x}{6} - \frac{1}{1} = \frac{x}{3} - \frac{3}{4}$$

Común denominador → 12

$$\frac{10x}{12} - \frac{12}{12} = \frac{4x}{12} - \frac{9}{12}$$

- Eliminar denominadores:

$$10x - 12 = 4x - 9$$

Actividades

1 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{x}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{2x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

c) $4 - \frac{2x}{3} = x + \frac{2}{3}$

d) $1 + \frac{2x}{5} = \frac{1}{5} - 2x$

e) $\frac{1}{4} - x = \frac{3x}{4} - 1$

f) $\frac{3x}{2} + 5 = 2x - \frac{1}{2}$

2 Halla x en cada caso:

a) $1 - \frac{x}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{3}{4} = 1$

c) $\frac{5x}{6} + 1 = x - \frac{1}{3}$

d) $\frac{7x}{10} + 1 = \frac{2}{5} + x$

e) $x + \frac{1}{5} = \frac{2x}{3}$

3 Resuelve:

a) $\frac{x}{3} = \frac{1}{15} + \frac{2x}{5}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = \frac{2}{3} - x$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - 1$

d) $\frac{3x}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5x}{6} - 1$

e) $\frac{7x}{9} - \frac{1}{6} = \frac{x}{3}$

4 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{10} = 1$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3x}{5} - \frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

d) $\frac{x}{2} - \frac{5}{6} = \frac{x}{3} - \frac{x}{5} + 1$

e) $x - \frac{3x}{4} + \frac{1}{10} = \frac{4x}{5} - \frac{x}{2}$

SOLUCIONES

1. a) 3 b) –2 c) 2 d) –1/3 e) 5/7 f) 11

2. a) 2 b) 4/5 c) 8 d) 2 e) –3/5

3. a) –1 b) 1/8 c) 6 d) 10 e) 3/8

4. a) 4/5 b) –1/3 c) –1/2 d) 5 e) 2

6

Procedimiento general para la resolución de ecuaciones de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado, conviene organizar el trabajo según las fases que se exponen en el siguiente ejemplo:

▼ **EJEMPLO**

- Primera fase:

  Quitar paréntesis. →
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}-3\left(1-\dfrac{x}{4}\right)=\dfrac{x}{8}-2\\[2ex]\dfrac{x}{2}-3+\dfrac{3x}{4}=\dfrac{x}{8}-2\end{array}\right.$$

- Segunda fase:

  Quitar denominadores.
  (Para ello, multiplicamos ambos miembros por 8). →
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{8x}{2}-24+\dfrac{24x}{4}=\dfrac{8x}{8}-16\\[2ex]4x-24+6x=x-16\end{array}\right.$$

- Tercera fase:

  Despejar la incógnita, reduciendo y transponiendo términos. →
$$\left\{\begin{array}{l}10x-24=x-16\\10x-x=24-16\\9x=8\;\rightarrow\;x=\dfrac{8}{9}\end{array}\right.$$

Actividades

1 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{3}{2}(1-x)+2=3x$

b) $2-\frac{1}{5}(2x-1)=\frac{7x}{10}$

c) $1-\frac{2x}{7}=x-2\left(x-\frac{1}{3}\right)$

d) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{1}{6}\left(x-\frac{3}{2}\right)+x$

e) $\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{3}\right)$

2 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{2x}{3}=\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}(2x-3)+1=\frac{1}{3}(x-5)-x$

c) $2\left(\frac{4x}{9}-\frac{7}{6}\right)+\frac{2x}{3}=1-\frac{2x}{3}$

3 Halla el valor de x en cada caso:

a) $5x-\left(\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(9x-\frac{1}{2}\right)$

b) $5-2\left(\frac{x}{5}+1\right)=\frac{x}{10}+3\left(\frac{x}{2}-1\right)$

SOLUCIONES

1. a) 7/9
b) 2
c) –7/15
d) 1/4
e) –5/6

2. a) 1
b) –7/10
c) 3/2

3. a) –1/5
b) 3

7 Resolución de problemas con ecuaciones

En la información que aporta el enunciado de un problema, encontramos elementos conocidos *(datos)* y elementos desconocidos *(incógnitas).*

Si conseguimos *codificar algebraicamente* todos esos elementos, y relacionarlos mediante una igualdad, habremos construido una *ecuación.*

Resolviendo la ecuación e interpretando las soluciones en el contexto del enunciado, habremos resuelto el problema.

En esta página, y en las siguientes, verás varios ejemplos del proceso a seguir.

Problemas resueltos

1. Al sumar la tercera parte de un número con su mitad, se obtiene 20. ¿De qué número se trata?

- PRIMER PASO:

Identificar los elementos del problema, expresando algebraicamente los que son desconocidos.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{El número} \longrightarrow x \\ \text{Su tercera parte} \longrightarrow \dfrac{x}{3} \\ \text{Su mitad} \longrightarrow \dfrac{x}{2} \end{array}\right.$$

- SEGUNDO PASO:

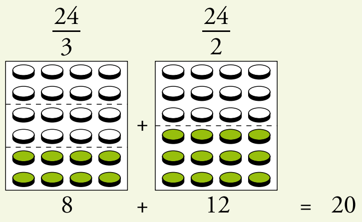
Expresar, con una igualdad, la relación que liga los elementos del problema.

$$\left\{\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c}\text{LA TERCERA}\\ \text{PARTE}\\ \text{DEL NÚMERO}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{LA MITAD}\\ \text{DEL}\\ \text{NÚMERO}\end{array}} = \boxed{20} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2} = 20 \end{array}\right.$$

- TERCER PASO:

Resolver la ecuación.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 20 \rightarrow \\ \rightarrow 2x + 3x = 120 \rightarrow 5x = 120 \rightarrow \\ \rightarrow x = \dfrac{120}{5} \rightarrow x = 24 \end{array}\right.$$



- CUARTO PASO:

Interpretar la solución de la ecuación dentro del enunciado del problema y comprobar si es correcta.

Solución: El número buscado es 24.

Comprobación:

$$\frac{24}{3} + \frac{24}{2} = 8 + 12 = 20$$

Actividades

1 Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25. ¿Qué número es?

2 Si a cierta cantidad le restas su tercera parte y le sumas su quinta parte, obtienes 13 como resultado. ¿Cuál es esa cantidad?

3 Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble. ¿De qué número se trata?

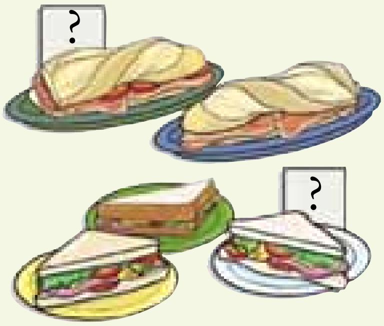
4 La suma de dos números consecutivos es 133. ¿Qué números son?

2. **La pandilla ha entrado a merendar en una bocadillería.**

Un bocadillo cuesta un euro más que un sándwich.

Por tres sándwiches y dos bocadillos, pagan 11 euros.

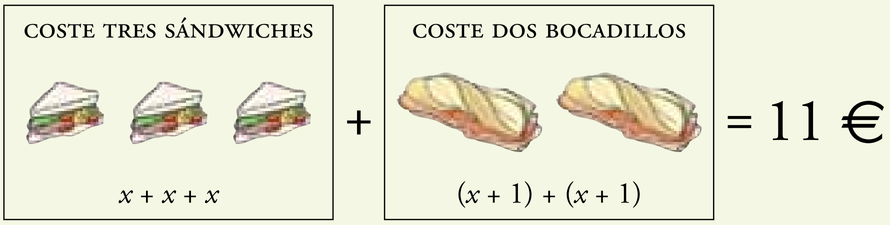
¿Cuánto cuesta un sándwich? ¿Y un bocadillo?



- PRIMER PASO: Identificar y codificar algebraicamente los elementos del problema.

$$\begin{cases} \text{Coste de un sándwich} \longrightarrow x \\ \text{Coste de un bocadillo} \longrightarrow x+1 \end{cases}$$

- SEGUNDO PASO: Relacionar, mediante una ecuación, los elementos que intervienen.



$$3x + 2(x+1) = 11$$

- TERCER PASO: Resolver la ecuación.

$$3x + 2(x+1) = 11$$

$$3x + 2x + 2 = 11$$

$$5x = 11 - 2 \rightarrow 5x = 9 \rightarrow x = \frac{9}{5}$$

- CUARTO PASO: Interpretar la solución dentro del contexto del problema y comprobar si es correcta.

Solución: Coste de un sándwich ⟶ $x = \frac{9}{5} = 1{,}80$ €

Coste de un bocadillo ⟶ $x + 1 = 1{,}80 + 1 = 2{,}80$ €

Comprobación:

Coste de tres sándwiches ⟶ $3 \cdot 1{,}80 =$ 5,40 €

Coste de dos bocadillos ⟶ $2 \cdot 2{,}80 =$ 5,60 €

Coste total ⟶ 11,00 €

Actividades

5 Un kilo de manzanas cuesta 0,50 € más que uno de naranjas.

Marta ha comprado tres kilos de naranjas y uno de manzanas por 5,30 €.

¿A cómo están las naranjas? ¿Y las manzanas?

$$\left.\begin{array}{l} \text{NARANJAS} \rightarrow x \\ \text{MANZANAS} \rightarrow x + 0{,}5 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{COSTE}\\ \text{3 KILOS}\\ \text{NARANJAS}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{COSTE}\\ \text{1 KILO}\\ \text{MANZANAS}\end{array}} = 5{,}30 \text{ €}$$

6 Rosa tiene 25 años menos que su padre, Juan, y 26 años más que su hijo Alberto.

Entre los tres suman 98 años.

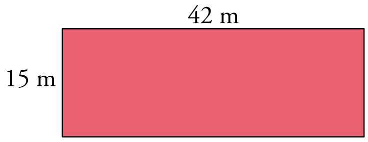
¿Cuál es la edad de cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} \text{ROSA} \rightarrow x \\ \text{JUAN} \rightarrow x + 25 \\ \text{ALBERTO} \rightarrow x - 26 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{EDAD}\\ \text{DE}\\ \text{ROSA}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{EDAD}\\ \text{DE}\\ \text{JUAN}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{EDAD}\\ \text{DE}\\ \text{ALBERTO}\end{array}} = 98 \text{ años}$$

Recuerda

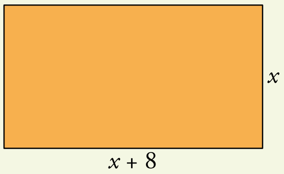
El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de los lados.



$P = 15 + 42 + 15 + 42 = 114$ m

3. La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 56 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

- PRIMER PASO: Codificar algebraicamente los elementos.



Lado menor $\longrightarrow$ x

Lado mayor $\longrightarrow$ $x + 8$

Perímetro $\longrightarrow$ 56 cm

- SEGUNDO PASO: Construir la ecuación.

$$\boxed{\text{SUMA DE LOS LADOS}} = \boxed{\text{PERÍMETRO}}$$

$$x + (x + 8) + x + (x + 8) = 56$$

- TERCER PASO: Resolver la ecuación.

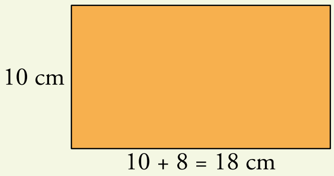
$$x + (x + 8) + x + (x + 8) = 56$$

$$x + x + 8 + x + x + 8 = 56$$

$$4x + 16 = 56 \;\rightarrow\; 4x = 40 \;\rightarrow\; x = 10$$

- CUARTO PASO: Interpretar y comprobar la solución.

Solución:

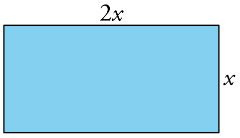


Comprobación:

Perímetro → 10 + 18 + 10 + 18 = 56 cm

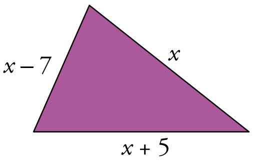
Actividades

7 Se han necesitado 150 metros de alambrada para cercar una finca rectangular que es el doble de larga que de ancha. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?



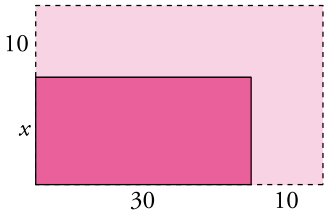
8 En un triángulo escaleno, el lado mediano mide 7 cm más que el lado menor y 5 cm menos que el lado mayor.

Si el perímetro mide 52 cm, ¿cuál es la longitud de cada lado?



9 De una parcela rectangular se ceden, para calles, 10 m a lo largo y otros 10 m a lo ancho, con lo que la parcela pierde una superficie de 480 m^2.

Si el rectángulo resultante tiene una longitud de 30 m, ¿cuál es su anchura?



SUPERFICIE ORIGINAL $\longrightarrow$ $40 \cdot (x + 10)$

SUPERFICIE RESULTANTE $\rightarrow$ $30 \cdot x$

SUPERFICIE PERDIDA $\rightarrow$ $40 \cdot (x + 10) - 30 \cdot x$

$\rightarrow$ 480 m^2

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Ecuaciones sencillas

1 ▼▽▽ Resuelve mentalmente.

a) $x + 4 = 5$ b) $x - 3 = 6$ c) $7 + x = 10$

d) $7 - x = 5$ e) $9 = 15 - x$ f) $2 - x = 9$

2 ▼▽▽ Resuelve.

a) $2x - 5 + 3x + 1 = 3x - 2$

b) $x + 7 = 12x - 3 - 8x + 1$

c) $6x - 1 + x = 4 - 5x + 3$

d) $x + 2x + 3x - 5 = 4x - 9$

e) $5x + 4 - 6x = 7 - x - 3$

f) $4x + 2 + 7x = 10x + 3 + x$

3 ▼▽▽ Quita paréntesis y resuelve.

a) $6(x + 1) - 4x = 5x - 9$

b) $18x - 13 = 8 - 4(3x - 1)$

c) $3x + 5(2x - 1) = 8 - 3(4 - 5x)$

d) $5 - (4x + 6) = 3x + (7 - 4x)$

e) $x - 7(2x + 1) = 2(6 - 5x) - 13$

f) $11 - 5(3x + 2) + 7x = 1 - 8x$

g) $13x - 5(x + 2) = 4(2x - 1) + 7$

Ecuaciones de primer grado con denominadores

4 ▼▽▽ Quita denominadores y resuelve.

a) $x + \frac{1}{3} = \frac{x}{3}$ b) $\frac{5x}{3} + 1 = \frac{5}{6} + x$

c) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{7x}{10} - \frac{1}{5}$ d) $\frac{x}{3} + \frac{4}{15} - x = \frac{1}{6} - \frac{7x}{10}$

e) $\frac{7x}{4} - 1 - \frac{x}{8} = x + \frac{5x}{8} + 1$

f) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

5 ▼▽▽ Elimina los paréntesis y los denominadores y resuelve.

a) $2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)$ b) $\frac{5}{6}(2x - 1) - x = \frac{x}{6}$

c) $\frac{x}{5} - 1 = 2\left(x - \frac{4}{5}\right)$ d) $x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(2x - 5)$

6 ▼▼▽ Elimina denominadores y resuelve.

a) $1 - \frac{x + 1}{3} = 2x - \frac{1}{3}$

b) $1 - \frac{1 - x}{3} = x + \frac{1}{2}$

c) $\frac{3x - 1}{2} - 1 = 2x - 2$

d) $x + \frac{2 - 3x}{5} = \frac{x}{2} + 1$

e) $2x + \frac{x - 3}{2} = \frac{x - 3}{4}$

f) $\frac{3x}{5} - 1 = x - \frac{x + 1}{2}$

g) $\frac{x + 3}{5} - \frac{x - 6}{7} = 1$

h) $\frac{1 - x}{3} - \frac{x - 1}{12} = \frac{3x - 1}{4}$

Resuelve problemas con ecuaciones de primer grado

7 ▼▽▽ Busca un número cuyo doble más tres unidades sea igual a su triple menos cinco unidades.

8 ▼▽▽ Multiplicando un número por 5, se obtiene el mismo que sumándole 12.

¿Cuál es ese número?

9 ▼▽▽ La suma de dos números es 167, y su diferencia, 19.

¿Cuáles son esos números?

10 ▼▽▽ Calcula el número natural que sumado a su siguiente da 157.

EL NÚMERO $\rightarrow x$

SU SIGUIENTE $\rightarrow x + 1$

11 ▼▽▽ La suma de tres números consecutivos es 135.

¿Cuáles son esos números?

12 ▼▽▽ Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.

ANTONIO $\rightarrow x - 7$; TERESA $\rightarrow x$; BLANCA $\rightarrow x + 2$

13 ▼▽▽ Una ensaimada cuesta 10 céntimos más que un cruasán. Tres cruasanes y cuatro ensaimadas han costado 6 euros.

¿Cuál es el coste de cada pieza?

14 ▼▽▽ Narciso ha comprado en las rebajas dos pantalones y tres camisetas por 161 €.

¿Cuál era el precio de cada artículo, sabiendo que un pantalón costaba el doble que una camiseta?

15 ▼▽▽ Reparte 280 € entre tres personas, de forma que la primera reciba el triple que la segunda, y esta, el doble que la tercera.

1.ª PERSONA → $6x$
2.ª PERSONA → $2x$
3.ª PERSONA → x

16 ▼▼▽ Tres agricultores reciben una indemnización de 100 000 € por la expropiación de terrenos para la construcción de una autopista.

¿Cómo han de repartirse el dinero, sabiendo que el primero ha perdido el doble de terreno que el segundo, y este, el triple de terreno que el tercero?

17 ▼▼▽ En la caja de un supermercado hay 1 140 euros repartidos en billetes de 5, 10, 20 y 50 euros. Sabiendo que:

— Hay el doble de billetes de 5 € que de 10 €.

— De 10 € hay la misma cantidad que de 20 €.

— De 20 € hay seis billetes más que de 50 €.

¿Cuántos billetes de cada clase tiene la caja?

18 ▼▽▽ Se han repartido 500 litros de gasóleo, a partes iguales, en dos barriles.

¿Cuántos litros se han de pasar de uno al otro para que el segundo quede con el triple de cantidad que el primero?

19 ▼▼▽ Un hortelano siembra la mitad de su huerta de pimientos; la tercera parte, de tomates, y el resto, que son 200 m^2, de patatas. ¿Qué superficie tiene la huerta?

SUPERFICIE HUERTA → x
PIMIENTOS → $x/2$
TOMATES → $x/3$
PATATAS → 200 m^2

20 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

Joaquín tiene 14 años; su hermana, 16, y su madre, 42. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre ambos hijos igualen la edad de la madre?

	EDAD HOY	EDAD DENTRO DE x AÑOS
JOAQUÍN	14	$14 + x$
HERMANA	16	$16 + x$
MADRE	42	$42 + x$

Dentro de x años, debe ocurrir que:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{EDAD DE}\\ \text{JOAQUÍN}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{EDAD DE}\\ \text{LA HERMANA}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{EDAD DE}\\ \text{LA MADRE}\end{array}}$$

$$(14 + x) + (16 + x) = 42 + x$$

$$2x + 30 = 42 + x \rightarrow x = 12$$

Solución: Deben transcurrir 12 años.

21 ▼▼▽ Un padre tiene 38 años, y su hijo, 11. ¿Cuántos años han de transcurrir para que el padre tenga solo el doble de edad que el hijo?

22 ▼▼▽ Dos ciclistas parten simultáneamente; uno, de A hacia B, a la velocidad de 24 km/h, y el otro, de B hacia A, a 16 km/h. Si la distancia entre A y B es de 30 km, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

TIEMPO HASTA EL ENCUENTRO → x (horas)
DISTANCIA RECORRIDA POR EL PRIMERO → $24x$
DISTANCIA RECORRIDA POR EL SEGUNDO → $16x$

23 ▼▼▽ Un ciclista sale de cierta población, por carretera, a la velocidad de 22 km/h. Hora y media después, sale en su búsqueda un motorista a 55 km/h. ¿Cuánto tardará en darle alcance?

24 ▼▼▽ Se han pagado 66 € por una prenda que estaba rebajada un 12%. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

PRECIO ORIGINAL → x
REBAJA → $\dfrac{12x}{100}$
ECUACIÓN → $x - \dfrac{12x}{100} = 66$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

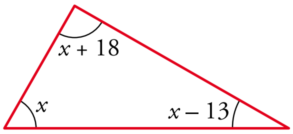
25 ▼▼▽ Laura ha comprado una falda y una blusa por 66 €. Ambas tenían el mismo precio, pero en la falda le han hecho un 20% de rebaja, y en la blusa, solo un 15%. ¿Cuánto costaba cada prenda?

26 ▼▼▽ Para delimitar en una playa una zona rectangular, el doble de larga que de ancha, se han necesitado 84 m de cinta.

¿Cuáles son las dimensiones del sector delimitado?

27 ▼▼▽ La amplitud de uno de los ángulos de un triángulo es 13 grados mayor y 18 grados menor, respectivamente, que las amplitudes de los otros dos ángulos.

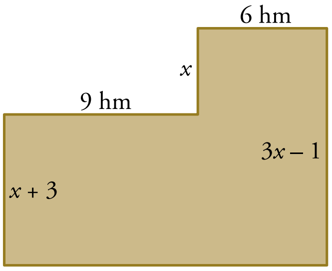
Calcula la medida de cada ángulo.



Analiza y exprésate

28 ▼▼▽ Estudia el problema siguiente y explica cómo se ha construido la ecuación:

Calcula el perímetro de esta finca, sabiendo que tiene una superficie de 129 hectáreas.



Resolución

$15 \cdot (3x - 1) - 9x = 129$

$45x - 15 - 9x = 129$

$36x = 144 \rightarrow x = 4$

Perímetro = 9 + 4 + 6 + 11 + 15 + 7 = 52 hm

Autoevaluación

¿Reconoces si un valor es solución de una ecuación?

1 ¿Cuál de los valores $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 9$, $x = -1/2$ es solución de la ecuación $\frac{x^2 - 1}{5} = \sqrt{x} + 1$?

¿Resuelves ecuaciones sencillas, sin denominadores? ¿Y con denominadores?

2 Despeja la incógnita y resuleve la ecuación.

a) $x + 4 = 3$

b) $3 = x - 2$

c) $5 - x = 3$

d) $20 = 5x$

3 Resuelve.

a) $7x - 3 - 2x = 6 + 3x + 1$

b) $1 - 4x - 6 = x - 3 \cdot (2x - 1)$

4 Resuelve.

a) $1 - \frac{x}{5} = x + \frac{2}{5}$

b) $x - \frac{1}{2} = \frac{5x}{8} - \frac{3}{4}$

c) $\frac{2x}{3} - 4\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{15}$

¿Utilizas las ecuaciones como herramientas para resolver problemas?

5 Si la tercera parte de un número le sumas su cuarta parte, obtienes 14. ¿Cuál es el número?

6 Por seis tortas y cuatro bollos, Raquel ha pagado seis euros. Averigua el precio de unas y otros, sabiendo que una torta cuesta el doble que un bollo.

7 Sistemas de ecuaciones

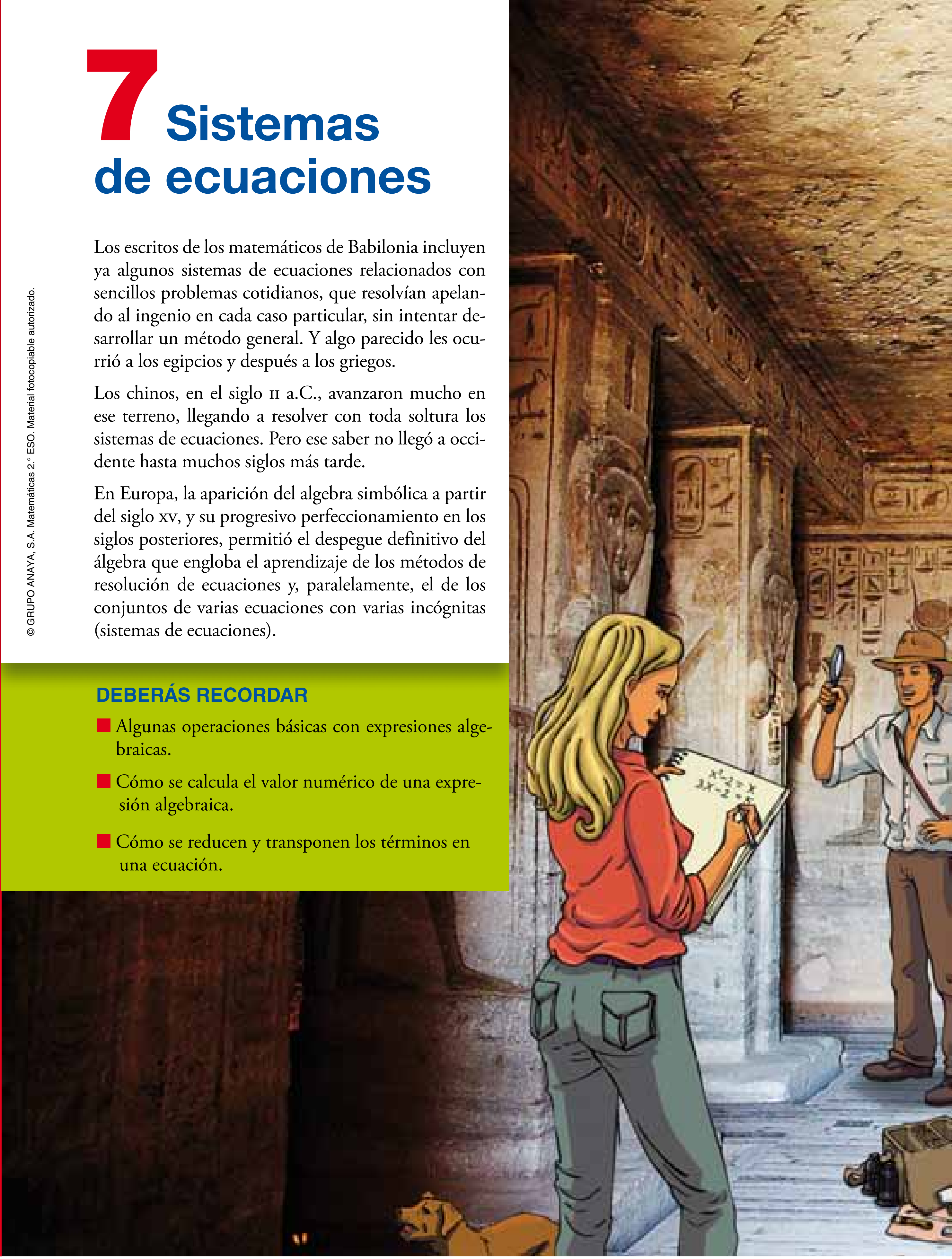
Los escritos de los matemáticos de Babilonia incluyen ya algunos sistemas de ecuaciones relacionados con sencillos problemas cotidianos, que resolvían apelando al ingenio en cada caso particular, sin intentar desarrollar un método general. Y algo parecido les ocurrió a los egipcios y después a los griegos.

Los chinos, en el siglo II a.C., avanzaron mucho en ese terreno, llegando a resolver con toda soltura los sistemas de ecuaciones. Pero ese saber no llegó a occidente hasta muchos siglos más tarde.

En Europa, la aparición del algebra simbólica a partir del siglo XV, y su progresivo perfeccionamiento en los siglos posteriores, permitió el despegue definitivo del álgebra que engloba el aprendizaje de los métodos de resolución de ecuaciones y, paralelamente, el de los conjuntos de varias ecuaciones con varias incógnitas (sistemas de ecuaciones).

DEBERÁS RECORDAR

- Algunas operaciones básicas con expresiones algebraicas.
- Cómo se calcula el valor numérico de una expresión algebraica.
- Cómo se reducen y transponen los términos en una ecuación.



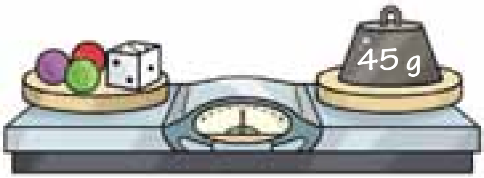
1

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas expresa la relación existente entre dos valores desconocidos.

▼ **EJEMPLO**

En la siguiente balanza, no conocemos ni el peso de una pelota (x) ni el del dado (y):



Pero podemos afirmar que:

$$3x + y = 45$$

Observa que el par de valores $x = 10$, $y = 15$ hace cierta la igualdad:

$$3 \cdot 10 + 15 = 45$$

Decimos entonces que ese par de valores es una solución de la ecuación. Sin embargo, la solución no es única. Observa que hay otros pares que también verifican la igualdad:

$$\left.\begin{matrix} x = 5 \\ y = 30 \end{matrix}\right\} \; 3 \cdot 5 + 30 = 45 \qquad \left.\begin{matrix} x = 8 \\ y = 21 \end{matrix}\right\} \; 3 \cdot 8 + 21 = 45$$

Por tanto, si quisiéramos determinar los pesos de una pelota y del dado, necesitaríamos más datos.

En realidad, dando a x un valor cualquiera, se obtiene un valor correspondiente para y; es decir, la ecuación tiene infinitas soluciones.

Forma general

Toda ecuación lineal puede escribirse en la forma

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son valores conocidos.

- Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas reciben el nombre de **ecuaciones lineales.**
- Una **solución de una ecuación lineal** es un par de valores que hace cierta la igualdad.
- Una ecuación lineal tiene **infinitas soluciones.**

Actividades

1 Averigua cuáles de los siguientes pares de valores son soluciones de la ecuación $3x - 4y = 8$.

a) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1/4 \end{cases}$

2 Busca tres soluciones diferentes de esta ecuación:

$$2x - y = 5$$

3 Copia y completa en tu cuaderno la tabla, con soluciones de la ecuación $3x + y = 12$.

x	0		3		5	–1		–3
y		9		0			18	

4 Reduce a la forma general las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = y$

b) $y = \dfrac{x + 1}{2}$

c) $x - 3 = 2(x + y)$

d) $\dfrac{x - y}{3} = \dfrac{x - 1}{5}$

Representación gráfica de una ecuación lineal

Para obtener distintas soluciones de una ecuación lineal, se suele despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra.

Los valores se recogen, ordenados, en una tabla.

Tomemos, por ejemplo, la ecuación relativa a la balanza de la página anterior:

$$3x + y = 45$$

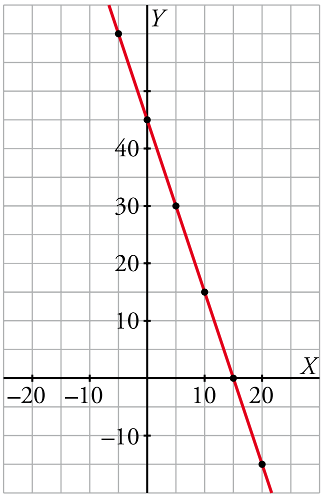
$\downarrow$ Despejamos y.

$$y = 45 - 3x$$

$\downarrow$ Dando distintos valores a x, obtenemos los correspondientes de y.

x	0	5	10	15	20	–5	…
y	45	30	15	0	–15	60	…

Al representar estos valores en el plano, quedan alineados en una recta.



- Cada ecuación lineal tiene una recta asociada en el plano.
- Cada punto de esa recta representa una de las infinitas soluciones de la ecuación lineal.

Ejercicio resuelto

Representar gráficamente la ecuación $3x - 2y - 6 = 0$.

- Despejamos y para construir la tabla de valores:

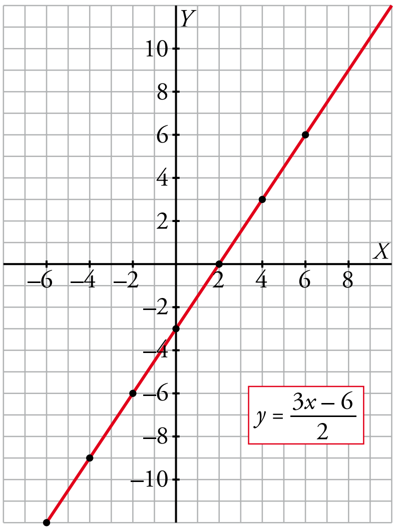
$$3x - 2y - 6 = 0$$

$$3x - 6 = 2y$$

$$y = \frac{3x - 6}{2}$$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y	–12	–9	–6	–3	0	3	6	…

- A la izquierda puedes ver la representación gráfica.



Actividades

5 Completa la tabla para cada ecuación y representa la recta correspondiente (hazlo en tu cuaderno).

a) $x - y = 0 \rightarrow y = x$

b) $x - 2y = 2 \rightarrow y = \dfrac{x - 2}{2}$

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	…
y								…

6 Representa gráficamente.

a) $2x - y = 1$

b) $2x + y = 1$

c) $y = \dfrac{x}{2} + 3$

d) $y = \dfrac{x}{2} - 1$

e) $x + 3y = 3$

f) $2x - 3y - 3 = 0$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

- Dos ecuaciones lineales forman un **sistema:** $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
- La **solución del sistema** es la solución común a ambas ecuaciones.

EJEMPLO

Las dos ecuaciones siguientes forman un sistema: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

Observa las tablas de soluciones de cada ecuación:

$3x - y = 3 \;\rightarrow\; y = 3x - 3$

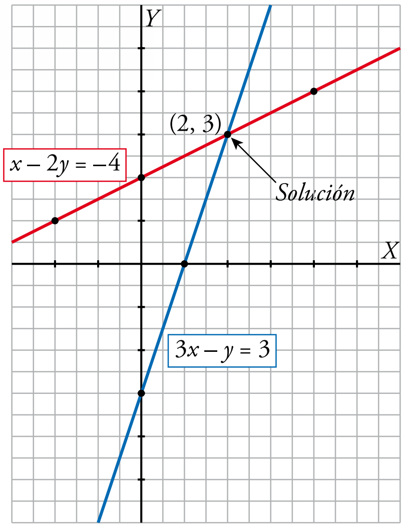
x	–1	0	1	2	3	…
y	–6	–3	0	3	6	…

$x - 2y = -4 \;\rightarrow\; y = \dfrac{x + 4}{2}$

x	–2	0	2	4	6	…
y	1	2	3	4	5	…

La solución del sistema es el par de valores $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ que satisface ambas ecuaciones.

Observa, en la representación gráfica, que las dos rectas pasan por el punto (2, 3); es decir, se cortan en dicho punto.



SOLUCIÓN DEL SISTEMA: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

La *solución de un sistema* de ecuaciones lineales coincide con el *punto de corte* de las rectas que representan a las ecuaciones.

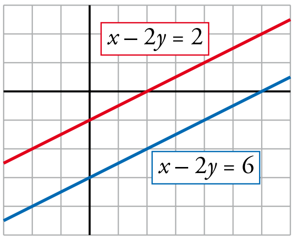
Casos especiales

SISTEMAS SIN SOLUCIÓN

Las ecuaciones son incompatibles.

Las rectas son paralelas.

Por ejemplo: $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

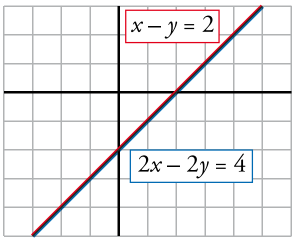


SISTEMAS CON INFINITAS SOLUCIONES

Las ecuaciones son equivalentes.

Las rectas se superponen.

Por ejemplo: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$



Actividades

1 Representa gráficamente y escribe la solución.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2 + x/2 \\ y = 4 - x/2 \end{cases}$

2 Representa gráficamente.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$

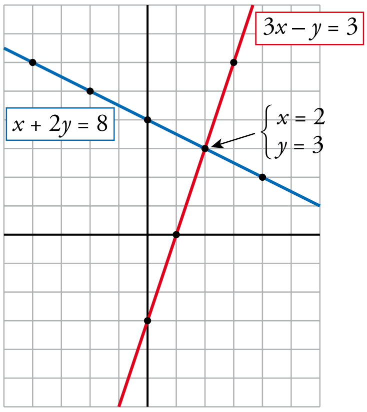
3 Método algebraico para la resolución de sistemas lineales

Vamos a aprender una técnica para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en obtener, a partir de las dos ecuaciones, otra *ecuación con una sola incógnita*. Resuelta esta, es fácil obtener el valor de la otra incógnita.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación.

Ejercicio resuelto



Resolver por sustitución este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x - \ \ y = 3} \\ \mathbf{x + 2y = 8} \end{cases}$

a) Despejamos, por ejemplo, x en la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 3x - \ \ y = 3 \\ x + 2y = 8 \rightarrow x = \boxed{8 - 2y} \end{cases}$$

b) Sustituimos la expresión obtenida en la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y = 3 \\ x = 8 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow 3\underbrace{(8 - 2y)} - y = 3$$

c) Ya tenemos una ecuación con una sola incógnita. La resolvemos:

$$3(8 - 2y) - y = 3 \rightarrow 24 - 6y - y = 3 \rightarrow 7y = 21 \rightarrow y = \frac{21}{7} \rightarrow \boxed{y = 3}$$

d) Sustituimos el valor $y = 3$ en la expresión obtenida al despejar x, y calculamos:

$$x = 8 - 2y \rightarrow x = 8 - 2 \cdot 3 \rightarrow \boxed{x = 2}$$

Solución del sistema → $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Actividades

1 Resuelve por sustitución y comprueba que obtienes las soluciones que se adjuntan abajo.

a) $\begin{cases} y = x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 3$ b) $x = 4$, $y = 2$ c) $x = 9$, $y = 10$ d) $x = 2$, $y = -1$

2 Resuelve por sustitución y comprueba las soluciones que se ofrecen.

a) $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - \ \ y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 1 \\ 5x - 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - \ \ y = 3 \\ 7x - 3y = 5 \end{cases}$

SOLUCIONES

a) $x = 3$, $y = 4$ b) $x = 3$, $y = 5$ c) $x = 5$, $y = -2$ d) $x = -1$, $y = -4$

4 Resolución de problemas con ayuda de los sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones suponen una potente herramienta para resolver problemas.

Estudia con detenimiento los ejemplos que tienes a continuación, pues representan **problemas tipo** que te servirán de modelo para resolver otros similares.

Problemas resueltos

1. Pepa tiene 5 años más que su hermano Enrique, y entre los dos suman 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

a) Identifica los elementos del problema y codifícalos algebraicamente:

EDAD DE PEPA → x

EDAD DE ENRIQUE → y

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre esos elementos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{PEPA TIENE 5 AÑOS MÁS QUE ENRIQUE.} \rightarrow x = y + 5 \\ \text{LA SUMA DE LAS EDADES ES 21.} \rightarrow x + y = 21 \end{array}\right\}$$

c) Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 5 \\ x + y = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \underbrace{(y + 5)}_{x} + y = 21 \rightarrow 2y + 5 = 21 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2y = 21 - 5 \rightarrow 2y = 16 \rightarrow \boxed{y = 8}$$

$$x = y + 5 \rightarrow x = 8 + 5 \rightarrow \boxed{x = 13}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:

Solución: Pepa tiene 13 años, y su hermano, 8 años.

Comprobación: $\begin{cases} 13 = 8 + 5 \\ 13 + 8 = 21 \end{cases}$

Actividades

1 En una clase hay 29 alumnos y alumnas, pero el número de chicas supera en tres al de chicos.

¿Cuántos alumnos y cuántas alumnas hay en la clase?

CHICOS → x CHICAS → y

$$\left.\begin{array}{l} \text{CHICOS + CHICAS} = 29 \\ \text{CHICAS = CHICOS} + 3 \end{array}\right\}$$

2 La suma de dos números es 12, y el triple del menor supera en una unidad al doble del mayor.

¿Cuáles son esos números?

N.° MENOR → x N.° MAYOR → y

$$\left.\begin{array}{l} \text{MENOR + MAYOR} = 12 \\ \text{TRIPLE DEL MENOR = DOBLE DEL MAYOR} + 1 \end{array}\right\}$$

2. **La semana pasada, dos entradas para el cine y una caja de palomitas nos costaron 10 €.**

Hoy, por cuatro entradas y tres cajas de palomitas hemos pagado 22 €.

¿Cuánto cuesta una entrada? ¿Y una caja de palomitas?

a) Identifica y codifica algebraicamente los elementos del problema:

PRECIO DE UNA ENTRADA → x

PRECIO DE UNA CAJA DE PALOMITAS → y

b) Expresa, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre los elementos:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{COSTE DE 2 ENTRADAS}\\ \text{Y 1 CAJA DE PALOMITAS}\end{array}\right\} < \begin{array}{l}2x+y\\ 10\text{ €}\end{array} \to 2x+y=10\\ \left.\begin{array}{l}\text{COSTE DE 4 ENTRADAS}\\ \text{Y 3 CAJAS DE PALOMITAS}\end{array}\right\} < \begin{array}{l}4x+3y\\ 22\text{ €}\end{array} \to 4x+3y=22\end{array}\right\}$$

c) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}2x+y=10\\ 4x+3y=22\end{array}\right\} \longrightarrow y=10-2x$$

$$4x+3(10-2x)=22 \to 4x+30-6x=22 \to 2x=8 \to \boxed{x=4}$$

$$y=10-2\cdot 4 \to \boxed{y=2}$$

d) Interpreta la solución en el contexto del problema y compruébala:

Solución: Una entrada cuesta 4 €, y una caja de palomitas, 2 €.

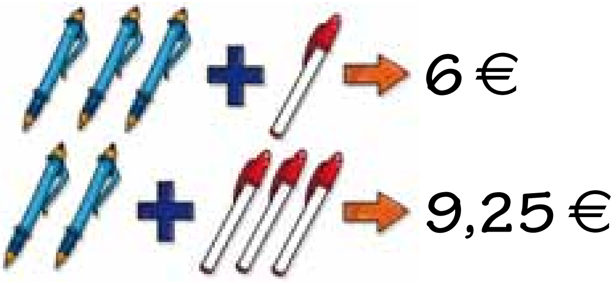
Comprobación: $\begin{cases}2\cdot 4+1\cdot 2=8+2=10\\ 4\cdot 4+3\cdot 2=16+6=22\end{cases}$

Actividades

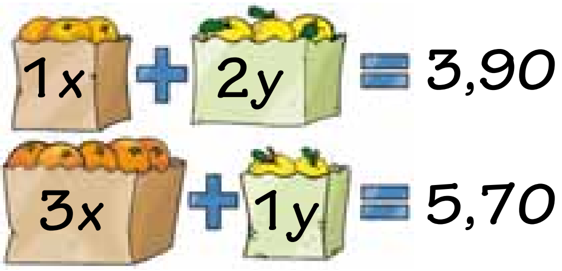
3 He comprado tres bolígrafos y un rotulador por 6 €.

Mi amiga Rosa ha pagado 9,25 € por dos bolígrafos y tres rotuladores.

¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Y un rotulador?



4 En la frutería, un cliente ha pagado 3,90 € por un kilo de naranjas y dos de manzanas. Otro cliente ha pedido tres kilos de naranjas y uno de manzanas, y ha pagado 5,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo de naranjas? ¿Y uno de manzanas?



Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

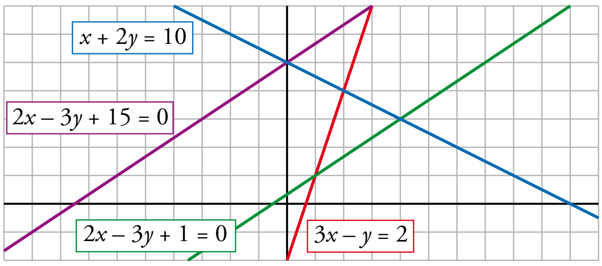
Sistemas de ecuaciones. Resolución gráfica

1 ▼▽▽ Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - y = -3 \end{cases}$

2 ▼▽▽ Observa el gráfico y responde.



a) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 2$, $y = 4$.

b) Escribe un sistema cuya solución sea $x = 0$, $y = 5$.

c) Escribe un sistema sin solución.

Sistemas de ecuaciones. Resolución algebraica

3 ▼▽▽ Resuelve por sustitución despejando la incógnita más adecuada.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = -5 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$

Resuelve problemas con sistemas de ecuaciones

4 ▼▽▽ La suma de dos números es 57, y su diferencia, 9.

¿Cuáles son esos números?

5 ▼▽▽ Entre Alejandro y Palmira llevan 15 euros. Si él le diera a ella 1,5 €, ella tendría el doble.

¿Cuánto lleva cada uno?

6 ▼▽▽ Un ciclista sube un puerto y, después, desciende por el mismo camino. Sabiendo que en la subida ha tardado 23 minutos más que en la bajada y que la duración total del paseo ha sido de 87 minutos, ¿cuánto ha tardado en subir? ¿Y en bajar?

7 ▼▽▽ En cierta cafetería, por dos cafés y un refresco nos cobraron el otro día 2,70 €. Hoy hemos tomado un café y tres refrescos y nos han cobrado 4,10 €.

¿Cuánto cuesta un café? ¿Y un refresco?

8 ▼▽▽ Un puesto ambulante vende los melones y las sandías a un tanto fijo la unidad. Andrea se lleva 5 melones y 2 sandías, que le cuestan 13 €. Julián paga 12 € por 3 melones y cuatro sandías.

¿Cuánto cuesta un melón? ¿Y una sandía?

9 ▼▼▽ Una tienda de artículos para el hogar pone a la venta 100 juegos de cama a 70 € el juego. Cuando lleva vendida una buena parte, los rebaja a 50 €, continuando la venta hasta que se agotan. La recaudación total ha sido de 6 600 €.

¿Cuántos juegos ha vendido sin rebajar y cuántos rebajados?

10 ▼▼▽ En el zoo, entre búfalos y avestruces hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos búfalos son? ¿Y avestruces?

☞ *Búfalos* → x
Avestruces → y
Patas de búfalo → $4x$
Patas de avestruz → $2y$

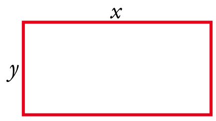
11 ▼▼▽ Cristina tiene el triple de edad que su prima María, pero dentro de diez años solo tendrá el doble. ¿Cuál es la edad de cada una?

☞

	HOY	**DENTRO DE 10 AÑOS**
CRISTINA	x	$x + 10$
MARÍA	y	$y + 10$

12 ▼▼▽ La base de un rectángulo es 8 cm más larga que la altura, y el perímetro mide 42 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo.

☞



Diferencia entre los lados:

$x - y = 8$

Perímetro: $x + y + x + y = 42$

13 ▼▼▽ Para cercar una parcela rectangular, 25 metros más larga que ancha, se han necesitado 210 metros de alambrada. Calcula las dimensiones de la parcela.

Analiza y describe. Exprésate

14 ▼▼▽ A continuación tienes un problema resuelto de dos formas. Indica sus diferencias e incluye las explicaciones oportunas para aclarar su desarrollo.

Un camión parte de cierta población a 90 km/h. Diez minutos después sale un coche a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda en alcanzarlo y la distancia recorrida desde el punto de partida.

Solución A

	VELOCIDAD	TIEMPO	DISTANCIA
COCHE	110	x	y
CAMIÓN	90	$x + 10/60$	y

$$\left.\begin{array}{l} y = 110x \\ y = 90(x + 1/6) \end{array}\right\} 110x = 90(x + 1/6) \left\}\begin{array}{l} x = 3/4 \text{ h} \\ y = 82{,}5 \text{ km} \end{array}\right.$$

Solución: Tarda 45 minutos y recorren 82,5 km.

Solución B

Distancia coche → d

Tiempo coche → distancia/velocidad = $d/100$

Tiempo camión → distancia/velocidad = $d/90$

$$\boxed{\text{TIEMPO CAMIÓN}} = \boxed{\text{T. COCHE} + 1/6 \text{ h}}$$

$$\frac{d}{90} = \frac{d}{110} + \frac{1}{6} \rightarrow d = 82{,}5 \text{ km}$$

$$\text{T. coche} = \frac{d}{110} = \frac{82{,}5}{110} = \frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ min}$$

Autoevaluación

¿Representas en el plano ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?

1 Representa gráficamente las ecuaciones siguientes:

a) $y = 2x - 1$

b) $2x + 3y - 3 = 0$

¿Resuelves gráficamente sistemas de ecuaciones lineales?

2 Resuelve gráficamente este sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$$

¿Conoces y aplicas métodos algebraicos (sustitución, reducción, igualación) para resolver ecuaciones lineales?

3 Resuelve por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x - \ \ y = 6 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

¿Utilizas los sistemas de ecuaciones como herramientas para resolver problemas?

4 La suma de dos números es 977, y su diferencia, 31. ¿Cuáles son esos números?

5 En la cafetería, ayer pagamos 3 € por dos cafés y una tostada. Sin embargo, hoy nos han cobrado 6,30 € por tres cafés y tres tostadas. ¿Cuánto cuesta un café y cuánto una tostada?

8 Teorema de Pitágoras. Semejanza

Los teoremas de **Pitágoras** y de **Tales** son dos importantísimos resultados geométricos. Sin duda has oído hablar del primero, aunque, acaso, aún no conozcas el segundo. Ambos se estudian en esta unidad.

Tales y Pitágoras fueron dos grandes matemáticos de la Antigüedad (siglo VI a.C.). Impulsaron el pensamiento griego y crearon la matemática deductiva. Sin embargo, es curioso que ninguno de ellos demostró el teorema que lleva su nombre: ambos logros hay que atribuírselos a **Euclides.**

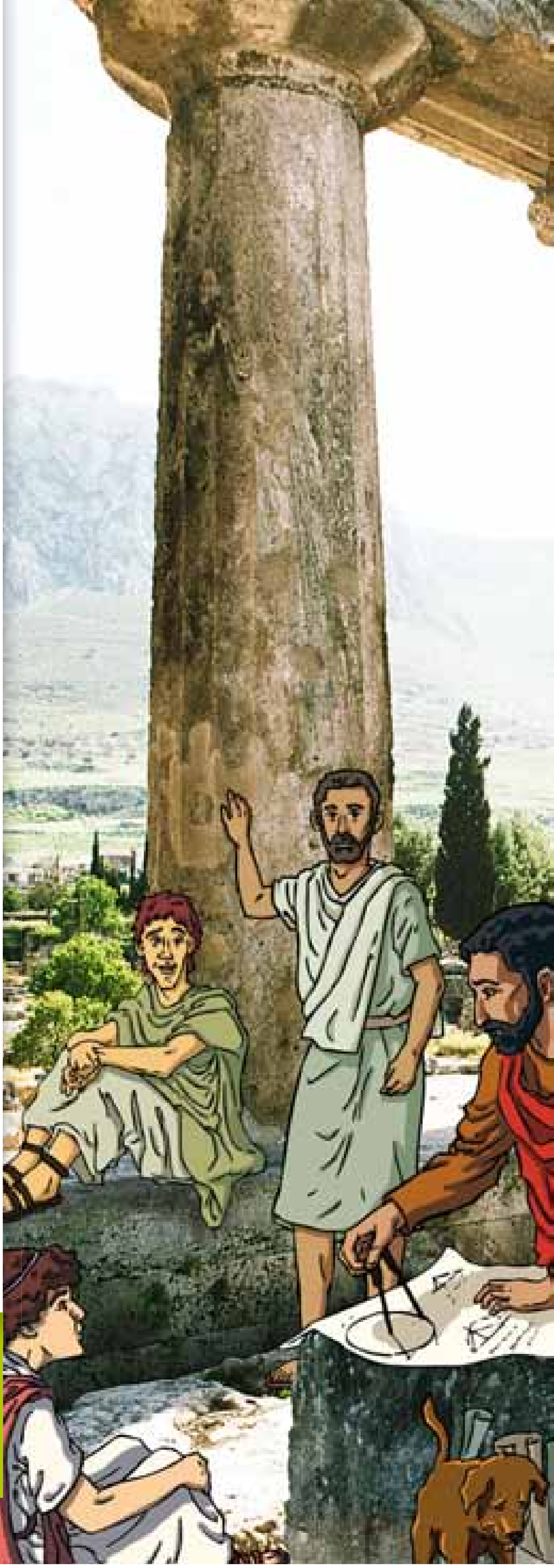
Tales, gran viajero, aprendió las matemáticas egipcias y babilonias. Se cuenta que calculó la altura de una de las pirámides midiendo su sombra y comparándola con la sombra arrojada por un bastón. Se trata de una aplicación del teorema que lleva su nombre. Pero no lo demostró.

Hace más de 3 000 años, tanto egipcios como babilonios manejaban triángulos rectángulos con lados de medidas enteras (3, 4 y 5 los egipcios; 5, 12 y 13 los babilonios) con los cuales construían ángulos rectos. Pitágoras conoció, indudablemente, estos resultados. Su mérito fue que enunció el teorema en forma general, relacionando las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de *cualquier* triángulo rectángulo.

Euclides de Alejandría escribió sus *Elementos* en torno al año 300 a.C. Se trata de un conjunto de 13 libros en los que recopila, amplía y organiza todo el saber matemático de su época, aportándole una sólida estructura lógica. En el libro I demuestra el que ahora llamamos *teorema de Pitágoras*. En el libro VI, el *teorema de Tales*.

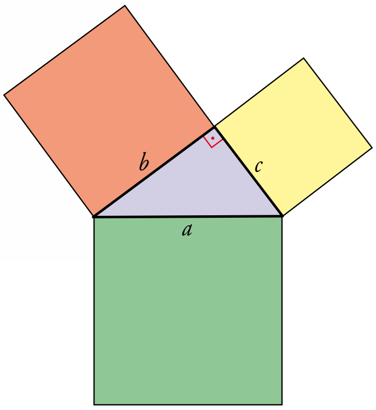
DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se describen los triángulos.
- Cómo se calculan las áreas de algunas figuras planas.



1

Teorema de Pitágoras. Aplicaciones



En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman **catetos.** El lado mayor se llama **hipotenusa.**

b y c son los **catetos.**

a es la **hipotenusa.**

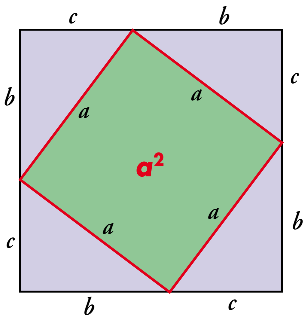
El **teorema de Pitágoras** dice que:

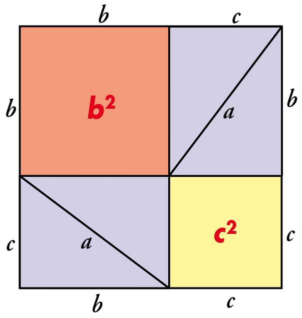
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Es decir, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Y esto es verdad solamente si el **triángulo** es **rectángulo.**

Para ver que es cierto, que siempre que el triángulo es rectángulo ocurre esto, analiza este curioso puzle:





Los dos cuadrados grandes, de lado $b + c$, son iguales. Si a cada uno de ellos le suprimimos cuatro triángulos iguales al triángulo inicial, queda:

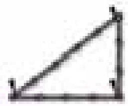
a^2 en el primero

$b^2 + c^2$ en el segundo

Por tanto, ha de ser $a^2 = b^2 + c^2$.

Son triángulos rectángulos

¿Recuerdas (página 207) el triángulo de cuerda con el que los egipcios construían ángulos rectos?



Puedes comprobar que, efectivamente, al sumar los cuadrados de los lados menores se obtiene el cuadrado del lado mayor:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Lo mismo ocurre con el triángulo babilonio:

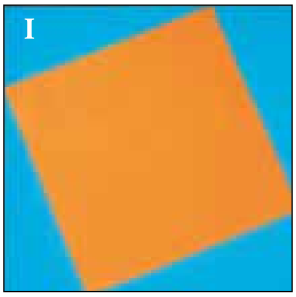
$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

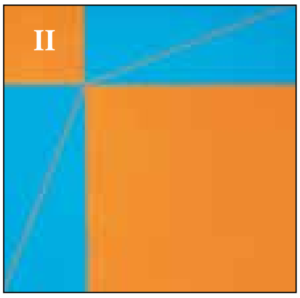
Actividades

1 Dibuja en un papel aparte un cuadrado como los de arriba, de lado $b + c$. Recórtalo.

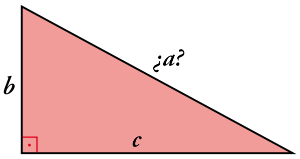
Dibuja cuatro triangulitos rectángulos iguales, de lados a, b y c. Recórtalos.

Situando los triangulitos sobre el cuadrado de una forma (I) u otra (II), podrás reproducir las dos composiciones que se dan arriba. Se demuestra, así, el teorema de Pitágoras.





Conociendo los dos catetos, calcular la hipotenusa

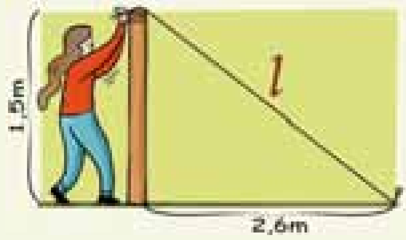


$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$\downarrow$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Si de un triángulo rectángulo conocemos los dos catetos, podemos **calcular la hipotenusa:** $a^2 = b^2 + c^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Problema resuelto

Para sostener un poste de 1,5 m de alto, lo sujetamos con una cuerda atada a 2,6 m de la base del poste. ¿Cuál es la longitud, *l*, de la cuerda?



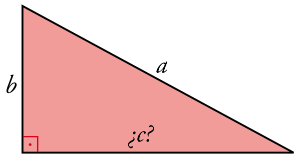
$l^2 = 1{,}5^2 + 2{,}6^2 = 9{,}01$

Si $l^2 = 9{,}01$, entonces $l = \sqrt{9{,}01}$.

Con calculadora obtenemos $l = 3{,}002$ m.

Solución: La cuerda mide 3 m, aproximadamente. Escribimos $l \approx 3$ m.

Conociendo la hipotenusa y un cateto, calcular el otro



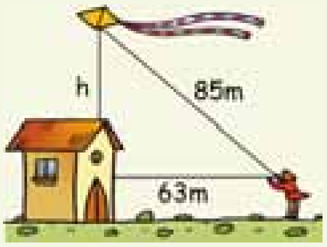
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$\downarrow$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Si de un triángulo rectángulo conocemos la hipotenusa y un cateto, podemos **calcular el otro cateto:**

$$a^2 = b^2 + c^2 \begin{array}{l} c^2 = a^2 - b^2 \;\rightarrow\; c = \sqrt{a^2 - b^2} \\ b^2 = a^2 - c^2 \;\rightarrow\; b = \sqrt{a^2 - c^2} \end{array}$$

Problema resuelto

La cuerda de una cometa mide 85 m, y esta se encuentra volando sobre una caseta que está a 63 m de Lucía. ¿A qué altura sobre el suelo está la cometa?



$h^2 + 63^2 = 85^2$

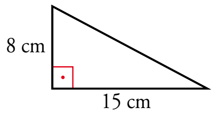
$h^2 = 85^2 - 63^2 = 7\,225 - 3\,969 = 3\,256$

$h = \sqrt{3\,256} \approx 57$ m

Solución: La altura es aproximadamente 57 m más la altura de la mano de Lucía.

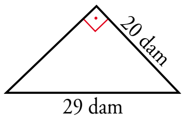
Actividades

2



Halla la longitud de la hipotenusa.

3



Halla la longitud del cateto desconocido.

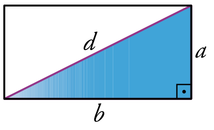
4 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 33 m y 27 m. Halla la longitud de la hipotenusa aproximando hasta los decímetros.

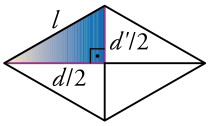
5 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 24 dm, y un cateto, 19 dm. Halla la longitud del otro cateto aproximando hasta los centímetros.

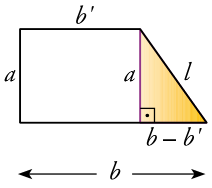
2 Más aplicaciones del teorema de Pitágoras

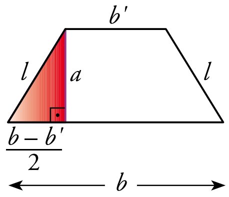
Hay multitud de figuras planas en las que aparecen triángulos rectángulos. Esto permite relacionar algunos de sus elementos mediante el teorema de Pitágoras.

Veamos algunos triángulos rectángulos detectados en cuadriláteros:





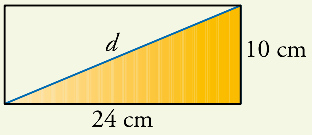




Ejercicios resueltos

1. Las dimensiones de un rectángulo son a = 10 cm, b = 24 cm. Calcular la longitud de la diagonal.

1.

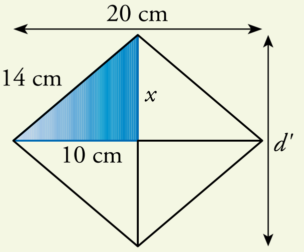


$d = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$

La diagonal mide 26 cm.

2. El lado de un rombo mide 14 cm, y una de sus diagonales, 20 cm. Hallar la longitud de la otra diagonal.

2.



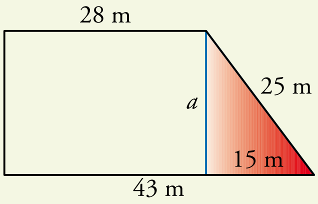
$x = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 9,797958\ldots$

$x \approx 9,8$ cm → $d' = 2 \cdot 9,8 = 19,6$ cm

La otra diagonal mide 19,6 cm.

3. Hallar la altura de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 43 m y 28 m, y el lado oblicuo, 25 m.

3.



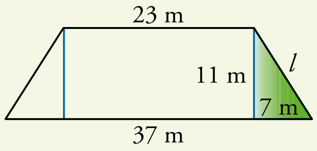
$43 - 28 = 15$

$a = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20$ m

La altura mide 20 m.

4. Las bases de un trapecio isósceles miden 23 m y 37 m. Su altura es de 11 m. Hallar su perímetro.

4.



$37 - 23 = 14;\ \ 14 : 2 = 7$

$l = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170} = 13,038\ldots \approx 13$ m

Perímetro = 23 + 37 + 13 + 13 = 86 m

El perímetro es 86 m.

Actividades

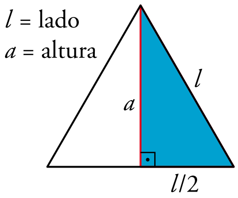
1 La diagonal de un rectángulo mide 65 cm, y uno de sus lados, 33 cm. Halla su perímetro.

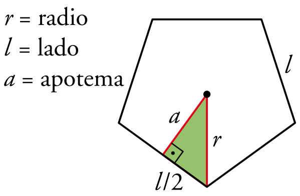
2 Las diagonales de un rombo miden 130 cm y 144 cm. Calcula su perímetro.

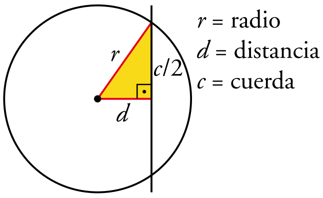
3 En un trapecio rectángulo, las bases miden 45 cm y 30 cm, y su altura, 8 cm. Halla su perímetro.

4 Halla la altura de un trapecio isósceles cuyas bases miden 8,3 m y 10,7 m, y el otro lado, 3,7 m.

Triángulos rectángulos en los polígonos regulares y en la circunferencia



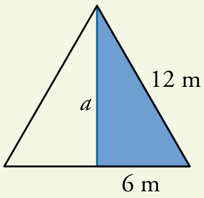




Ejercicios resueltos

1. Hallar la altura de un triángulo equilátero de 12 m de lado.

1.

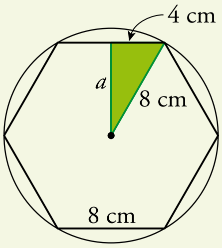


$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10,4$ m

La altura mide 10,4 m.

2. Hallar la apotema de un hexágono regular de 8 cm de lado.

2.



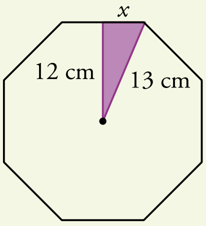
En un hexágono regular, el radio es igual al lado: $r = l$

$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6,9$ cm

La apotema mide 6,9 cm.

3. En un octógono regular, el radio mide 13 cm, y la apotema, 12 cm. Hallar su perímetro.

3.



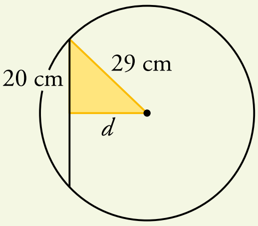
$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ cm

Lado $l = 2 \cdot 5 = 10$ cm; $10 \cdot 8 = 80$ cm

El perímetro es 80 cm.

4. En una circunferencia de radio 29 cm trazamos una cuerda de 40 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda?

4.



$c = 40$ cm $\rightarrow$ $c/2 = 20$ cm

$d = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21$ cm

La distancia es de 21 cm.

Actividades

5 Halla la altura de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 45 m.

6 Calcula la apotema de un hexágono regular de 37 cm de lado.

7 Calcula el perímetro de un pentágono regular de radio 21 cm y apotema 17 cm.

8 Una recta pasa a 28 cm de una circunferencia de 53 cm de radio. Halla la longitud de la cuerda que determina en ella.

3 Figuras semejantes

La maqueta de la moto de la izquierda es igual que la moto auténtica en forma, color, … en todo salvo en el tamaño. La moto y su maqueta son *figuras semejantes.* La *razón de semejanza* es 1:10, porque 1 dm de la maqueta corresponde a 10 dm = 1 m de la moto real.

Por lo mismo, el plano del circuito es semejante al circuito real. Y la fotografía es semejante al conjunto que formaban el director del equipo, el piloto y la moto en ese momento.

Veamos cuál es la razón de semejanza en el plano:

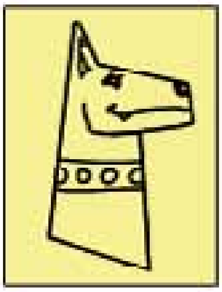
$$1 \text{ cm} \rightarrow 20 \text{ m} = 200 \text{ dm} = 2\,000 \text{ cm}$$

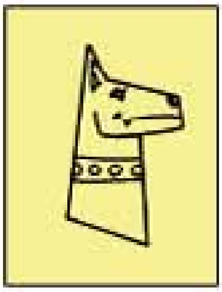
La razón de semejanza es 1:2 000. Se lee 1 es a 2 000, y quiere decir que cualquier longitud medida sobre el plano se multiplica por 2 000 para obtener la longitud real.

Dos **figuras** distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

▼ **EJEMPLO**

Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?





Si dividimos cualquier segmento de la segunda figura por el correspondiente de la primera, el cociente es 0,8.

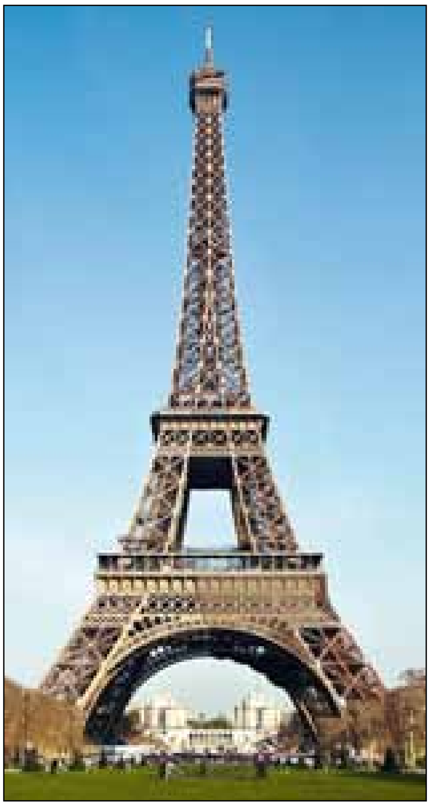
Por ejemplo: los de la izquierda $\rightarrow \dfrac{16}{20} = 0{,}8$

los de arriba $\rightarrow \dfrac{6{,}4}{8} = 0{,}8$

los de la derecha $\rightarrow \dfrac{10}{12{,}5} = 0{,}8$

Esta (0,8) es la razón de semejanza que transforma la primera figura en la segunda.

Las fotocopiadoras expresan la razón de semejanza en tantos por ciento. En este caso, es del 75%.



Problema resuelto

En las cercanías de la Torre Eiffel hay puestos en los que se venden reproducciones suyas de tamaños diversos. Nos fijamos en dos de ellas: una mide 30 cm de altura, y la otra, 12 cm de altura.

a) ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) El lado de la base de la mayor es 10 cm. ¿Cuál es el lado de la base de la pequeña?

c) Si el lado de la base de la auténtica Torre Eiffel es 108 m, ¿cuál es su altura?

a) Sí, son semejantes porque tienen la misma forma; es decir, solo difieren en el tamaño. La razón de semejanza es $\frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

b) $\frac{10}{30} = \frac{l}{12} \rightarrow l = \frac{12 \cdot 10}{30} = 4$ cm

Se podría haber obtenido así: $l = \frac{10}{2{,}5} = 4$ cm

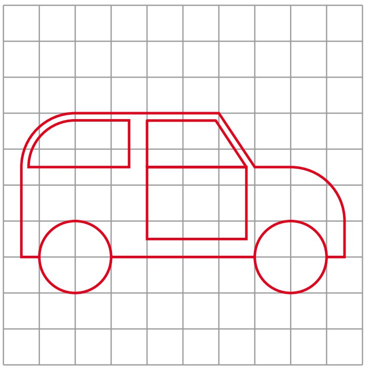
c) La relación $\frac{30}{10}$ entre la altura y el lado de la base se cumple también en la torre real.

$$\frac{\text{altura}}{108 \text{ m}} = \frac{30}{10} \rightarrow \text{altura} = \frac{30 \cdot 108}{10} = 324 \text{ m}$$

La altura real de la Torre Eiffel es 324 m.

Actividades

1 Toma una hoja de papel cuadriculado y dibuja sobre ella una ampliación del dibujo de abajo al doble de tamaño.



2 Dibuja un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Construye otro triángulo cuyos lados sean el doble de largos.

Observa que ambos triángulos tienen la misma forma, son semejantes. ¿Cuál es la razón de semejanza?

3 Las dimensiones de un rectángulo son 2 cm y 3 cm. ¿Cuáles de los siguientes rectángulos son semejantes a él?:

a) 36 cm y 54 cm

b) 12 cm y 20 cm

c)10 cm y 15 cm

d) 45 cm y 70 cm

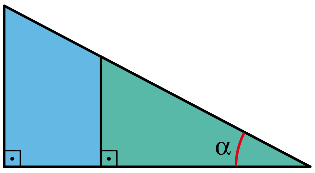
Di, también, cuál es la razón de semejanza en aquellos casos en los que los rectángulos sean semejantes.

4 Semejanza entre triángulos rectángulos. Aplicaciones

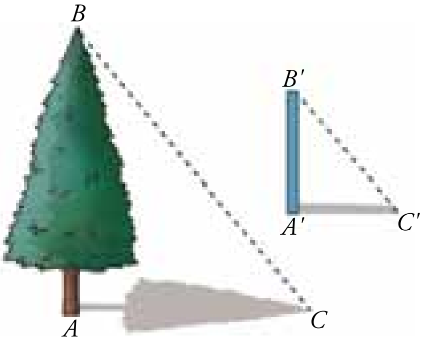
Los triángulos rectángulos son especialmente importantes. Veamos algunos criterios por los cuales se comprueba muy fácilmente si dos triángulos rectángulos son o no semejantes.

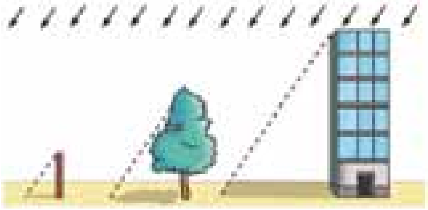
Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.

Pues, en tal caso, se pueden poner en posición de Tales.



Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra





Los rayos del Sol llegan a la Tierra paralelos unos a otros.

Para calcular la altura de un árbol, $\overline{AB}$, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.
- Medimos la longitud de la estaca, $\overline{A'B'}$, y de las sombras, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, del árbol y de la estaca, respectivamente, proyectadas por el Sol en el mismo instante.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

$\hat{A} = \hat{A}'$ porque los dos son rectos.

$\hat{C} = \hat{C}'$ porque *los rayos del Sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo*.

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Como conocemos $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$, podemos calcular la altura del árbol, $\overline{AB}$.

Problema resuelto

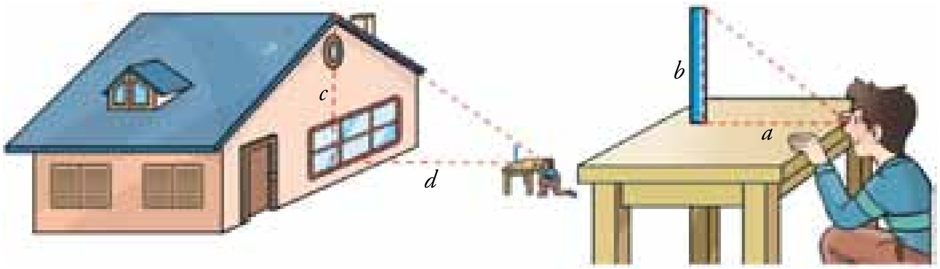
En la descripción anterior, calcular la altura del árbol sabiendo que:

longitud de la estaca = 1,6 m; sombra del árbol = 3,5 m; sombra de la estaca = 0,7 m.

$$\frac{\overline{AB}}{1{,}6} = \frac{3{,}5}{0{,}7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1{,}6 \cdot 3{,}5}{0{,}7} = 8$$

Solución: El árbol mide 8 m.

Cálculo de la altura de un objeto vertical sin recurrir a la sombra

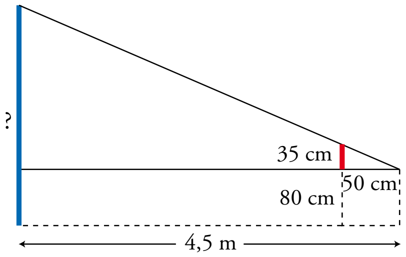


El chico lanza una visual desde el borde de la mesa al punto más alto de la casa. Estando en esa posición, mueve la regla, situándola de modo que su extremo quede alineado con la visual (la mesa debe estar en posición horizontal, y la regla, en vertical).

Los triángulos rectángulos, de catetos a, b y d, c, son semejantes, pues se encuentran en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$

Conociendo a, b y d, se calcula c. La altura de la casa es igual a c más la altura de la mesa.



Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura de la casa sabiendo que:

longitud de la regla, b = 35 cm; distancia del borde de la mesa al pie de la regla, a = 50 cm; distancia del borde de la mesa a la casa, d = 4,5 m; altura de la mesa = 80 cm.

Expresamos todas las distancias en metros.

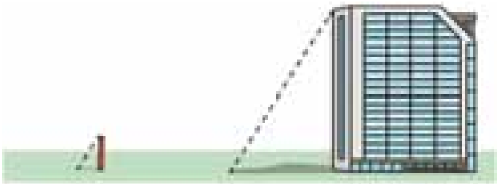
$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a} \rightarrow \frac{c}{4,5} = \frac{0,35}{0,5} \rightarrow c = \frac{4,5 \cdot 0,35}{0,5} = 3,15 \text{ m}$$

$$3,15 + 0,8 = 3,95 \text{ m}$$

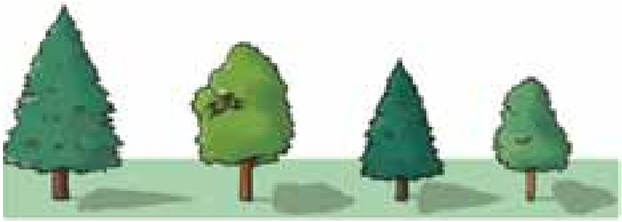
Solución: La altura de la casa es de 3,95 m.

Actividades

1 Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una estaca de 2 m arroja una sombra de 1,25 m.



2 Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. El árbol pequeño mide 2,5 m. ¿Cuánto miden los demás?

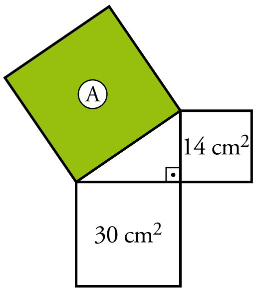


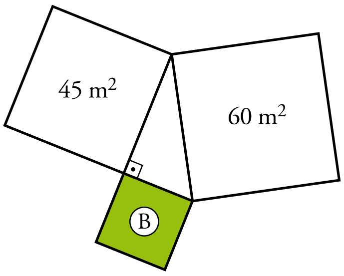
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

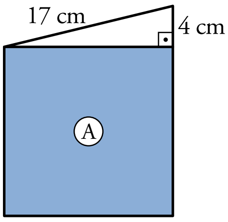
Teorema de Pitágoras

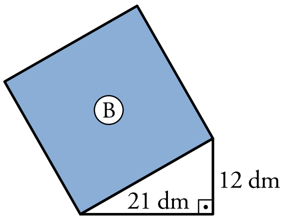
1 ▼▽▽ Calcula el área del cuadrado verde en cada uno de los siguientes casos:



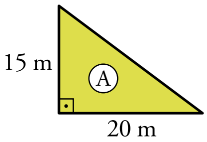


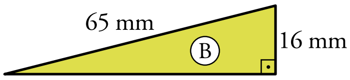
2 ▼▽▽ ¿Cuál es el área de los siguientes cuadrados?:



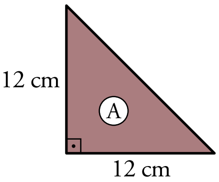


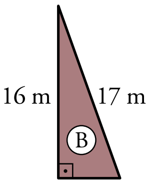
3 ▼▽▽ Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

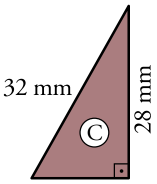




4 ▼▽▽ Calcula el lado desconocido en cada triángulo aproximando hasta las décimas:







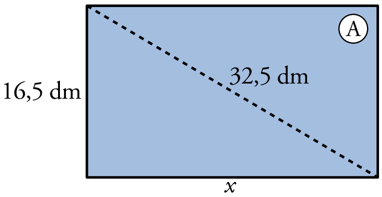
5 ▼▽▽ Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.

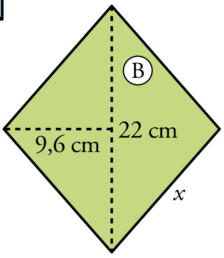
6 ▼▽▽ Los lados paralelos de un trapecio rectángulo miden 13 dm y 19 dm, y el lado oblicuo mide 10 dm. Calcula la altura.

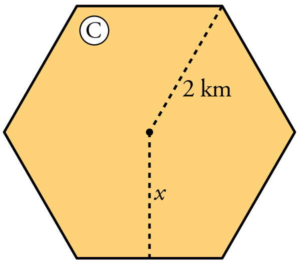
7 ▼▼▽ Sabiendo que las bases de un trapecio isósceles miden 2,4 cm y 5,6 cm, y que la altura es de 3 cm, calcula la longitud del lado oblicuo.

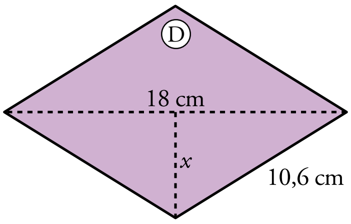
8 ▼▼▽ Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 1 dm y 2,4 dm.

9 ▼▼▽ Halla la longitud x en cada una de las siguientes figuras:







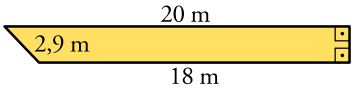


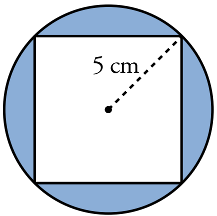
10 ▼▼▽ Halla el área y el perímetro de las figuras descritas en…

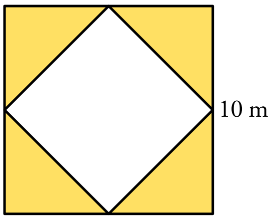
a) …el ejercicio 10
b) …el ejercicio 11
c) …el ejercicio 12, A
d) …el ejercicio 12, B
e) …el ejercicio 12, C
f) …el ejercicio 12, D

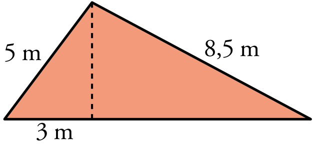
☞ *Ten en cuenta los resultados obtenidos en los ejercicios correspondientes.*

11 ▼▼▽ Halla el área y el perímetro de las figuras siguientes (parte coloreada):



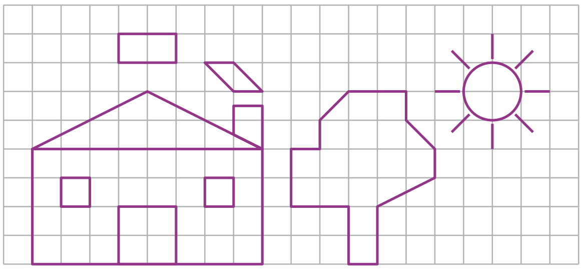






Semejanza

12 ▼▽▽ Sobre una hoja de papel cuadriculado, realiza una copia del siguiente dibujo, pero al doble de su tamaño.



13 ▼▽▽ La altura de la puerta de la casa mide 3 m. ¿Cuál es la altura de la casa? ¿Y la del árbol más alto?

14 ▼▽▽ Un rectángulo tiene unas dimensiones de 10 cm por 15 cm. El lado menor de otro rectángulo semejante a él mide 12 cm. Halla:

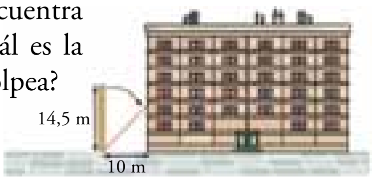
a) La razón de semejanza para pasar del primer al segundo rectángulo.

b) El lado mayor del segundo.

c) Las áreas de ambos rectángulos.

Resuelve problemas

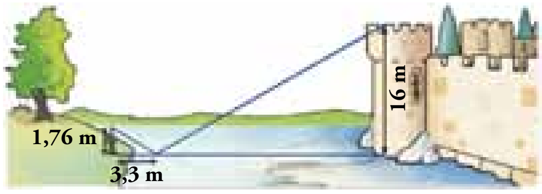
15 ▼▽▽ Se cae un poste de 14,5 m de alto sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que le golpea?



16 ▼▽▽ En la orilla del río Sena (París) hay una réplica a escala 1:4 de la Estatua de la Libertad que mide 11,5 m de altura. Halla la altura de la estatua de Nueva York.

En Cenicero, un pueblo riojano, hay una Estatua de la Libertad de 1,2 m. ¿Cuál sería la escala de esta con respecto a la de Nueva York?

17 ▼▼▽ ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre (el chico ve la torre reflejada en el agua)?



Autoevaluación

¿Utilizas la semejanza para calcular longitudes desconocidas?

1 Un modelo de coche tiene una longitud de 4,20 m. Una maqueta suya mide 16,8 cm.

¿A qué escala está hecha?

2 Los lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 13 cm. Otro triángulo semejante a él tiene un lado mediano de 12 cm.

Halla las longitudes de sus otros dos lados.

3 Un avión quiere viajar, en línea recta, entre Las Palmas de Gran Canaria y Palma de Mallorca. En un plano a escala 1:9 000 000, la distancia que medimos es de 26 cm.

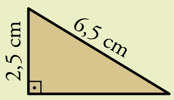
¿Cuántos kilómetros recorrerá el avión?

4 La regla mide 20 cm y está a 38 cm del borde de la mesa más cercano a la chica. Halla la altura de la caseta sabiendo que el tablero de la mesa está a 75 cm de altura y que la chica está a 7,6 m de la casa.

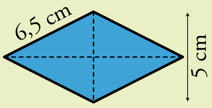
¿Dominas el teorema de Pitágoras y lo aplicas cuando conviene?

5 Halla el área de estos polígonos:

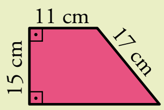
a)



b)



c)



9 Cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos más sencillos (prismas, pirámides, cilindros, conos, troncos, esferas) eran conocidos y manejados por las antiguas civilizaciones. Para el cálculo de áreas y volúmenes, los egipcios poseían procedimientos a los que, probablemente, llegaron de forma experimental. Unos producían resultados exactos y otros aproximados, aunque ellos no distinguían entre unos y otros y les daban a todos la misma validez. Dichos procedimientos eran descripciones de los pasos que había que dar para obtener la magnitud buscada: “la medida de la parte superior se multiplica por sí misma, se divide por cuatro y se suma…”. Actualmente pondríamos una fórmula para resumir el proceso.

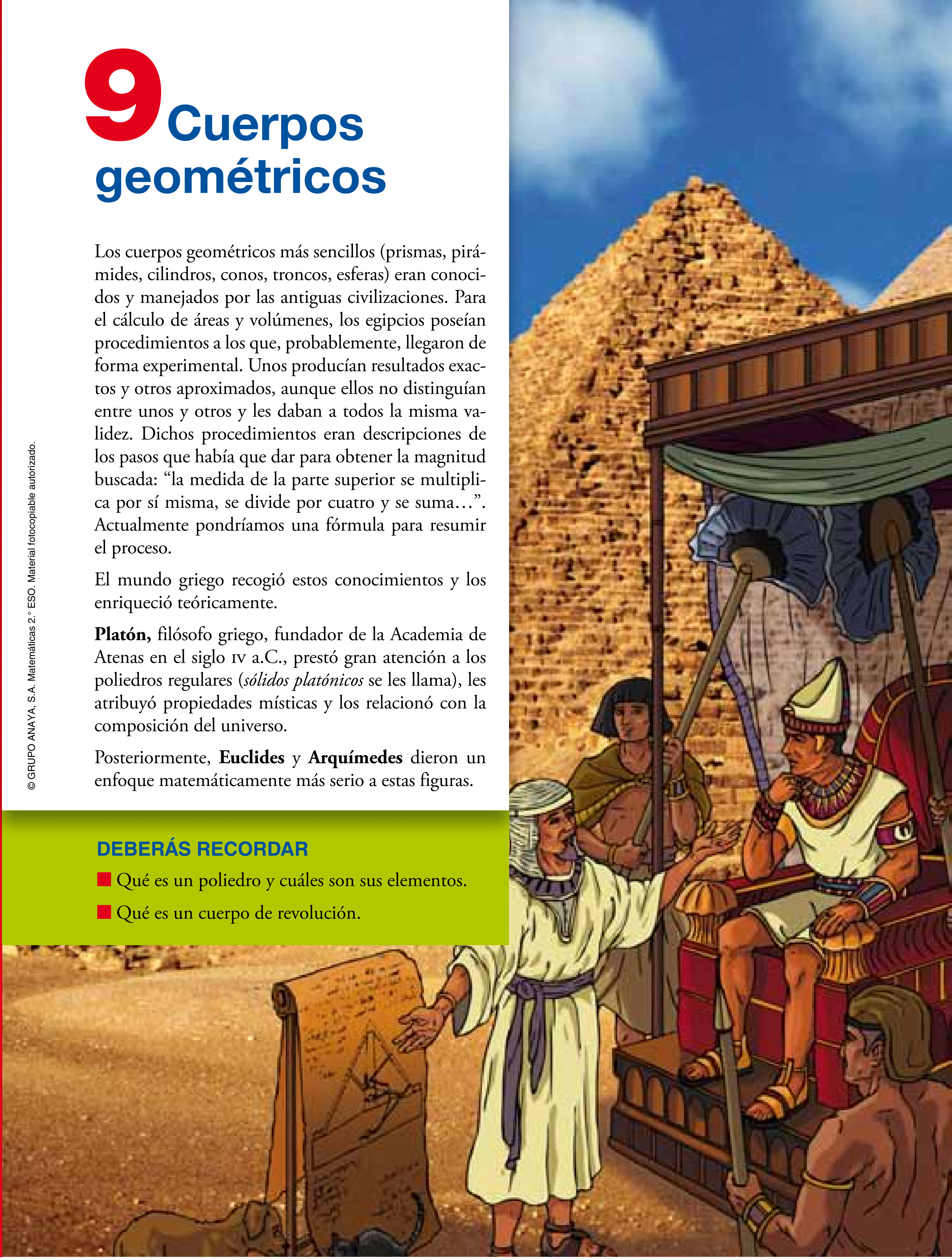
El mundo griego recogió estos conocimientos y los enriqueció teóricamente.

Platón, filósofo griego, fundador de la Academia de Atenas en el siglo IV a.C., prestó gran atención a los poliedros regulares (*sólidos platónicos* se les llama), les atribuyó propiedades místicas y los relacionó con la composición del universo.

Posteriormente, **Euclides** y **Arquímedes** dieron un enfoque matemáticamente más serio a estas figuras.

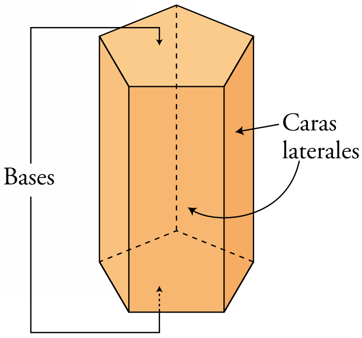
DEBERÁS RECORDAR

- Qué es un poliedro y cuáles son sus elementos.
- Qué es un cuerpo de revolución.



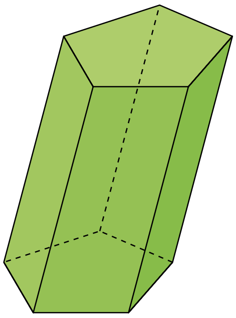
1

Prismas



PRISMA RECTO

- Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos (llamados **bases**) y varios paralelogramos (llamados **caras laterales**).
- La **altura** del prisma es la distancia entre las bases.
- Si todas las caras laterales son rectángulos, serán perpendiculares a las bases, y entonces se llama **prisma recto.**
- Si las caras laterales no son perpendiculares a las bases, se llama **prisma oblicuo.**



PRISMA OBLICUO

- Las aristas laterales de un prisma son segmentos iguales y paralelos entre sí. En los prismas rectos son perpendiculares a las bases y coinciden con la altura.

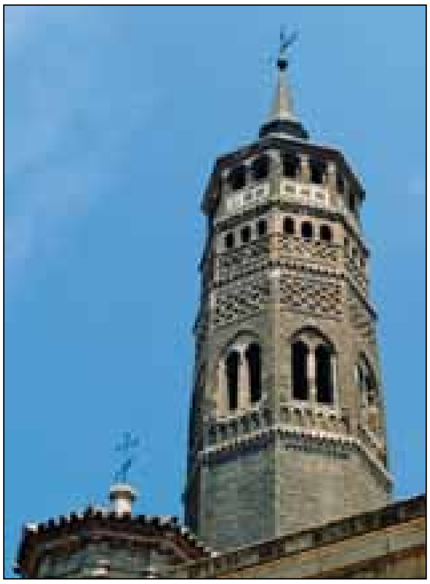
Etimología

Prisma. Viene del griego. Significa *lo que ha sido serrado*, porque las caras laterales del prisma están como serradas.

Clasificación según el polígono de las bases

Dependiendo de que las bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc., el **prisma** se llama **triangular, cuadrangular, pentagonal,** etc.

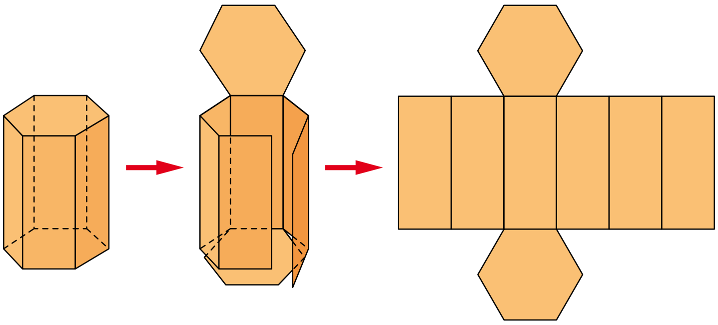
Los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares se llaman **prismas regulares.**



Las formas prismáticas se presentan con mucha frecuencia.

Desarrollo de un prisma recto

Si cortamos un prisma recto a lo largo de algunas de sus aristas, lo abrimos y ponemos las caras sobre un plano, se obtiene lo siguiente:



El desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo. La longitud de su base es el perímetro de la base del prisma, y su altura, la altura del prisma.

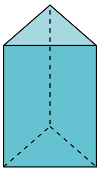
Actividades

1 Di qué tipo de prisma es cada uno de los siguientes.

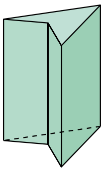
Indica cuáles son regulares.

Dibuja el desarrollo del primero de ellos.

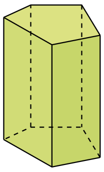
a)



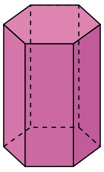
b)



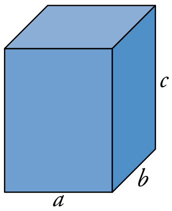
c)



d)



Ortoedro



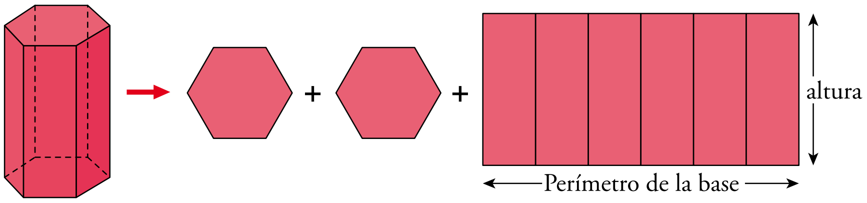
Un prisma recto cuya base es un rectángulo se llama **ortoedro.**

El área total de un ortoedro de dimensiones a, b y c es:

$$A_{TOTAL} = 2(ab + bc + ac)$$

Superficie de un prisma

El desarrollo del prisma permite ver con toda claridad cuál es su área:

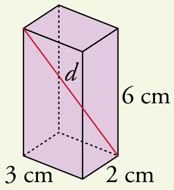


ÁREA LATERAL = perímetro de la base · altura

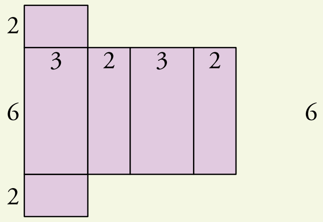
ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + 2 · ÁREA DE LA BASE

Ejercicios resueltos

1. Hallar el área total de este ortoedro:



1.

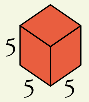


$$A_{TOTAL} = 2(6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 72 \text{ cm}^2$$

2. Hallar el área total de un cubo de 5 dm de arista.

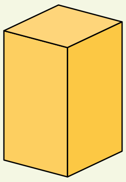
2. Cada cara tiene un área de $A = 5^2 = 25 \text{ dm}^2$.

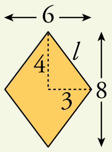
El área total es: $A_{TOTAL} = 6 \cdot 25 = 150 \text{ dm}^2$

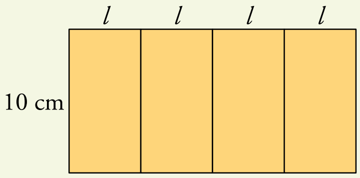


3. Las bases de un prisma recto son rombos cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Hallar su área total.

3.







Lado de la base: $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{BASE} = 8 \cdot 6/2 = 24 \text{ cm}^2 \\ A_{LAT} = (4 \cdot 5) \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{TOTAL} = A_{LAT} + 2A_{BASE} = 200 + 2 \cdot 24 = 248 \text{ cm}^2$$

Actividades

2 Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 3 cm y 12 cm. Halla el área total.

3 Halla el área total de un cubo de 10 cm de arista.

4 La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios rectángulos con las siguientes características: las bases del trapecio miden 11 cm y 16 cm, y la altura, 12 cm. Halla el área total del prisma.

2

Pirámides

Etimología

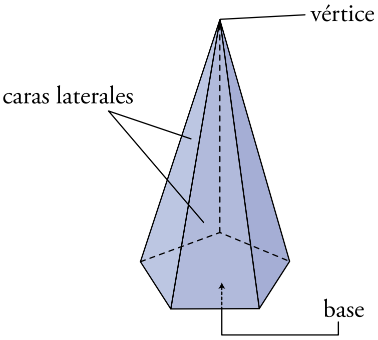
Pirámide. Viene del griego *pyros, fuego,* por ser piramidal la forma de la llama. Y también por tener esta forma las piras (cosas apiladas para ser quemadas).

Nota histórica

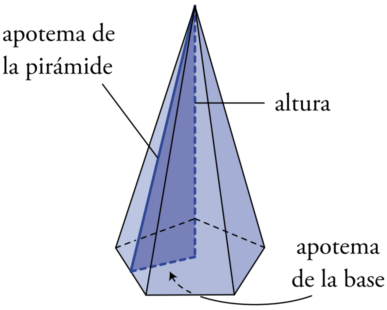
Las pirámides de Egipto fueron construidas como sepulcros de los faraones hace varios miles de años.

Son regulares y cuadrangulares. La mayor de ellas, la de Keops, tiene 146 m de altura y el lado de su base mide 230 m.

- Una **pirámide** es un poliedro que tiene por **base** un polígono cualquiera, y por **caras laterales,** triángulos con un vértice común, que se llama **vértice** de la pirámide.
- La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.
- Una **pirámide** es **regular** cuando la base es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de ese polígono.



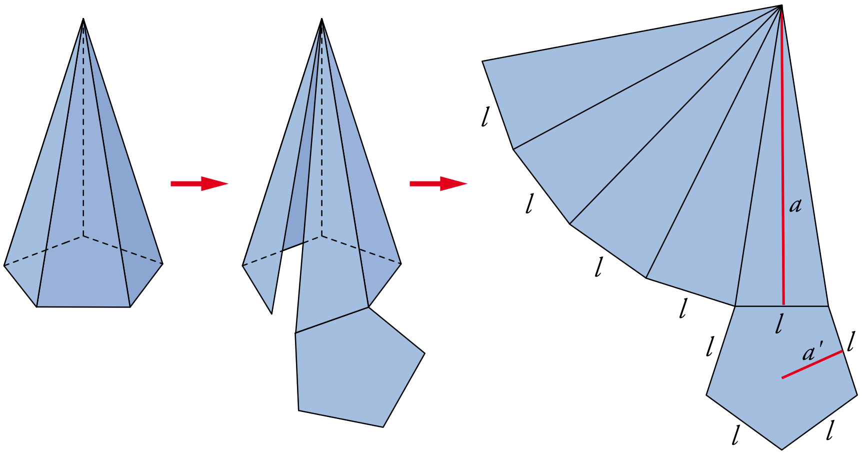
- En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales y las caras laterales son triángulos isósceles iguales. Las alturas de los triángulos se llaman **apotemas** de la pirámide.



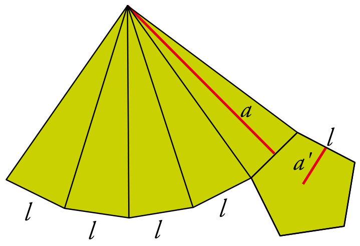
- La **apotema** de una pirámide regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y la apotema del polígono de la base.
- Las **pirámides** se llaman **triangulares, cuadrangulares, pentagonales…** según que el polígono de la base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

Desarrollo de una pirámide regular

Si cortamos a lo largo de algunas aristas de una pirámide regular, la abrimos y extendemos su caras sobre el plano, obtenemos lo siguiente:



Superficie de una pirámide regular



El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de los n triángulos iguales (n es el número de lados de la base):

$$A_{\text{LAT}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2}$$

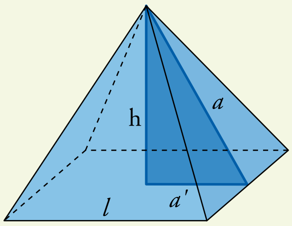
Puesto que la base es un polígono regular, su área es $\dfrac{\text{perímetro} \cdot a'}{2}$.

Por tanto:

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LAT}} + A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} + \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a'}{2}$$

Ejercicio resuelto

Hallar la superficie lateral de la pirámide de Keops descrita en la página anterior.



h = 146 m

l = 230 m

a' = 230 : 2 = 115 m

Empecemos por calcular la apotema a:

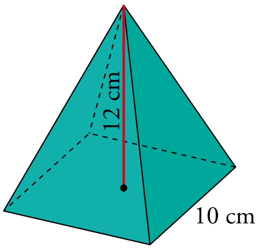
$$a = \sqrt{\text{h}^2 + (a')^2} = \sqrt{146^2 + 115^2} = \sqrt{34\,541} = 186 \text{ m}$$

$$A_{\text{LAT}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} = \frac{(4 \cdot 230) \cdot 186}{2} = 85\,560 \text{ m}^2$$

Solución: La superficie lateral de la pirámide de Keops es de 85 560 m^2.

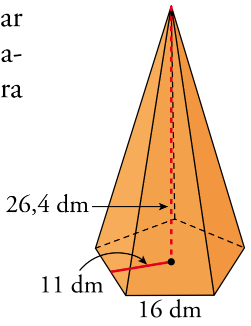
Actividades

1 Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y cuya altura es de 12 cm.



2 La base de una pirámide regular es un pentágono de 16 dm de lado y 11 dm de apotema. La altura de la pirámide es de 26,4 dm.

Halla su área total.



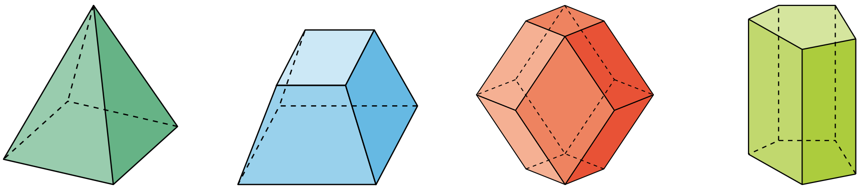
3 Poliedros regulares

Etimología

Poliedro. En griego, *poli* = muchos y *edro* = cara.

Icosaedro. En griego, *eikós* = veinte.

Los prismas y las pirámides, así como otros cuerpos geométricos limitados por caras poligonales se llaman, como ya sabes, **poliedros.**



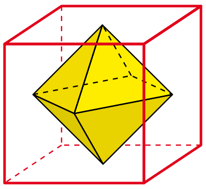
El área total de un poliedro es la suma de las áreas de los polígonos que lo forman.

Algunos poliedros con ciertas características se llaman **regulares.**

Un **poliedro** se llama **regular** cuando cumple estas dos condiciones:

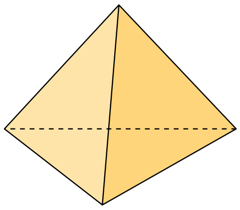
- Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

¡Qué curioso!

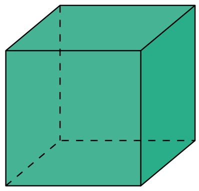


Si unimos los puntos medios de las caras de un cubo se obtiene un octaedro y si hacemos lo mismo con el icosaedro se obtiene un dodecaedro.

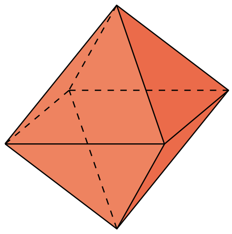
Sólo hay cinco poliedros regulares:



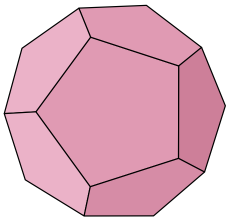
TETRAEDRO
(Cuatro caras triángulos)



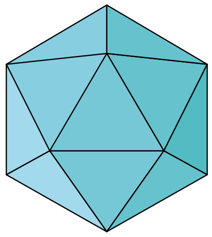
CUBO
(Seis caras cuadrados)



OCTAEDRO
(Ocho caras triángulos)



DODECAEDRO
(Doce caras pentágonos)



ICOSAEDRO
(Veinte caras triángulos)

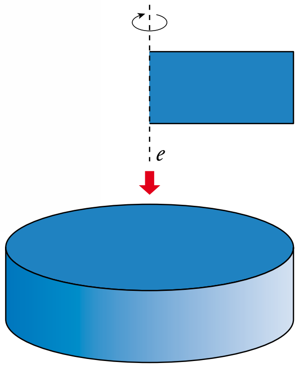
Actividades

1 Cuenta el número de caras (C), de vértices (V) y de aristas (A) de cada uno de estos cinco poliedros. Comprueba que en todos ellos se cumple:

$$C + V - A = 2$$

Comprueba que también se cumple esta relación en los demás poliedros que has manejado.

4 Cilindros

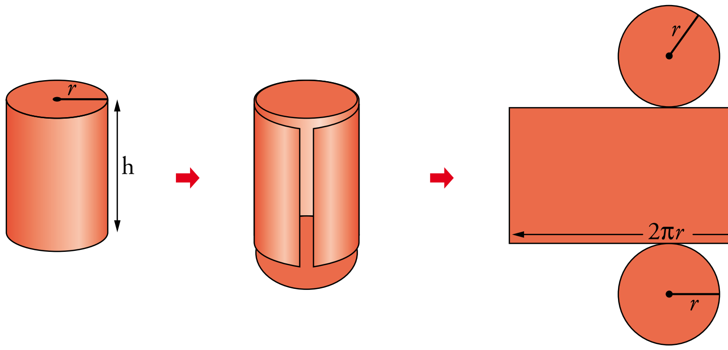


- Haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, se genera un **cilindro recto.** Es, pues, un cuerpo de revolución.
- Las **bases** de un cilindro recto son círculos. La distancia entre las bases se llama **altura.**

Etimología

Cilindro. Del griego *kulindo,* que significa *enrollado*, pues el cilindro tiene forma de rollo o cosa enrollada.

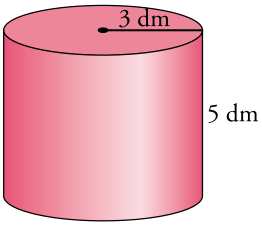
Desarrollo y superficie de un cilindro recto



Se aprecia que la pared lateral del cilindro es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la del cilindro. Por tanto:

ÁREA LATERAL = $2\pi r \cdot h$

ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + ÁREA DE LAS DOS BASES = $2\pi r h + 2\pi r^2$



Ejercicio resuelto

Hallar el área lateral y el área total del cilindro del margen.

$A_{LAT} = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi = 94{,}2 \text{ dm}^2$

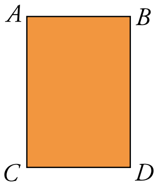
$A_{TOTAL} = 94{,}2 + 2\pi \cdot 3^2 = 94{,}2 + 56{,}52 = 150{,}72 \text{ dm}^2$

Actividades

1 Dibuja en tu cuaderno los cilindros que se generan al hacer girar este rectángulo:

a) Alrededor de *CD*.

b) Alrededor de *BD*.

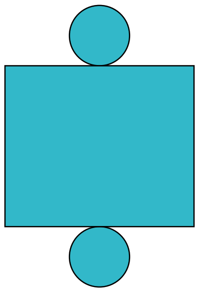


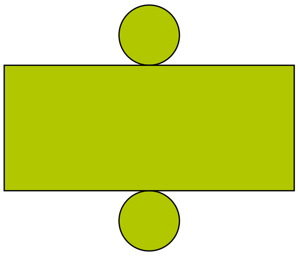
2 ¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?

3 Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe cilíndrico abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m, y la altura, 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m^2, ¿cuál es el coste de toda la obra?

4 Dibuja el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 2 cm de radio y cuya altura es de 8 cm.

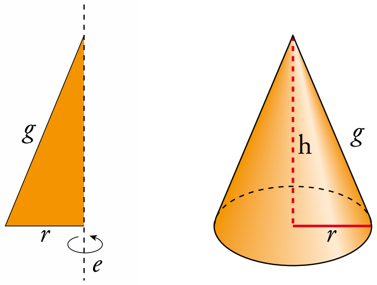
5 Toma algunas medidas y decide cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cilindro.





5

Conos

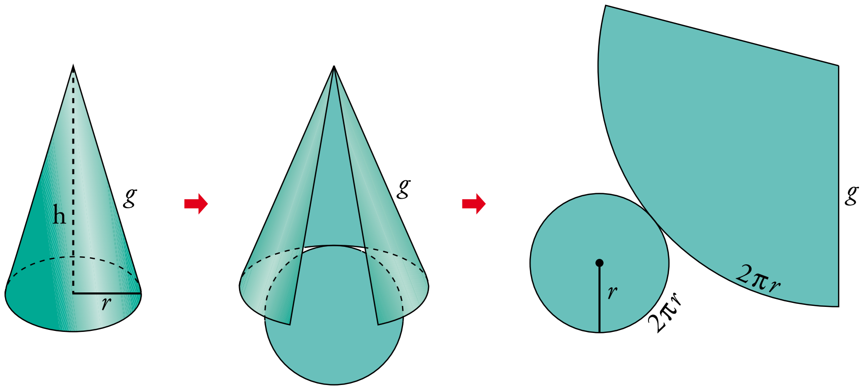


h, r y g cumplen la relación:

$$\boxed{g^2 = \text{h}^2 + r^2}$$

- Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos, se obtiene un **cono recto.** Es, pues, un cuerpo de revolución.
- La **altura** es la distancia del vértice a la base. El segmento g (hipotenusa del triángulo rectángulo) recibe el nombre de **generatriz.**

Desarrollo y superficie de un cono recto



ÁREA LATERAL = $\pi r g$

ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + ÁREA DE LA BASE = $\pi r g + \pi r^2$

Ejercicios resueltos

1. Hallar el área total de un cono en el que $r = 6$ cm y $g = 10$ cm.

1. $A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 6 \cdot 10 + \pi \cdot 6^2 = 188{,}5 + 113{,}1 = 301{,}6 \text{ cm}^2$

2. Hallar el área total de un cono en el que $r = 5$ cm y h = 12 cm.

2. Hemos de empezar calculando el valor de la generatriz:

$$g = \sqrt{r^2 + \text{h}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 = 204{,}2 + 78{,}5 = 282{,}7 \text{ cm}^2$$

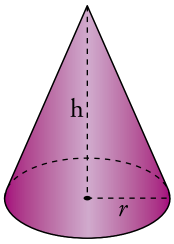
Actividades

1 Calcula el área lateral y el área total de este cono, sabiendo que:

$r = 13$ cm, h = 85 cm

Empieza por calcular g:

$$g = \sqrt{r^2 + \text{h}^2}$$

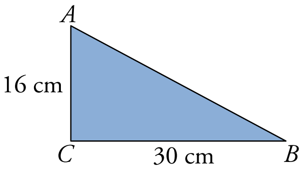


2 Dibuja los conos que se obtienen al hacer girar este triángulo rectángulo:

a) Alrededor de AC.

b) Alrededor de BC.

Halla el área total de ambos.

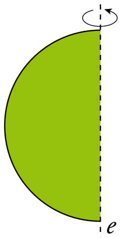


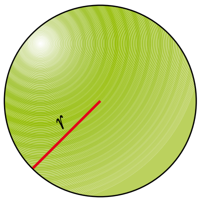
6 Esferas

Etimología

En griego, *sfaira* significa “pelota”.

- La **esfera** se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro. Es, pues, un cuerpo de revolución que queda determinado por su radio, r.



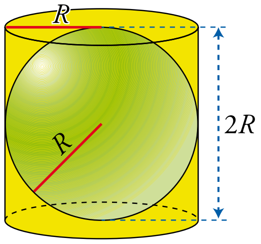


Superficie de la esfera

La superficie de la esfera se llama **superficie esférica.** Solo se puede desarrollar sobre el plano aproximadamente. Sin embargo, sí podemos medir su área mediante una sencilla fórmula.

Imaginemos la esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella. Pues bien, *el área de la esfera es igual que el área lateral de ese cilindro.*

$$A_{\text{LATERAL DEL CILINDRO}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$



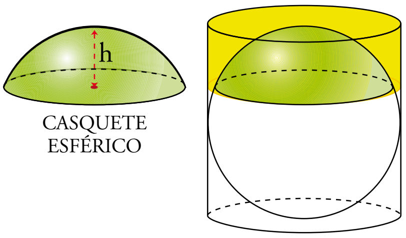
El área de la superficie esférica de radio R es $A = 4\pi R^2$.

Esta relación entre la esfera y el cilindro que la envuelve es muy interesante, porque vale también para porciones de esfera limitadas por planos paralelos.

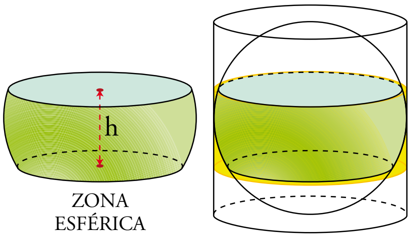
No te olvides

El área de un casquete esférico o de una zona esférico es igual a la porción correspondiente del cilindro tangente a la esfera:

$$2\,\pi R\,\text{h}$$



CASQUETE ESFÉRICO



ZONA ESFÉRICA

Ejercicio resuelto

La cúpula de un edificio tiene una altura de 4 m y corresponde a una esfera de 9 m de radio. Calcular su superficie.

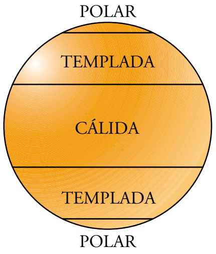
$$S = 2\pi \cdot 9 \cdot 4 \approx 226 \text{ m}^2$$

Actividades

1 En una esfera terrestre escolar de 20 cm de radio están señaladas las zonas climáticas.

Sabemos que cada casquete polar tiene 2 cm de altura, y cada zona templada, 10 cm de altura.

Halla la superficie de cada zona climática.

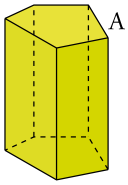


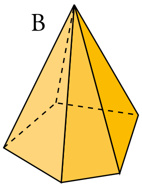
Ejercicios y problemas

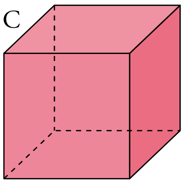
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

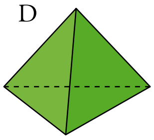
Tipos de cuerpos geométricos

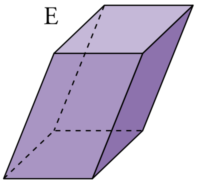
1 ▼▽▽ Di, justificadamente, qué tipo de poliedro es cada uno de los siguientes:

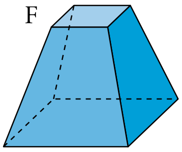

A


B


C

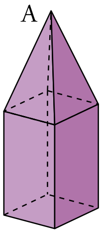

D

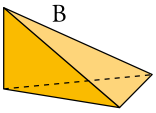

E

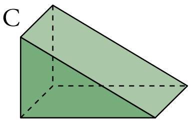

F

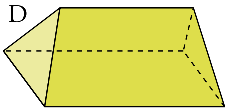
¿Hay entre ellos algún poliedro regular?

2 ▼▽▽ Algunos de los siguientes poliedros no son catalogables entre los que ya conocemos (prisma, pirámide, tronco de pirámide, poliedro regular). Señálalos y cataloga los demás.


A

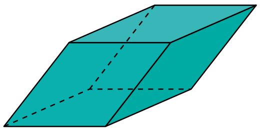

B


C


D

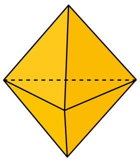
3 ▼▽▽ ¿Una pirámide cuadrangular regular es un poliedro regular? Explica por qué.

4 ▼▼▽ Esta figura está formada por seis rombos idénticos:



Aunque sus caras son iguales y concurren tres de ellas en cada vértice, no es un poliedro regular. Explica por qué.

5 ▼▽▽ Este poliedro está formado por seis triángulos equiláteros iguales. Sin embargo, no es un poliedro regular. Explica por qué.



6 ▼▽▽ ¿Hay algún poliedro regular que sea prisma? ¿Y alguno que sea pirámide?

7 ▼▽▽ ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuerpos de revolución? Cataloga las que puedas: cilindro, cono, esfera, tronco…

a)


b)

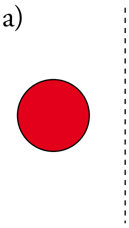

c)

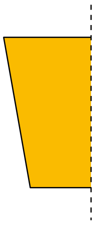

d)

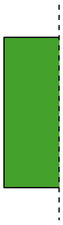

e)


f)


8 ▼▼▽ Al girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica, se genera un cuerpo de revolución. Dibújala en tu cuaderno.

a)


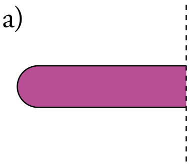
b)


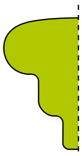
c)


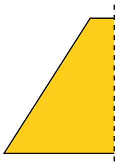
Relaciona cada una de las figuras que has dibujado con una del ejercicio anterior.

9 ▼▼▽ Dibuja la figura plana y el eje alrededor del que ha de girar para generar la lámpara (apartado a) del ejercicio 7), la taza (b), suprimiéndole el asa, y el bolo (d).

10 ▼▼▽ Dibuja el cuerpo de revolución que se engendra en cada uno de los siguientes casos:

a)


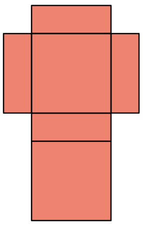
b)


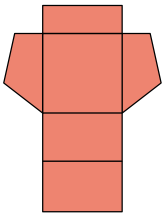
c)


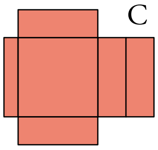
d)

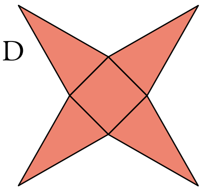

Desarrollo de cuerpos geométricos

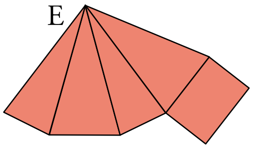
11 ▼▼▽ ¿Con cuáles de los siguientes desarrollos se puede completar un poliedro? Contesta razonadamente.

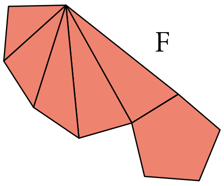
A


B


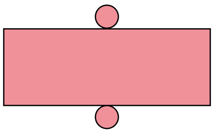
C


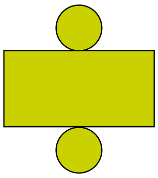
D


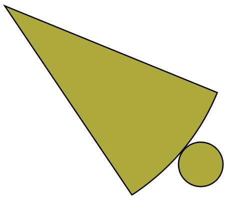
E


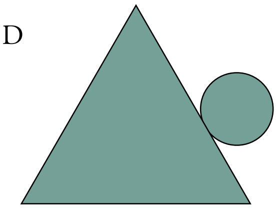
F


12 ▼▼▽ ¿Cuáles de los siguientes desarrollos corresponden a cuerpos de revolución? Dibújalos.

A


B


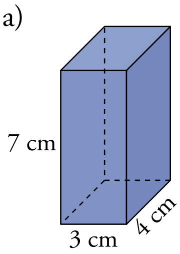
C


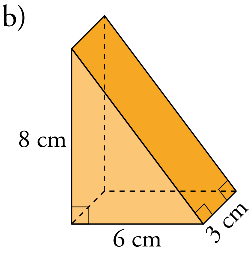
D


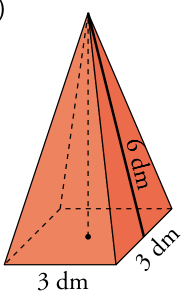
13 ▼▼▽ Dibuja el desarrollo de una pirámide hexagonal regular cuyas aristas laterales midan 6 cm, y las de la base, 4 cm.

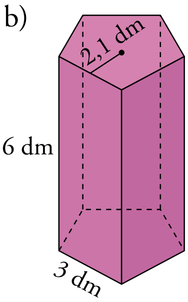
Áreas sencillas

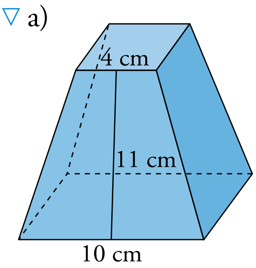
Halla el área total de los siguientes cuerpos geométricos:

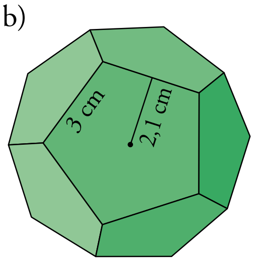
14 ▼▽▽ a)


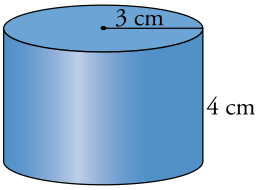
b)


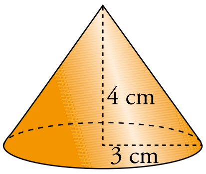
15 ▼▽▽ a)


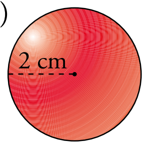
b)


16 ▼▽▽ a)


b)


17 ▼▽▽ a)


b)


c)


Ejercicios y problemas

Aplica lo aprendido

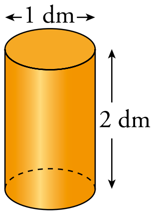
18 ▼▼▽ Halla el área de un tetraedro regular de 10 cm de arista.

19 ▼▼▽ Halla el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuyas bases son rombos de diagonales 16 cm y 12 cm.

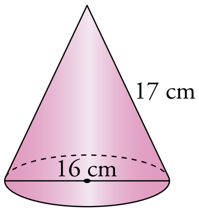
20 ▼▼▽ La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Halla su área total.

21 ▼▼▽ Halla el área total de estos cuerpos:

a)



b)



22 ▼▼▽ Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3 cm, 4 cm y 12 cm.

23 ▼▽▽ Halla las superficies del casquete esférico de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.

Resuelve problemas

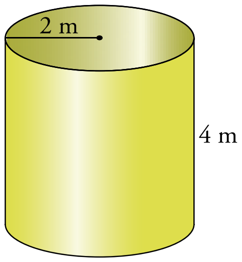
24 ▼▼▽ Queremos forrar un cajón de embalaje de dimensiones 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m con una chapa metálica.

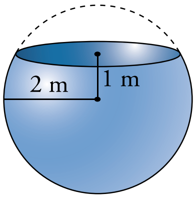
a) ¿Cuánto costará hacerlo si la chapa está a 18 €/m^2?

b) Si queremos cubrir las aristas con un embellecedor de madera de 23 €/m, ¿cuánto dinero hemos de pagar?

25 ▼▼▽ Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas mida 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?

26 ▼▼▽ Un pintor ha cobrado 1 000 € por impermeabilizar el interior del depósito sin tapa de la izquierda. ¿Cuánto deberá cobrar por impermeabilizar el depósito de la derecha, también sin tapa?



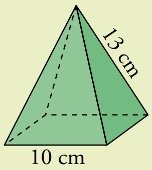


Autoevaluación

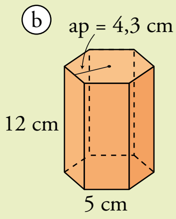
¿Sabes hallar la superficie de algunos poliedros y cuerpos de revolución, obteniendo previamente alguno de sus elementos, si fuera necesario?

Halla el área total de los siguientes cuerpos:

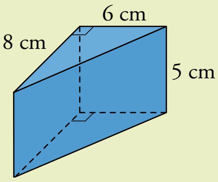
1 ⓐ



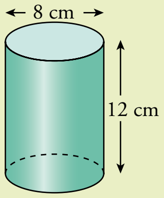
ⓑ



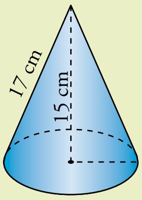
ⓒ



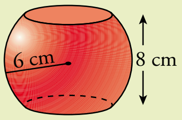
2 ⓐ



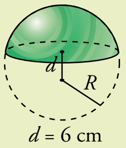
ⓑ



ⓒ



ⓓ



10 Medida del volumen

Euclides vivió en Alejandría hacia el año 300 a.C. Se sabe poco de su vida (incluso dónde y cuándo nació y murió), pero su obra se conserva y se conoce perfectamente. Sistematizó y dotó de estructura lógica el saber matemático de su época en los 13 tomos de que constan sus *Elementos*. En varios de ellos se trabajan los cuerpos geométricos:

— En el libro XI trata la geometría tridimensional y los sólidos geométricos.

— En el libro XII, las áreas y los volúmenes de los cuerpos geométricos.

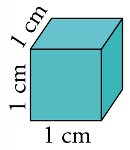
— Y en el libro XIII realiza un estudio muy minucioso de los poliedros regulares.

Arquímedes (siglo III a.C.), además de matemático, fue físico y un gran inventor. A diferencia de la línea tradicional del pensamiento griego, especulativo, él se valió de la experimentación para obtener resultados matemáticos que, después, demostraba rigurosamente.

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se calcula el volumen de un ortoedro.

1 Unidades de volumen



Ponte en situación

Imagina cubos con las medidas descritas e intenta hacerte a la idea de cuánta agua podrían contener:

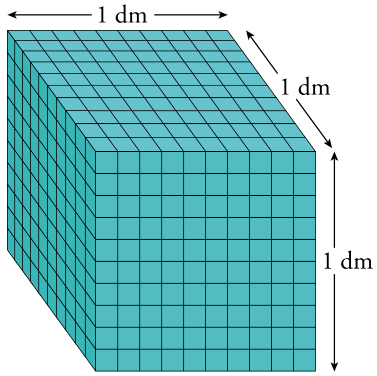
dm^3 → botella normal.

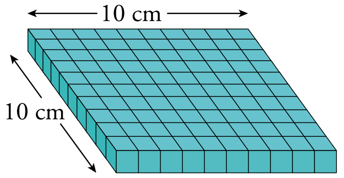
m^3 → Imagínalo señalado en una esquina de una habitación. Podrías ducharte entre 15 y 20 veces con el agua que cabe en él.

En el margen aparece un centímetro cúbico (1 cm^3). Es un cubo de 1 cm de lado. De la misma forma se definen el decímetro cúbico (dm^3), el metro cúbico (m^3) y las demás unidades de volumen. Son las siguientes:

$$\begin{tikzcd}
km^3 \arrow[r, bend right, "\cdot 1\,000"'] & hm^3 \arrow[r, bend right, "\cdot 1\,000"'] & dam^3 \arrow[r, bend right, "\cdot 1\,000"'] & m^3 \arrow[r, bend right, "\cdot 1\,000"'] & dm^3 \arrow[r, bend right, "\cdot 1\,000"'] & cm^3 \arrow[r, bend right, "\cdot 1\,000"'] & mm^3
\end{tikzcd}$$

Veamos por qué cada unidad cúbica contiene 1 000 unidades inferiores:





En cada nivel hay 10 × 10 = 100 cm^3.

Hay 10 niveles.

En total, 10 × 10 × 10 = 1 000 cm^3.

Por tanto, 1 dm^3 = 1 000 cm^3. Y, por lo mismo, 1 m^3 = 1 000 dm^3, …

Cada unidad de volumen es 1 000 veces la unidad de orden inferior y la milésima parte (0,001) de la unidad de orden superior.

EJEMPLOS

a) $438\ m^3\ 12\ dm^3 = 438 \cdot 10^6\ cm^3 + 12 \cdot 10^3\ cm^3 = 438\,012\,000\ cm^3$

b) $0{,}03972\ dam^3 = 0{,}03972 \cdot 10^6\ dm^3 = 39\,720\ dm^3$

c) $347{,}32\ hm^3 = 347{,}32 \cdot 10^6\ m^3 = 347\,320\,000\ m^3$

Observa cómo la siguiente disposición facilita el paso de una unidad a otra:

	hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			
a)							4	3	8	0	1	2	0	0	0	→ 438 012 000 cm^3
b)						0	0	3	9	7	2	0				→ 39 720 dm^3
c)	3	4	7	3	2	0	0	0	0							→ 347 320 000 m^3

Actividades

1 Expresa en metros cúbicos.

a) 2 dam^3 123 m^3 52 dm^3

b) 29 320 000 cm^3

c) (453 cm^3 425 mm^3) · 500 000

d) 37 hm^3 12 dam^3 325 m^3 402 dm^3

2 Pasa a forma compleja.

a) 35 297 853 cm^3

b) (4 253 hm^3) · 2 000

c) 0,00030124 dm^3

d) 34,5832 hm^3

El litro, sus múltiplos y sus submúltiplos

A 1 dm^3 se le llama un **litro** (1 *l*).

Si se construye un cubo de cartulina de 1 dm^3, se llena de agua y esta se vierte, después, en una botella de 1 *l*, observamos que la llena por completo y no sobra nada.

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \; l$$

El litro tiene múltiplos y submúltiplos:

kilolitro (*kl*) ⟶ 1 000 *l*
hectolitro (*hl*) ⟶ 100 *l*
decalitro (*dal*) ⟶ 10 *l*
decilitro (*dl*) ⟶ 0,1 *l*
centilitro (*cl*) ⟶ 0,01 *l*
mililitro (*ml*) ⟶ 0,001 *l*

Vamos a incluirlos en la tabla junto con las unidades cúbicas:

m^3 ↓			dm^3 ↓			cm^3 ↓			mm^3		
		kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*			

Capacidad y volumen

La palabra **volumen** se suele utilizar para designar lo que ocupa un cuerpo en el espacio, y **capacidad,** para designar lo que cabe dentro de un recipiente. Pero son magnitudes idénticas y, por tanto, para medirlas se utilizan las mismas unidades.

Tanto las unidades cúbicas como los múltiplos y los divisores del litro se utilizan para medir volúmenes y capacidades. Sin embargo, se deben escoger las unidades según el tamaño de lo que se mide.

Por ejemplo:

- El volumen de un vaso o una botella, en *l*, en *cl* o en cm^3.
- El volumen de pequeños recipientes, en cm^3.
- El gasto mensual de agua en una casa, en m^3.
- La capacidad de un pantano, en hm^3 o, acaso, en km^3.

Actividades

3 Copia en tu cuaderno y añade la unidad en la que se expresa cada uno de los siguientes volúmenes:

a) Capacidad de un vaso: 1/4 ☐ o bien 250 ☐

b) Una cucharadita: 6 ☐

c) Consumo bimensual de agua en una casa:

63,834 ☐

d) Agua en un pantano: 680 ☐

4 Expresa en litros.

a) 45 dam^3 125 m^3 705 dm^3 500 cm^3

b) 590 000 mm^3 c) 0,000317 dam^3 d) 2 753 *ml*

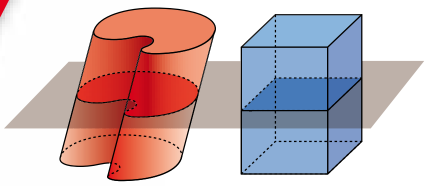
5 Expresa en unidades de volumen (forma compleja).

a) (457 210 *dal*) · 30

b) (12 845 235 *cl*) · 0,03

c) (42 753 *ml*) · 75

2 Volumen del prisma y del cilindro



De las dos figuras del margen, la de la izquierda es una **figura prismática** porque tiene dos bases iguales y paralelas. Además, cortándola por planos paralelos a las bases, se obtienen secciones idénticas a ellas.

La *figura prismática* y el ortoedro que hay a su derecha tienen la misma altura y, al cortarlos por planos paralelos a sus bases, producen figuras con la misma área. Por tanto, sus volúmenes coinciden.

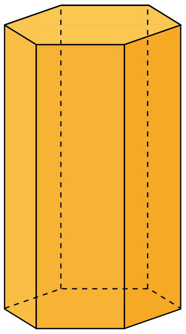
Volumen de la figura prismática = Área de su base · Altura

Los prismas y los cilindros son figuras prismáticas. Sus volúmenes son:

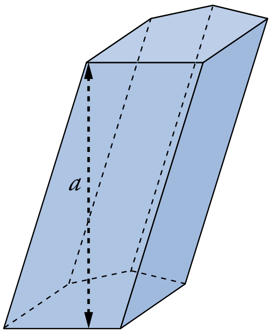
No lo olvides

VOLUMEN DE UNA FIGURA PRISMÁTICA

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$$

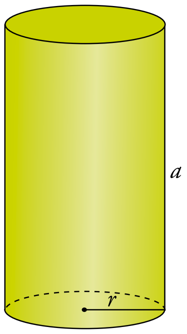


PRISMA RECTO



PRISMA OBLICUO

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$$



CILINDRO

$$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a$$

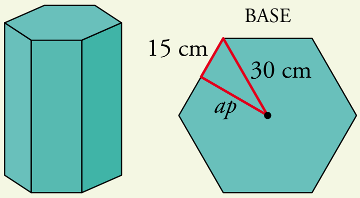
Ejercicio resuelto

Hallar el volumen de:

a) Un prisma hexagonal regular de lado de la base 30 cm y 1 m de altura.

b) Un cilindro de 30 cm de radio y 1 m de altura.

a)



En un hexágono regular, el radio y el lado son iguales. Por tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 15 cm.

$$\text{apotema} = \sqrt{30^2 - 15^2} \approx 26 \text{ cm}$$

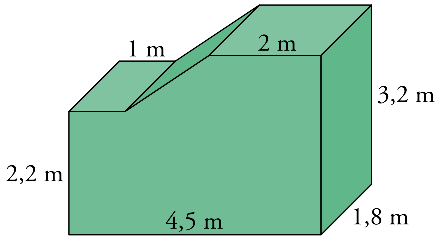
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{30 \cdot 6 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = 2\,340 \cdot 100 = 234\,000 \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}$$

b) $V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a = \pi \cdot 30^2 \cdot 100 \approx 282\,600 \text{ cm}^3 = 282{,}6\ l$

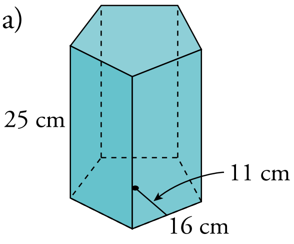
Actividades

1 Halla el volumen de este enorme depósito:

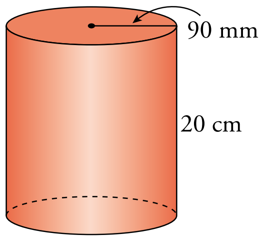


2 Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

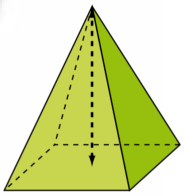
a)

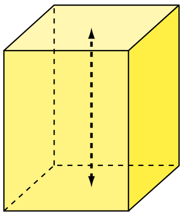


b)



3 Volumen de la pirámide y del cono

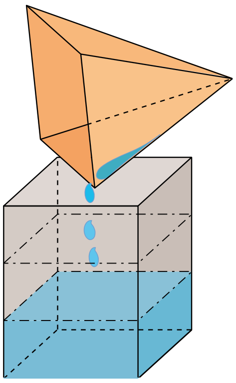




Tenemos un prisma y una pirámide con la misma base y la misma altura. Vamos a comparar sus volúmenes.

Si llenamos de agua la pirámide y la vertemos dentro del prisma, ocupará una tercera parte de este.

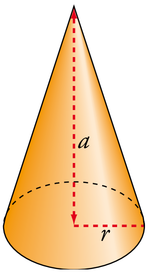
Es decir, se necesitan tres pirámides para completar el volumen del prisma.



El **volumen** de una **pirámide** es:

$$V = \frac{1}{3} \text{ Área de la base} \cdot \text{Altura}$$

Al igual que en la pirámide, el volumen de un cono es la tercera parte del área de la base por la altura. Es decir:



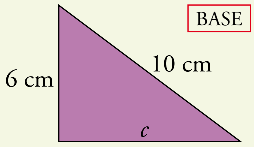
El **volumen** de un **cono** es:

$$V = \frac{1}{3} \text{ Área de la base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3} \pi r^2 a$$

Ejercicios resueltos

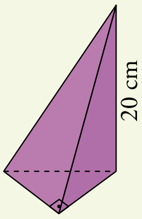
1. La altura de una pirámide es de 20 cm. Su base es un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 10 cm y un cateto de 6 cm. Hallar su volumen.

1.



$c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

El otro cateto de la base mide 8 cm.



$A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$ $\quad V_{\text{PIRÁMIDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot 20 = 160 \text{ cm}^3$

2. Hallar el volumen de un cono de 4 dm de altura y el radio de cuya base es 20 cm.

2. Radio de la base = 20 cm = 2 dm

Área de la base = $\pi \cdot 2^2 = 12{,}5664$

Volumen = $\dfrac{1}{3}\, 12{,}5664 \cdot 4 \simeq 8{,}4 \text{ dm}^3 = 8{,}4$ litros

Actividades

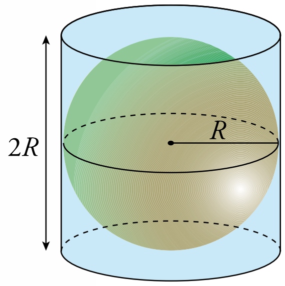
1 La gran pirámide de Keops es cuadrangular regular. El lado de la base mide 230 m, y la altura, 146 m.

Calcula cuántos hectómetros cúbicos tiene de volumen.

2 Halla el volumen de un cono cuya base tiene un radio de 8 cm y cuya altura es 2 dm.

3 ¿Cuánto acero hará falta para fabricar la cama de un faquir compuesta por 1 800 puntas en forma de cono cuyo diámetro de la base mide 2 cm, y la altura, 7 cm?

4 Volumen de la esfera



El volumen de la esfera es igual a los 2/3 del volumen del cilindro en el cual está inscrita.

El radio de la base del cilindro es el mismo que el de la esfera, R.

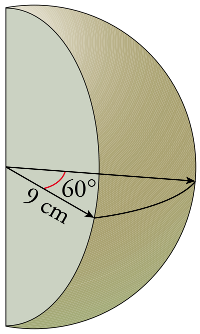
La altura del cilindro es $2R$.

Por tanto, el volumen del cilindro es $\pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$. Sus dos terceras partes son $\frac{4}{3}\pi R^3$.

El **volumen** de una **esfera** de radio R es:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ejercicios resueltos



1. Hallar el volumen de una cuña esférica de 60° correspondiente a una esfera de 9 cm de radio.

$\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$. El volumen del sector será, pues, la sexta parte del volumen de la esfera.

$$V_{\text{SECTOR ESFÉRICO}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 162\,\pi \approx 509 \text{ cm}^3$$

2. El radio de un balón es 25 cm, y sabemos que el grosor de la goma es de 3 mm.

¿Cuántos litros de goma son necesarios para fabricar un balón como el descrito?

$$V_{\text{BALÓN}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \approx 65\,417 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERA INTERIOR}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 24{,}7^3 \approx 63\,090 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{GOMA}} = 65\,417 - 63\,090 = 2\,327 \text{ cm}^3 \approx 2{,}327 \text{ litros}$$

Solución: Se necesitan 2,33 litros de goma, aproximadamente.

Actividades

1 Metemos en una caja ortoédrica de base 25 cm por 20 cm y una altura de 16 cm sesenta bolas de radio 2,5 cm. ¿Cuántos litros de aceite caben todavía en la caja?

2 Sabiendo que la densidad del acero es 7 850 kg/m^3, calcula el peso de una esfera hueca de 20 cm de radio exterior y 1 cm de grosor.

3 ¿Cuántas bolas de 5 mm de diámetro podremos hacer fundiendo un cable cilíndrico de 3 m de largo y 5 mm de diámetro?

4 Tenemos un cajón cúbico de 40 cm de arista lleno en sus tres cuartas partes de serrín. Queremos ocultar en su interior un balón de 32 cm de diámetro. ¿Qué volumen de serrín sobra?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Unidades de volumen

1 ▼▽▽ Transforma en metros cúbicos las siguientes cantidades:

a) 0,025 hm^3 b) 459 hm^3 c) 45 214 dm^3
d) 0,015 km^3 e) 23 dam^3 f) 58 000 *l*

2 ▼▽▽ Transforma en litros.

a) 400 000 hm^3 b) 0,000047 hm^3
c) 6 dam^3 318 m^3 d) 0,32 *hl*

3 ▼▽▽ Copia y completa en tu cuaderno estas igualdades:

a) 0,0037 km^3 = … m^3
b) 0,36 hm^3 = … dm^3
c) 15 hm^3 13 dam^3 432 m^3 = … m^3
d) 15 hm^3 13 dam^3 432 m^3 = … *l*

4 ▼▽▽ Expresa estas cantidades en forma compleja:

a) 45 125 145 dm^3 b) 0,45124568 km^3
c) 451,14521 dm^3 d) 183 000 dam^3

5 ▼▽▽ Copia y completa en tu cuaderno estas igualdades:

a) 1 hm^3 = … *hl* b) 1 dam^3 = … *dal*
c) 1 m^3 = … *l* d) 1 dm^3 = … *dl*
e) 1 cm^3 = … *cl* f) 1 mm^3 = … *ml*

6 ▼▼▽ Para cada uno de los recipientes que se citan a continuación, se dan tres volúmenes. Solo uno de ellos es razonable. Di, en cada caso, cuál es:

a) Volumen de un pantano:
71 hm^3 387 000 *l* 4 000 000 000 cm^3
b) Un depósito de agua en una vivienda:
2 dam^3 0,8 m^3 45 000 *l*
c) Un vaso normal:
2 dm^3 0,2 dm^3 0,02 dm^3
d) Una cuchara de café:
3 *dl* 3 cm^3 3 mm^3
e) Una habitación:
1 dam^3 300 *l* 30 m^3
f) El cajón de una mesa:
0,3 m^3 23 dm^3 3 000 cm^3

Cálculo de volúmenes

7 ▼▽▽ Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 dm × 15 dm × 8 dm.

8 ▼▽▽ ¿Cuál es el volumen de un cubo de 15 cm de arista?

9 ▼▽▽ La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 15 cm. La altura del prisma es de 2 dm.

Halla su volumen.

10 ▼▽▽ Un prisma tiene sus bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 40 dm y 28 dm. Su altura es 1,2 m.

Halla su volumen.

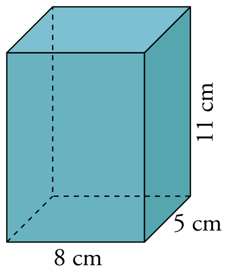
11 ▼▽▽ Halla el volumen de un cilindro de 10 cm de radio de la base y 20 cm de altura.

12 ▼▽▽ Halla el volumen de una esfera de 12 cm de diámetro.

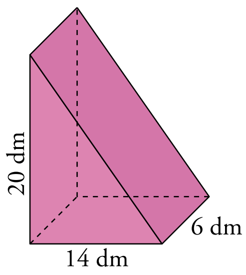
13 ▼▽▽ Halla el volumen de un cono de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

14 ▼▽▽ Halla el volumen de estos cuerpos:

a)

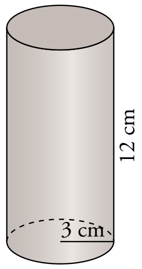


b)

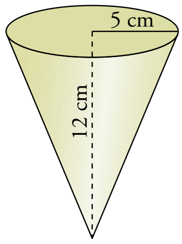


15 ▼▽▽ ¿Cuál es el volumen de estos cuerpos?

a)



b)

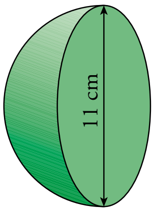


Ejercicios y problemas

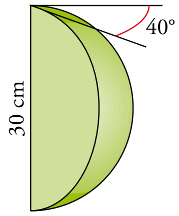
Aplica lo aprendido

Halla los volúmenes de los siguientes cuerpos:

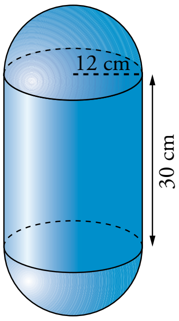
16 ▼▽▽ a)



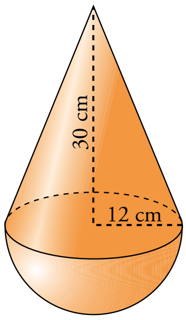
b)



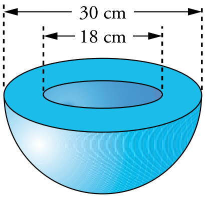
17 ▼▽▽ a)



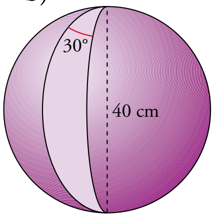
b)



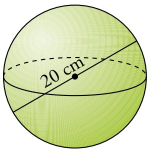
18 ▼▽▽ a)

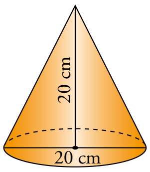


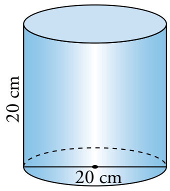
b)



19 ▼▼▽ Comprueba que el volumen del cilindro es igual a la suma de los volúmenes de la esfera y el cono:

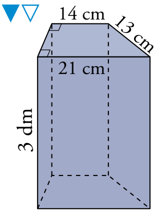


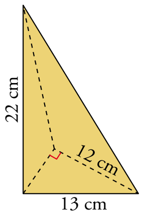




Halla los volúmenes de los siguientes cuerpos.

20 ▼▼▽





Autoevaluación

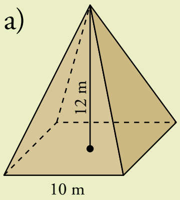
¿Conoces las unidades de volumen y sabes utilizarlas en problemas?

1 ¿Cuántas botellas con una capacidad de 3/4 *l* se pueden llenar con 0,45 dam^3 de agua?

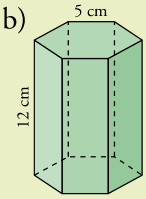
¿Sabes hallar el volumen de cuerpos geométricos, obteniendo previamente alguno de sus elementos, si fuera necesario?

2 Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

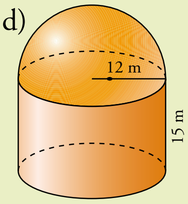
a)



b)

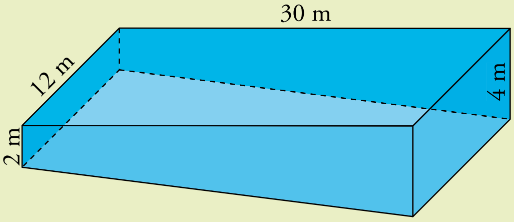


d)



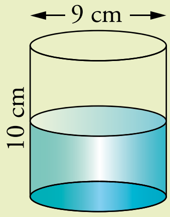
¿Aplicas el cálculo de volúmenes a la resolución de problemas?

3 La cubeta de una piscina tiene esta forma:



¿Cuál es su capacidad?

4 El interior de este vaso mide 9 cm de diámetro y 10 cm de altura. Está medio lleno de agua. Se echan dentro 50 canicas de 2 cm de diámetro. ¿Se derramará el agua?



11 Funciones

Las leyes de la naturaleza relacionan variables. Por ejemplo:

— La altura que alcanza una piedra que lanzamos hacia arriba depende de la fuerza con que se impulse.

— La cantidad de masa forestal de un bosque depende del tiempo que haya transcurrido desde que empezó a formarse.

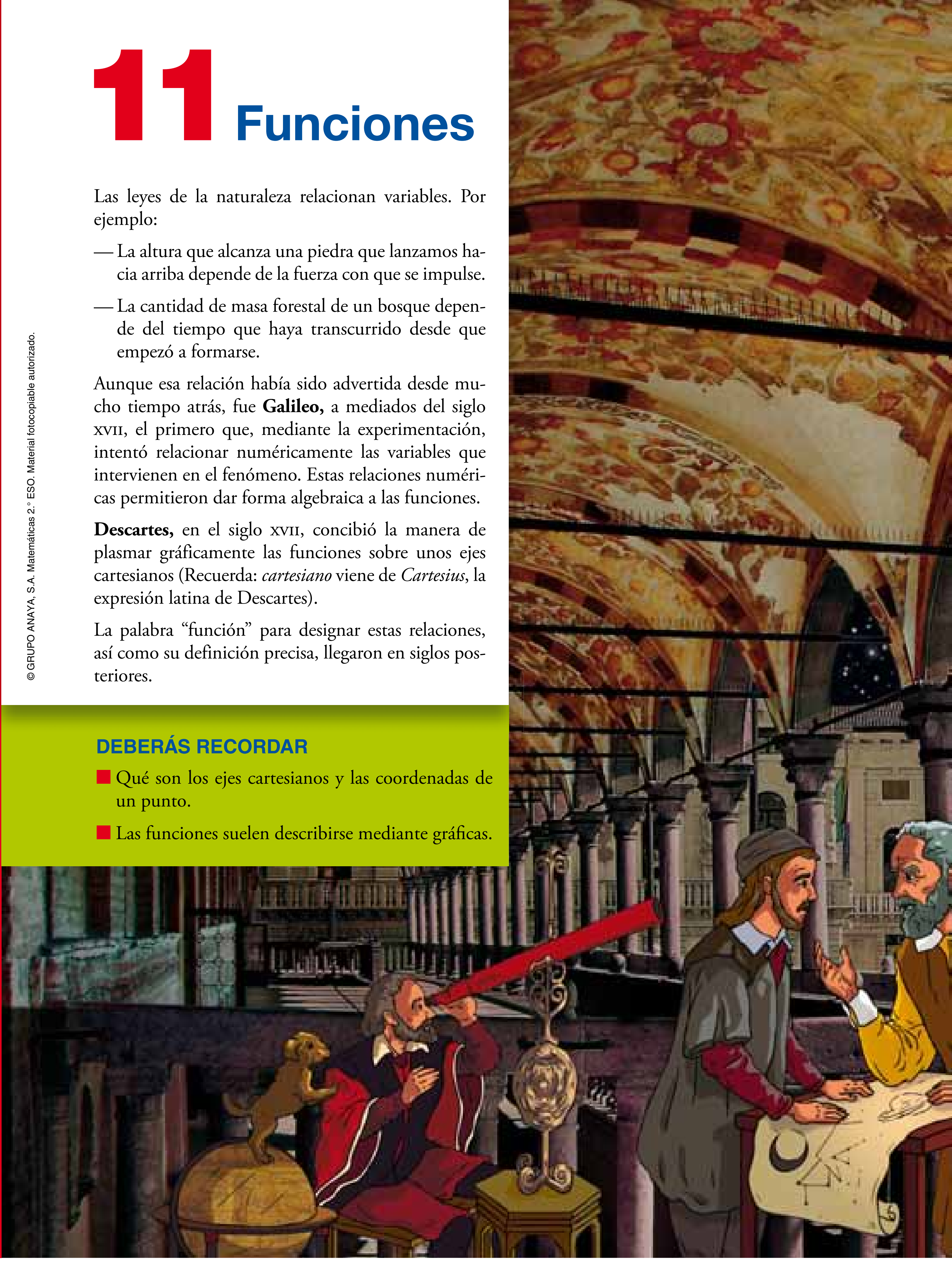
Aunque esa relación había sido advertida desde mucho tiempo atrás, fue **Galileo,** a mediados del siglo XVII, el primero que, mediante la experimentación, intentó relacionar numéricamente las variables que intervienen en el fenómeno. Estas relaciones numéricas permitieron dar forma algebraica a las funciones.

Descartes, en el siglo XVII, concibió la manera de plasmar gráficamente las funciones sobre unos ejes cartesianos (Recuerda: *cartesiano* viene de *Cartesius*, la expresión latina de Descartes).

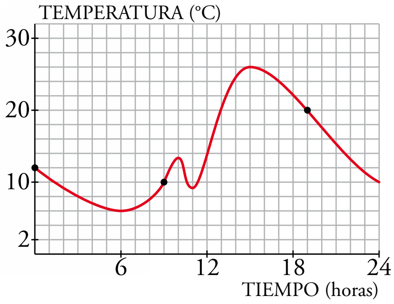
La palabra “función” para designar estas relaciones, así como su definición precisa, llegaron en siglos posteriores.

DEBERÁS RECORDAR

- Qué son los ejes cartesianos y las coordenadas de un punto.
- Las funciones suelen describirse mediante gráficas.



1 Concepto de función



Esta gráfica describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.

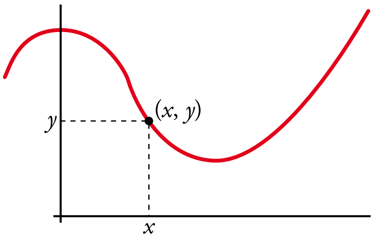
Cada punto de la gráfica relaciona un valor del eje horizontal (tiempo: hora del día) con otro del eje vertical (temperatura en °C):

— A las 0 h (12 de la noche), la temperatura era de 12 °C.

— A las 9 h, la temperatura era de 10 °C.

— A las 19 h (7 de la tarde), la temperatura era de 20 °C.

Es una función que hace corresponder a cada instante una temperatura.



Una **función** relaciona **dos variables.** En general se designan por *x* e *y*:

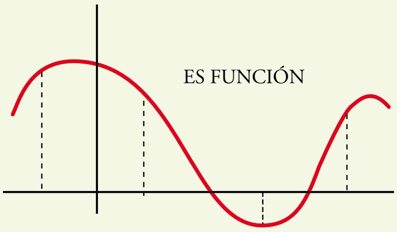
- *x* es la **variable independiente.**
- *y* es la **variable dependiente** (su valor depende del valor de *x*).

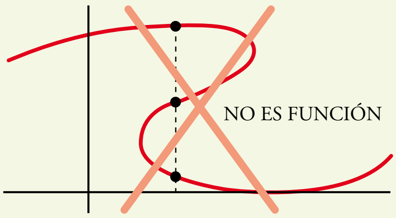
La función asocia a cada valor de *x* **un único** valor de *y*.

Para apreciar con claridad el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente sobre unos ejes cartesianos.

Ejercicio resuelto

Explicar por qué la gráfica de la izquierda es función y la de la derecha no lo es.





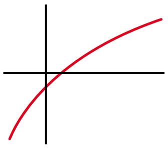
La primera gráfica es de una función porque a cada *x* le corresponde un único valor de *y*.

La segunda no lo es, porque a algunos valores de *x* les corresponden varios valores de *y*.

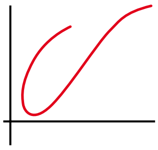
Actividades

1 Di cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones y cuáles no son funciones, justificando las respuestas:

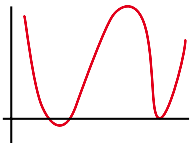
a)



b)



c)



2 En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):

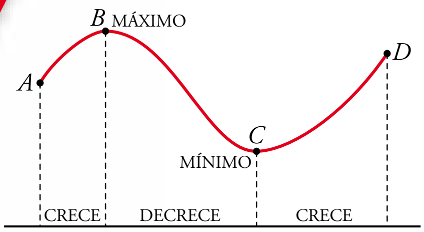
a) ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 6 de la mañana? ¿Cuál fue?

b) ¿A qué hora fue la máxima temperatura? ¿Cuál fue?

c) ¿En qué momentos del día la temperatura fue de 14 °C?

d) Durante 1 h, aproximadamente, el Sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora fue?

2 Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos



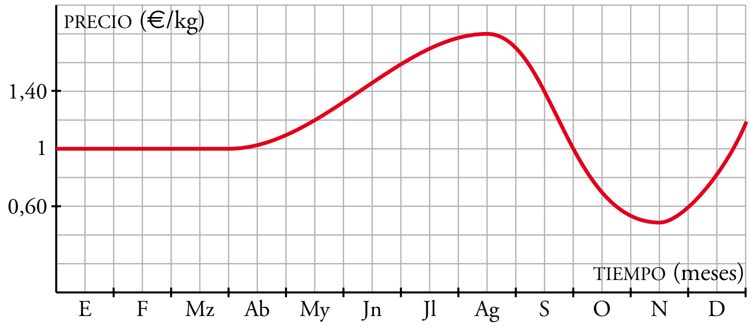
Las funciones se analizan y se describen de izquierda a derecha. Esta función es *creciente* desde A hasta B, porque los valores de la ordenada son cada vez mayores. Es *decreciente* de B a C porque, recorriendo ese tramo de izquierda a derecha, los valores de la y son cada vez menores. Finalmente, vuelve a ser creciente en el tramo de C a D.

El valor *máximo* lo toma en el punto B, y el *mínimo,* en el C.

> Una función es **creciente** en un tramo cuando al aumentar la x (es decir, al recorrerla de izquierda a derecha), aumenta la y.
>
> Es **decreciente** si, al aumentar la x, disminuye la y.
>
> Si mantiene el mismo valor en todo un tramo, se dice que es **constante** en ese tramo.
>
> El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama **máximo** de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, **mínimo.**

▼ EJEMPLO

Veamos la evolución del **precio** de las naranjas de zumo a lo largo de cierto año en el mercado de una localidad productora:



- En el primer trimestre se mantiene estable **(constante).**
- Tiene un tramo **creciente** desde principios de abril hasta mediados de agosto, que es cuando alcanza su **máximo.**
- **Decrece** hasta mediados de noviembre, cuando llega a su **mínimo.**
- Vuelve a subir (crece) hasta final de año.

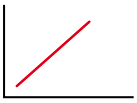
Evolución del precio

- E, F, Mz: **constante,** 1 €.
- 1.° de Ab hasta mediados de Ag: **crece** desde 1 € hasta 1,80 €.
- Mediados de Ag hasta mediados de N: **decrece** desde 1,80 € hasta 0,50 €.
- Mediados de N hasta final de año: **crece** desde 0,50 € hasta 1,20 €.

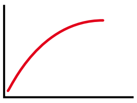
Actividades

1 Hay muchas formas de crecer y de decrecer. Observa las siguientes funciones. ¿Cuáles son crecientes? ¿Cuáles son decrecientes? (Todas ellas son lo uno o lo otro).

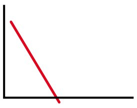
a)



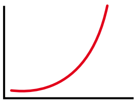
b)



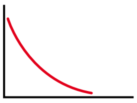
c)



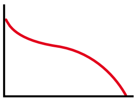
d)



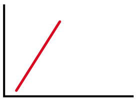
e)



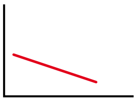
f)



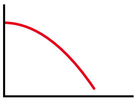
g)



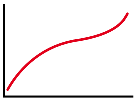
h)



i)



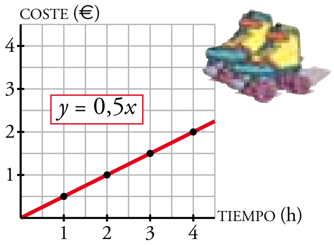
j)



3 Funciones de proporcionalidad: $y = mx$

En un parque público hay una tienda donde se alquilan patines, a 0,50 € la hora; monopatines, a 1 €/h, y bicicletas, a 2 €/h.

Veamos cuáles son los costes en función del tiempo que se utilicen:

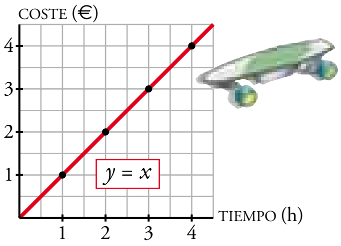


- PATINES: 0,50 € cada hora.

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	0	0,5	1	1,5	2	…	$0{,}5x$

El coste se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 0{,}5x$$

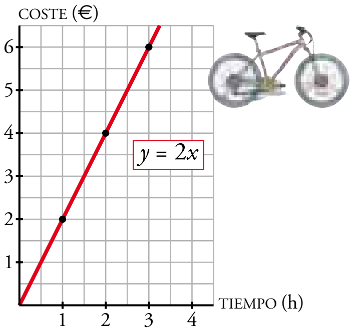


- MONOPATÍN: 1 € cada hora.

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	0	1	2	3	4	…	x

El coste se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = x$$



- BICICLETA: 2 € cada hora.

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	0	2	4	6	8	…	$2x$

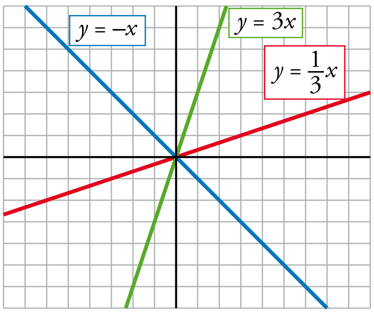
El coste se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 2x$$

Lo que cuesta alquilar unos patines es **proporcional** al tiempo que los tengamos alquilados. Lo mismo ocurre con el precio de alquiler de un monopatín y de una bicicleta. Por eso, estas funciones que relacionan el coste con el tiempo:

$$y = 0{,}5x \qquad y = x \qquad y = 2x$$

se llaman *funciones de proporcionalidad.*



Se llama **función de proporcionalidad** a la que relaciona dos valores directamente proporcionales.

Tiene la ecuación $\boldsymbol{y = mx}$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por el punto (0, 0).

La constante de proporcionalidad, m, puede ser positiva o negativa. Se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.

Ejercicio resuelto

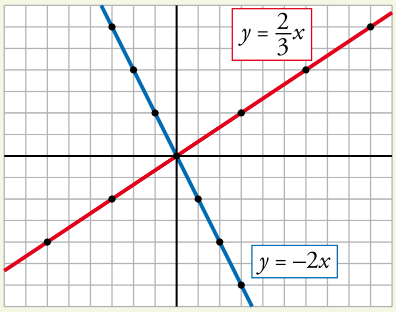
Representar: a) $\boldsymbol{y = -2x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x}$

a)

x	0	1	2	3	–1	–2
y	0	–2	–4	–6	2	4

b) Para obtener ordenadas (y) enteras, daremos a las abscisas (x) valores múltiplos de 3:

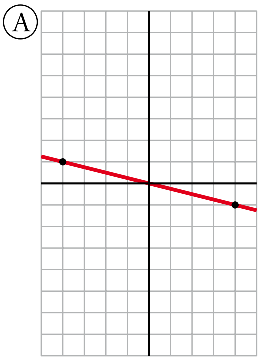
x	0	3	6	9	–3	–6
y	0	2	4	6	–2	–4

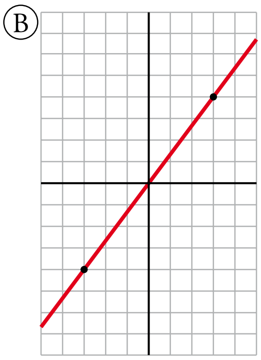


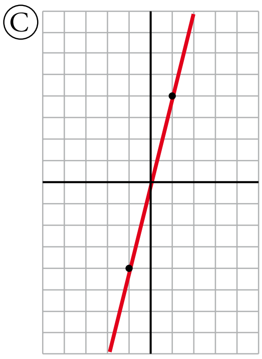
Actividades

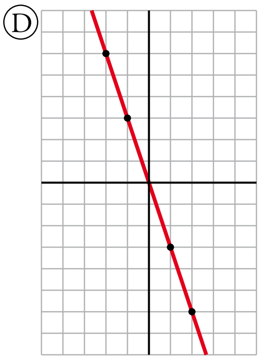
1 Asocia a cada una de las gráficas la ecuación que le corresponda:

a) $y = 4x$ b) $y = \frac{4}{3}x$ c) $y = \frac{-1}{4}x$ d) $y = -3x$









4 Funciones lineales: $y = mx + n$

El alquiler de una canoa cuesta 1 € cada hora. Pero, previamente, hemos de pagar 1,50 € para entrar en el recinto donde se encuentran. Por tanto, el coste de un paseo en canoa, en función del tiempo que estemos, es:

0 horas → 1,5 €

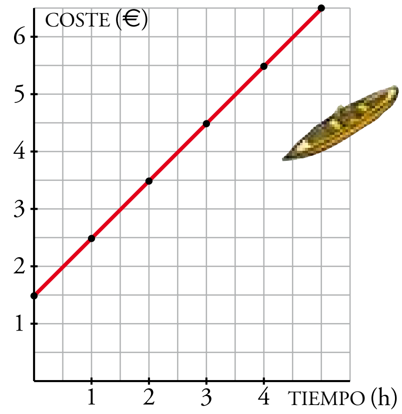
1 hora → 1,50 + 1 = 2,50 €

2 horas → 1,50 + 2 · 1 = 3,50 €

3 horas → 1,50 + 3 · 1 = 4,50 €

4 horas → 1,50 + 4 · 1 = 5,50 €

5 horas → 1,50 + 5 · 1 = 6,50 €



TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…	x
COSTE (€)	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	…	$x + 1,5$

El coste se obtiene en función del tiempo mediante la ecuación $y = x + 1,5$.

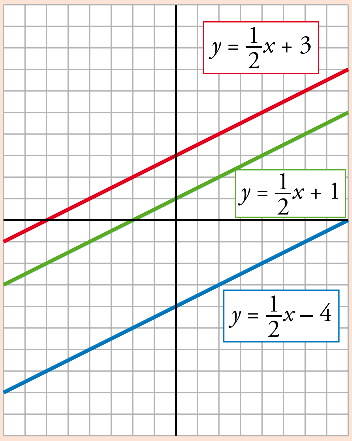
La ecuación $\boldsymbol{y = mx + n}$ se representa mediante una recta de **pendiente** m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

n se llama **ordenada en el origen.**

Dos ecuaciones con la misma pendiente se representan mediante rectas paralelas.

Las funciones $y = mx + n$ se llaman **funciones lineales.**

Cuando $n = 0$ se trata de una función de proporcionalidad, $y = mx$.



Ten en cuenta

Las funciones representadas mediante rectas tienen por ecuación:

$$y = mx + n.$$

Si $n = 0$, estamos en el caso de una función de proporcionalidad:

$$y = mx$$

Ejercicios resueltos

1. Representar estas funciones:

a) $y = 2x - 5$

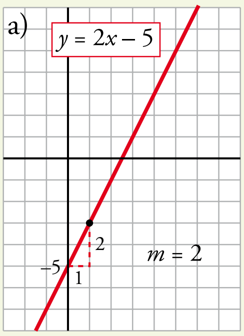
b) $y = -3x + 4$

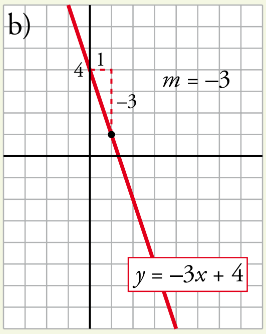
c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

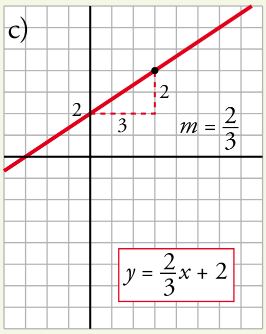
1. a) Para representar $y = 2x - 5$, nos fijamos en que $m = 2$ y $n = -5$. Por tanto, dibujaremos una recta que pase por (0, –5) y cuya pendiente sea 2 (avanza 1, sube 2).

b) Procediendo de forma análoga al caso anterior, dibujaremos una recta que pase por (0, 4) y cuya pendiente sea –3 (avanza 1, baja 3).

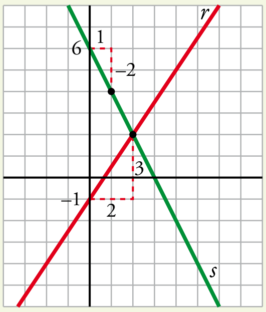
c) La recta pasará por (0, 2) y su pendiente será $\frac{2}{3}$ (avanza 3, sube 2).







2. Deducir la ecuación de las dos rectas representadas.



2. Al ser rectas, la ecuación de ambas es $y = mx + n$.

- Ecuación de r:

  Pasa por (0, –1). Por tanto, $n = -1$.

  Cuando avanza 2, sube 3. Su pendiente es $m = \frac{3}{2}$.

  Su ecuación es: $y = \frac{3}{2}x - 1$.

- Ecuación de s:

  Pasa por (0, 6). Por tanto, $n = 6$.

  Cuando avanza 1, baja 2. Su pendiente es $m = \frac{-2}{1} = -2$.

  Su ecuación es: $y = -2x + 6$.

Actividades

1 Representa las siguientes funciones:

a) $y = -2x + 5$

b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$

d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

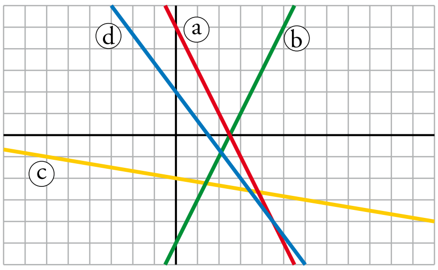
e) $y = -x - 1$

f) $y = x - 6$

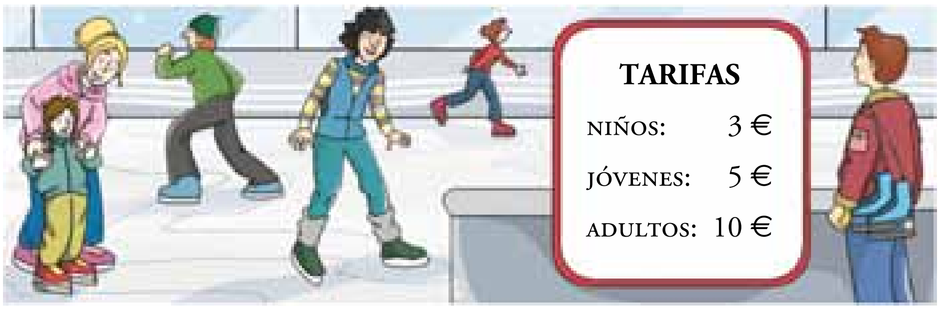
g) $y = \frac{3}{5}x + 1$

h) $y = -\frac{5}{3}x + 1$

2 Escribe las ecuaciones de estas funciones:



5 Funciones constantes: $y = k$

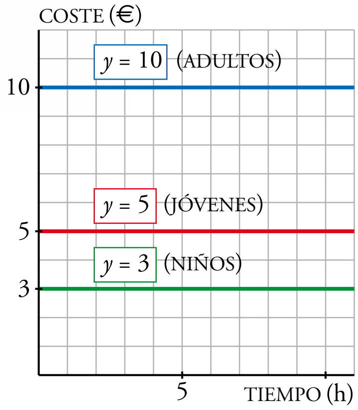


El acceso a las pistas de patinaje sobre hielo vale 3 € para los niños, 5 € para los jóvenes y 10 € para los adultos. Una vez en las pistas, se puede estar tanto tiempo como se quiera.

JÓVENES:

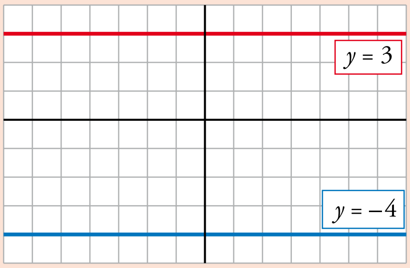
TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	…
COSTE (€)	5	5	5	5	5	…

El coste, en función del tiempo, es $y = 5$ para los jóvenes.



La función **$y = k$,** en la que el valor de y no depende de x, se llama **función constante.**

Se representa por una recta paralela al eje X, a una distancia k de este.



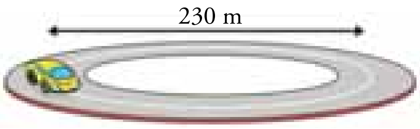
Ten en cuenta

La función constante $y = k$ es una función lineal, $y = mx + n$, en la que $m = 0$.

Problema resuelto

Un coche da vueltas alrededor de una pista circular con un diámetro de 230 m. Escribir la ecuación de la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia del coche al centro de la pista.

La función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia del coche al centro de la pista es una función constante de ecuación $y = 115$.



Actividades

1 Representa las siguientes funciones:

a) $y = 7$ b) $y = -3$ c) $y = 0$

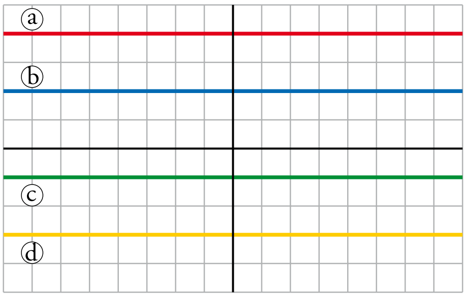
2 a) Representa la recta que pasa por estos puntos:

$A(-2, 3)$ $B(5, 3)$

b) Sin hacer ningún cálculo, ¿podrías dar la ecuación de la recta anterior?

c) ¿Cuál es la pendiente de dicha recta?

3 Escribe la ecuación de las siguientes funciones:



Ejercicios y problemas

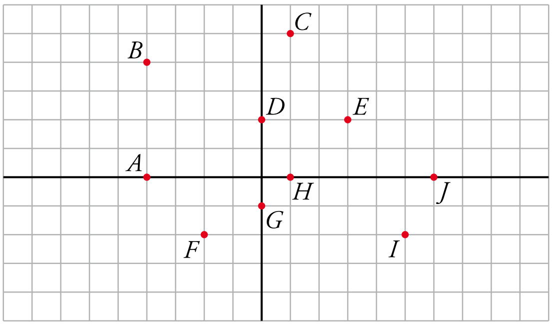
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Representación e interpretación de puntos

1 ▼▽▽ Dibuja sobre un papel cuadriculado unos ejes coordenados y representa los siguientes puntos:

$A(3, 2)$; $B(3, 7)$; $C(4, -1)$; $D(-4, 3)$; $E(-6, -2)$;
$F(0, 5)$; $G(3, 0)$; $H(-2, 0)$; $I(0, -5)$; $J(0, 0)$

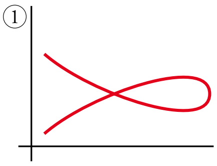
2 ▼▽▽ Di las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos:



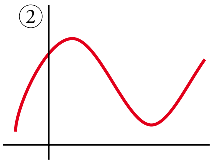
Funciones

3 ▼▽▽ ¿Cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no? Explica por qué.

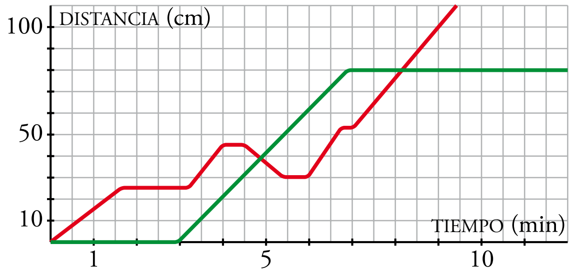
①



②



4 ▼▼▽ Rafael y María ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una pegatina roja, y otro, una pegatina verde.



El verde tarda en salir y se para antes de llegar.

a) ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se para definitivamente?

b) ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria?

c) Describe la carrera.

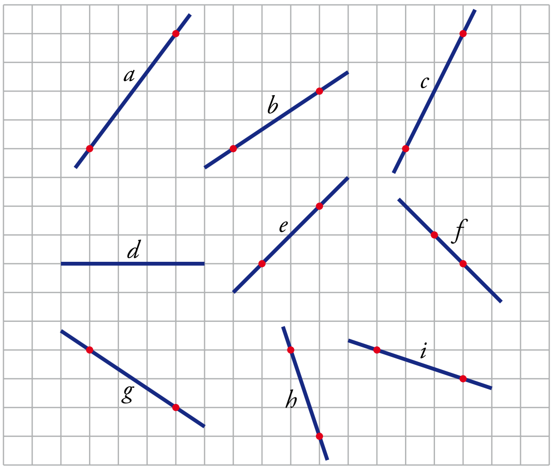
5 ▼▽▽ Se ha medido, mes a mes, la estatura de un niño desde que nace hasta que tiene un año. Estos son los resultados:

EDAD (meses)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ESTATURA (cm)	54	58	62	64	67	69	71	72	74	75	77	78	80

Representa los resultados en una gráfica.

Funciones lineales

6 ▼▽▽ Halla la pendiente de cada una de las siguientes rectas:



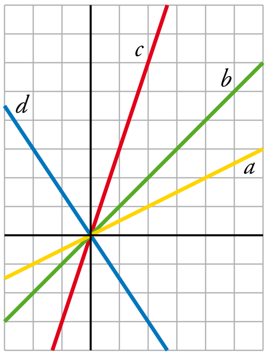
7 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones:

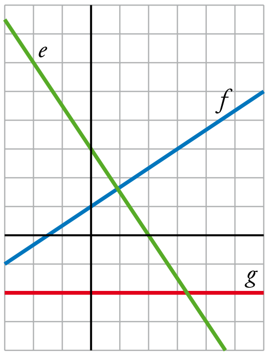
a) $y = 2x$ b) $y = \frac{1}{2}x$ c) $y = -3x$

d) $y = \frac{4}{3}x$ e) $y = -\frac{2}{5}x$ f) $y = \frac{3}{4}x$

g) $y = -3x + 5$ h) $y = -\frac{4}{3}x + 1$ i) $y = 3$

8 ▼▽▽ Escribe la ecuación de cada una de las siguientes funciones:

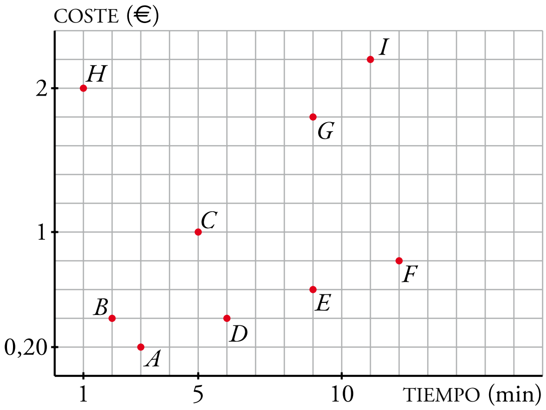




Ejercicios y problemas

Resuelve problemas

9 ▼▼▽ Cada punto del diagrama siguiente representa una llamada telefónica:



a) ¿Cuál ha sido la llamada más larga?

b) ¿Cuál ha sido la llamada más corta?

c) Una de las llamadas ha sido a Australia. ¿De cuál crees que se trata?

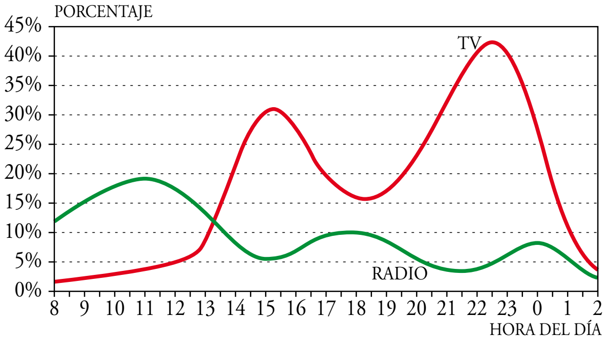
d) Hay varias llamadas locales. ¿Cuáles son?

10 ▼▼▽ Representa gráficamente esta carrera de 200 m entre dos corredores:

A sale más rápidamente que *B*, y en 5 segundos le saca 10 m de ventaja.

A se cae en el instante 5 segundos, y *B* le adelanta. Pero *A* se levanta en 2 segundos, y adelanta a *B* en la misma línea de meta.

11 ▼▼▽ Esta gráfica corresponde al porcentaje de personas que ven la televisión o escuchan la radio, en las distintas horas del día.



a) Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos… Relaciónala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena…

b) Haz lo mismo con la curva de la radio.

c) Compara las dos curvas y relaciónalas.

12 ▼▼▽ Margarita pasea alejándose de su pueblo a una velocidad de 2 km/h. En este momento se encuentra a 4 km del pueblo.

a) ¿Dónde se encontrará dentro de una hora?

b) ¿Dónde se encontraba hace una hora?

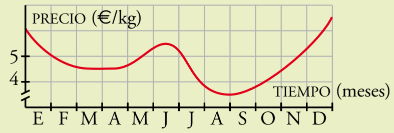
c) Representa su distancia al pueblo en función del tiempo transcurrido a partir de ahora.

d) Halla la ecuación de la función llamando x al tiempo e y a la distancia al pueblo.

Autoevaluación

¿Sabes reconocer, interpretar y analizar las gráficas de funciones?

1 a) Describe la evolución del precio de la miel a lo largo de un año.



b) ¿En qué tramos es creciente y en cuáles es decreciente?

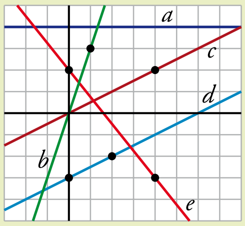
c) ¿Cuándo es mínimo el precio, y cuál es?

¿Sabes representar las funciones lineales dadas por su ecuación? ¿Sabes poner la ecuación que corresponde a una función lineal dada gráficamente?

2 Representa estas funciones:

a) $y = -\frac{5}{3}x$ b)$y = \frac{3}{4}x + 1$ c) $y = 2x - 5$

3 Escribe las ecuaciones de las siguientes funciones:



12

Estadística

Es sabido que, hace 2 000 años, César Augusto ordenó que se realizara en su imperio (Roma y sus colonias) una amplísima encuesta sobre habitantes, soldados, navíos, recursos de todo tipo y rentas públicas. A partir de entonces, los romanos realizaron censos similares cada cinco años. Esto es un antiguo antecedente de lo que actualmente se llama estadística. Pero no fue el primero.

Los recuentos estadísticos se remontan al origen de la historia. Existen documentos egipcios (papiros) de hace más de 5 000 años donde hay constancia de censos de población y de bienes públicos. Tal era su dedicación a estos asuntos, que concibieron una divinidad (*Saftnik*) "diosa de los libros y de las cuentas".

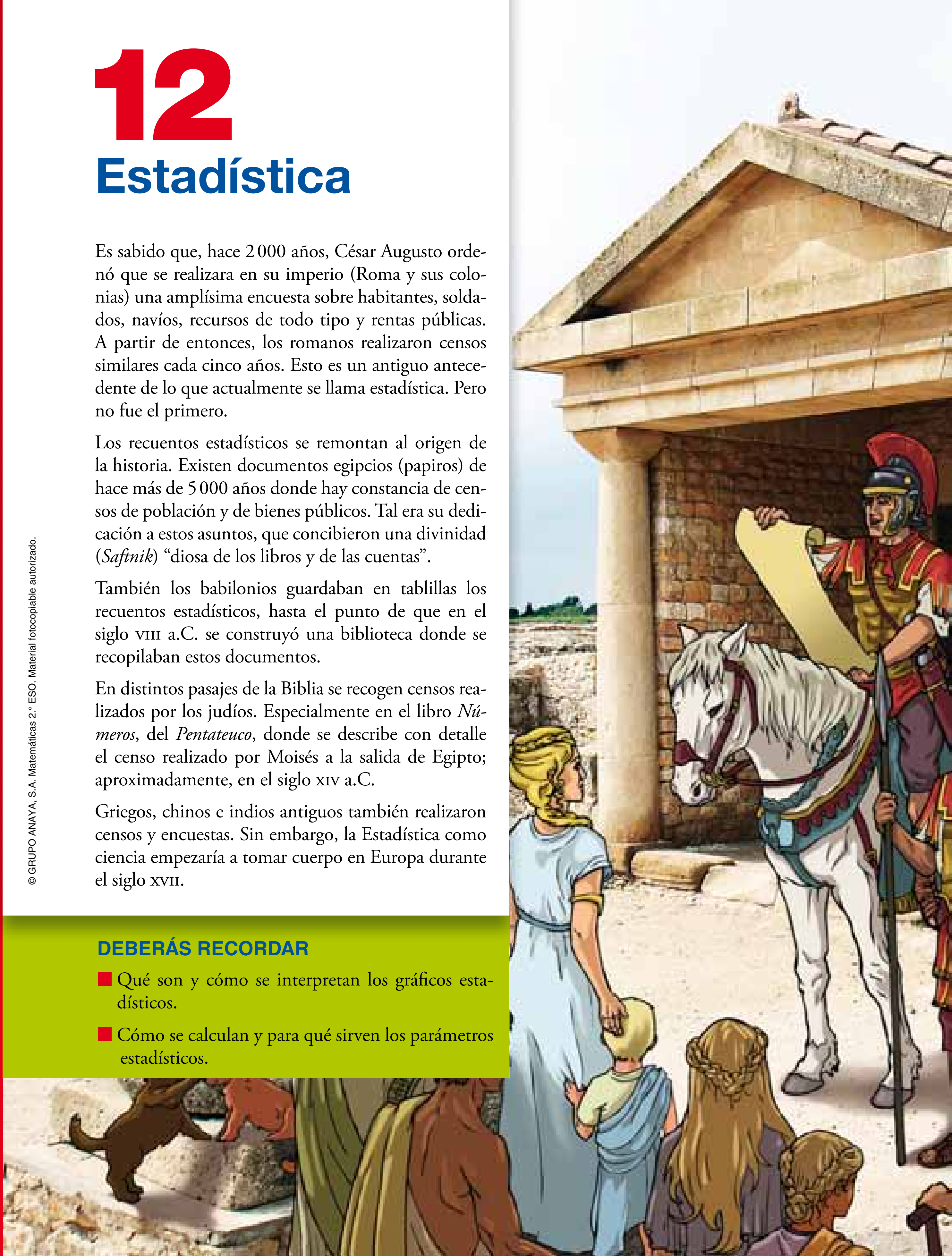
También los babilonios guardaban en tablillas los recuentos estadísticos, hasta el punto de que en el siglo VIII a.C. se construyó una biblioteca donde se recopilaban estos documentos.

En distintos pasajes de la Biblia se recogen censos realizados por los judíos. Especialmente en el libro *Números*, del *Pentateuco*, donde se describe con detalle el censo realizado por Moisés a la salida de Egipto; aproximadamente, en el siglo XIV a.C.

Griegos, chinos e indios antiguos también realizaron censos y encuestas. Sin embargo, la Estadística como ciencia empezaría a tomar cuerpo en Europa durante el siglo XVII.

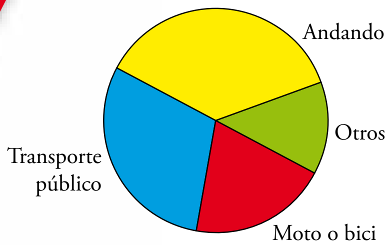
DEBERÁS RECORDAR

- Qué son y cómo se interpretan los gráficos estadísticos.
- Cómo se calculan y para qué sirven los parámetros estadísticos.

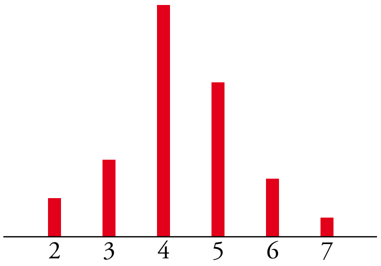


1

El proceso que se sigue para realizar estadísticas



¿CÓMO VIENES AL CENTRO?



N.º DE PERSONAS QUE VIVEN EN TU CASA

Los gráficos que hemos analizado en la página anterior son el final de un largo proceso.

¿CÓMO VIENES AL CENTRO HABITUALMENTE?

En transporte público (autobús, metro) ☐

Vengo andando ☐

Me traen (coche privado) ☐

Vengo en bici ☐

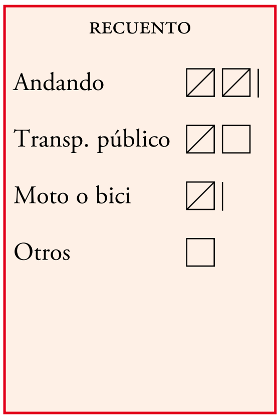
Vengo en moto ☐

Otros medios ☐

Cuáles ....

Diseñar una encuesta.

Recoger los datos.



RECUENTO

Andando

Transp. público

Moto o bici

Otros ☐

Organizar los datos.

Pasos que se dan en un estudio estadístico

1. Elaboración de la encuesta, de modo que el encuestado tenga claro lo que se pregunta y cuáles son las posibles respuestas.
2. Recogida de datos: se pasa la encuesta y se anotan las respuestas.
3. Organización, clasificación y recuento de las respuestas.
4. Elaboración de tablas con los resultados.
5. Confección de gráficos.

Otros métodos de recoger datos

En lugar de una encuesta, los datos se pueden conseguir de otras formas diferentes:

— Buscar en anuarios, archivos…

— Observar.

— Experimentar.

Actividades

1 Tira tres dados y anota la puntuación intermedia.

Por ejemplo: si sale "1, 2, 6" → anota 2
"3, 5, 5" → anota 5
"1, 1, 4" → anota 1

Realiza la experiencia 20 veces.

2 Anota la marca de los primeros 15 coches que veas pasar. (Recogida de datos por observación).

3 Pregunta a diez personas por el día de su cumpleaños y anota si es en:

Primavera (P) Verano (V)
Otoño (O) Invierno (I)

4 Para hacer un estudio sobre el sexo (NIÑO, NIÑA) de los bebés nacidos en una localidad en el último mes, ¿dónde crees que se deberían recoger los datos?

El *color de los ojos* es una variable cualitativa.

Variables estadísticas

En cada uno de los dos ejemplos que se estudiaron en la segunda página de la unidad se analiza la distribución de una variable estadística.

En el segundo de ellos, la variable es el *número de personas que viven en tu casa*. Es una *variable numérica (cuantitativa)*, pues los valores que puede tomar son números: 2, 3, 4, 5, 6, 7, …

En el primer ejemplo, la variable es *cómo acudes al centro docente*. El resultado puede ser: ANDANDO, TRANSPORTE PÚBLICO, MOTO-BICI, OTROS. Este tipo de variable se llama *cualitativa.*

Una **variable** se llama **cuantitativa** cuando toma valores numéricos, y **cualitativa,** cuando toma valores no numéricos.

La *estatura* es una variable cuantitativa.

Frecuencia

El número de individuos (chicos y chicas) que acuden al centro docente en TRANSPORTE PÚBLICO es 9.

Lo expresamos así: f[TRANSPORTE PÚBLICO] = 9

Y se lee así: la frecuencia de TRANSPORTE PÚBLICO es 9.

El número de individuos correspondiente a cada valor de la variable se llama **frecuencia** de ese valor.

EJEMPLO

Hemos preguntado a los miembros de un club musical por el número de CD que han comprado en la última semana. Estos son los resultados:

3, 0, 2, 4, 2, 3, 1, 2, 1, 4, 0, 1, 2, 1, 3

Comprueba que, según estos datos:

$$f(0) = 2 \qquad f(1) = 4 \qquad f(2) = 4 \qquad f(3) = 3 \qquad f(4) = 2$$

Actividades

5 Di si cada una de las siguientes variables estadísticas es cuantitativa o cualitativa:

a) Deporte preferido.

b) Número de calzado.

c) Estatura.

d) Estudios que se desea realizar.

e) Nota en el último examen de Matemáticas.

f) Goles marcados en una jornada por todos los equipos de primera división.

6 Lanzamos un dado 40 veces. Estos son los resultados:

1	6	1	4	5	6	2	3	2	4
2	6	6	5	1	2	6	5	3	4
1	6	2	4	6	1	4	6	3	4
2	6	4	3	5	5	2	1	5	3

Halla la frecuencia de cada uno de los valores de la variable.

2 Tablas de frecuencias

Una vez recogidos los datos correspondientes a una experiencia estadística, hay que tabularlos; es decir, hay que confeccionar con ellos una tabla en la que aparezcan ordenadamente:

— Los *valores de la variable* que se está estudiando.

— El *número de individuos* de cada valor; es decir, su *frecuencia*.

Para hacer el recuento, se leen los datos uno a uno y se marca una señal en el correspondiente valor. Si las señales se agrupan de cinco en cinco, es más fácil contarlas.

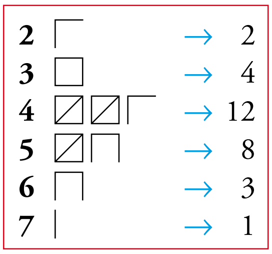
▼ **EJEMPLO**

NÚMERO DE PERSONAS QUE VIVEN EN TU CASA

DATOS

4	5	4	7	6
2	4	6	3	5
4	6	5	5	3
4	4	4	5	3
2	5	4	4	5
4	5	4	3	4

RECUENTO



TABLA

VALORES	FRECUENCIA
2	2
3	4
4	12
5	8
6	3
7	1
	30

La **tabla de frecuencias** adopta, finalmente, el aspecto que se ve arriba: cada valor tiene emparejada su frecuencia.

Actividades

1 Se pregunta a 40 estudiantes cuál de los siguientes deportes prefiere practicar: baloncesto (B), balonvolea (V), fútbol (F), tenis (T), ajedrez (A). Resultados:

F F B F F   F A F B T
V F F F A   B B F F A
B F F F F   B F B B T
F T F F B   B F T T A

Haz una tabla de frecuencias con los resultados.

2 Se ha contabilizado el número de asignaturas suspendidas en la 2.ª evaluación por los 30 estudiantes de un curso. Estos son los resultados:

1 3 1 0 4   4 1 0 2 3
0 1 1 2 3   2 3 1 1 6
1 1 2 1 2   0 0 2 1 4

Haz la correspondiente tabla de frecuencias.

3 Gráficas estadísticas

Las representaciones gráficas sirven para captar, de un solo golpe de vista, las características más sobresalientes de una distribución.

Hay muchos tipos de representaciones gráficas. Vamos a recordar algunas que ya conoces y a ver algunas nuevas.

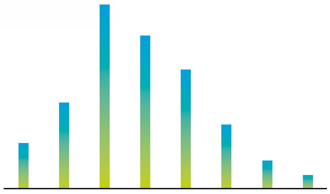
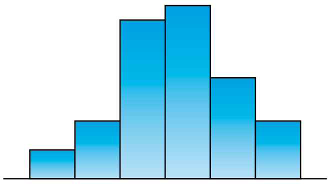


DIAGRAMA DE BARRAS

Diagrama de barras

Está formado por barras finas. Sirve para representar tablas de frecuencias de variables cualitativas, o bien cuantitativas que tomen pocos valores.

Las alturas de las barras son proporcionales a las frecuencias correspondientes.

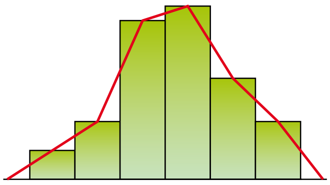


HISTOGRAMA

Histograma

Está formado por rectángulos anchos que se adosan unos a otros. Sirve para representar variables cuantitativas que tomen muchos valores diferentes.

Las áreas de los rectángulos son proporcionales a las frecuencias correspondientes.



POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Polígono de frecuencias

El polígono de frecuencias se utiliza para representar variables cuantitativas.

Se construye uniendo los puntos medios de los rectángulos de un histograma.

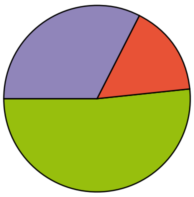


DIAGRAMA DE SECTORES

Diagrama de sectores

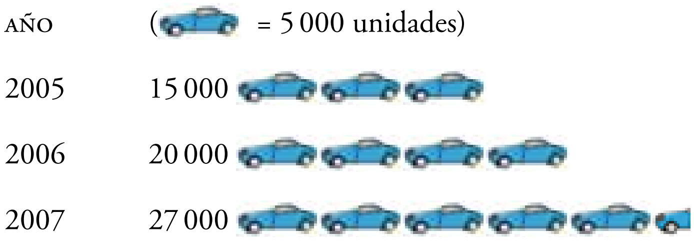
Sirven para representar variables de cualquier tipo. Cada sector representa un valor de la variable.

El ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Pictograma

Es un gráfico con figuras. Tiene la ventaja de que atrae la atención del no experto y de que queda muy claro de qué se está hablando.

PRODUCCIÓN DE COCHES EN UNA FACTORÍA



Observa

El inconveniente de los pictogramas es la mala representación de la fracción.

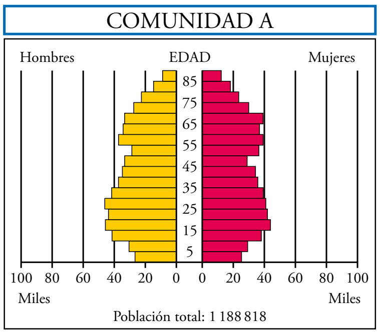
En nuestro ejemplo,  representa 2 000 coches.

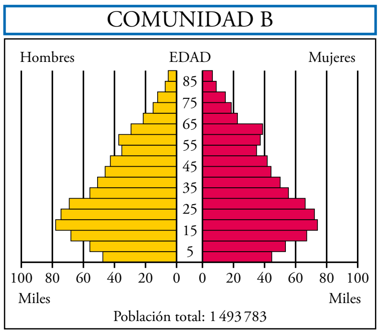
Pirámide de población

Una **pirámide de población** consiste en dos histogramas, uno para hombres y otro para mujeres, correspondientes a los habitantes de una cierta comunidad más o menos extensa, repartidos por edades. Resultan utilísimas para estudiar su situación demográfica y buscar explicación a problemas presentes y pasados. He aquí dos ejemplos:

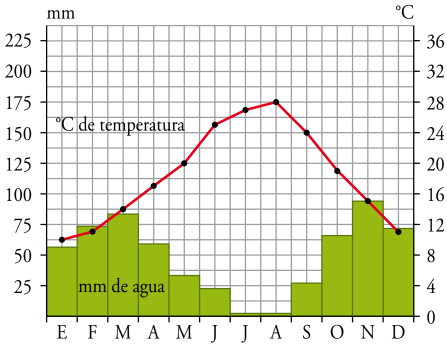
Observa

Se aprecia en la comunidad A una alta proporción de personas mayores. En la B, al contrario, la población es muy joven, con una reducidísima proporción de ancianos.





Climograma



En un **climograma** se señala la evolución, a lo largo de un año, de las **precipitaciones** y de la **temperatura** en un cierto lugar.

Observa

La temperatura se describe mediante un polígono. La cantidad de agua recogida se describe con una especie de histograma.

Actividades

1 Representa mediante un diagrama de barras la distribución de la ACTIVIDAD 2 de la página 168.

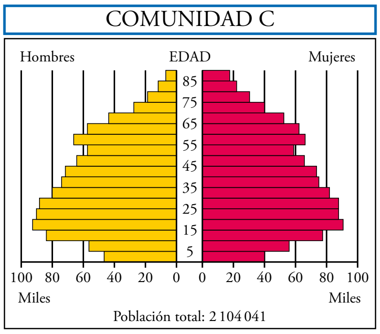
2 Representa mediante un diagrama de sectores la distribución de la ACTIVIDAD 1 de la página 168.

3 Comprueba que los datos del climograma de esta página corresponden a los de la siguiente tabla:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
TEMP. (°C)	10	11	14	17	20	25	27	28	24	19	15	11
LLUVIA (mm)	55	73	84	58	33	23	2	2	28	66	94	71

Averigua qué cantidad de lluvia (en mm) se recogió, en ese lugar, en cada uno de los cuatro trimestres del año.

4 Compara esta pirámide de población con las de las comunidades A y B que tienes arriba.



Refiérete a la proporción de niños (0 a 10 años), jóvenes (10 a 20 años) y ancianos (más de 75 años). Estudia la mayor longevidad de las mujeres.

4 Parámetros estadísticos

Los parámetros estadísticos son valores que se obtienen a partir de la distribución y que resumen alguna de sus características globales.

Parámetros de centralización

La media, la mediana y la moda se llaman medidas (o parámetros) de centralización, porque son valores alrededor de los cuales se distribuyen los datos.

Recordemos en qué consisten y cómo se calculan.

▼ **EJEMPLO.** Las respuestas de 13 alumnos a la pregunta *"¿Cuántos vivís en tu casa?"* han sido las siguientes: 2 3 3 4 4 4 5 5 6 6 7 8 8

Su **media** es $\bar{x} = \dfrac{2+3+3+4+4+4+5+5+6+6+7+8+8}{13} = \dfrac{65}{13} = 5$

Su **mediana** es $Me = 5$, porque es el valor que ocupa el lugar central cuando se sitúan ordenadamente: $\underbrace{2, 3, 3, 4, 4, 4}_{\text{hay 6}},\ \underset{\uparrow}{5},\ \underbrace{5, 6, 6, 7, 8, 8}_{\text{hay 6}}$

Su **moda** es $Mo = 4$, porque es el dato que se da más veces (3 veces).

> La **media** de varias cantidades es la suma de todas ellas dividida por el número de las que hay.
>
> Se llama **mediana** de un conjunto de datos numéricos al que, mirándolos en orden, ocupa el lugar central. Si hay un número par de datos, se asigna la mediana al valor intermedio entre los dos centrales.
>
> La **moda** es el dato con mayor frecuencia. Este parámetro sí puede ser asignado a las variables cualitativas.

Ejercicio resuelto

Hallar $\bar{x}$, Me y Mo en las siguientes distribuciones:

a) N.º de libros leídos en un mes por 10 personas:

0, 1, 3, 4, 2, 8, 4, 6, 0, 4

b) Estación del año en la que nacieron 10 personas:

P, V, V, O, P, I, I, V, O, V

a) Media: $\bar{x} = \dfrac{0+1+3+4+2+8+4+6+0+4}{10} = \dfrac{32}{10} = 3{,}2$

Mediana. Se ordenan los datos:

$$\underbrace{0, 0, 1, 2, 3}, \underbrace{4, 4, 4, 6, 8} \to Me = 3{,}5 \text{ (el promedio de 3 y 4)}$$

Moda: $Mo = 4$ (el dato que está más veces)

b) Es una variable cualitativa y no se le puede asignar media ni mediana. Su moda es $Mo = V$ (pues el número de personas nacidas en verano, 4, es mayor que en las demás estaciones).

Actividades

1 Halla $\bar{x}$, Me y Mo de las siguientes distribuciones:

a) Marcas de los coches que se están arreglando en un taller: R (Renault), S (Seat), C (Citroën), A (Audi), M (Mercedes):

R, A, C, S, R, S, S, M, C, R, S, S, R

b) Edades de varios chicos y chicas:

12, 15, 13, 12, 16, 10, 11, 12, 10, 11, 12, 9, 9, 10, 8

c) Número de asignaturas suspendidas en la última evaluación:

0, 1, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 0, 0, 0, 1

Parámetros de dispersión

Las medidas de centralización dan una visión muy parcial de la distribución. Deben ser complementadas con otros parámetros que informan sobre el grado de dispersión de los datos. Veamos algunos de ellos.

Recorrido

El **recorrido** de una distribución es la diferencia entre los valores extremos:

RECORRIDO = valor mayor – valor menor

En las distribuciones de la página anterior, sus recorridos son:

RECORRIDO DE (I) = 10 – 1 = 9 RECORRIDO DE (II) = 30 – 1 = 29

Desviación media

La **desviación media,** DM, de una distribución es un parámetro asociado a su media: es el promedio de las distancias a la media de los valores de todos los individuos.

Por ejemplo, consideremos la distribución 5, 8, 10, 11, 15, 17.

$\bar{x} = 11 \rightarrow$

DATOS	5	8	10	11	15	17
DISTANCIA A LA MEDIA	6	3	1	0	4	6

Promedio de las distancias a la media:

$$DM = \frac{6+3+1+0+4+6}{6} = \frac{20}{6} = 3{,}33$$

Distancias a la media

La distancia de 5 a $\bar{x} = 11$ es:

$11 - 5 = 6$

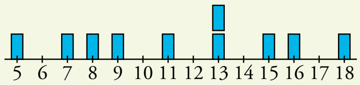
La distancia de 15 a $\bar{x} = 11$ es:

$15 - 11 = 4$

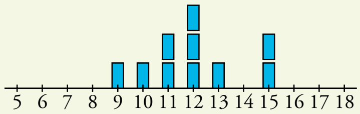
Ejercicio resuelto

Hallar la desviación media de las siguientes distribuciones:

(III) 5, 7, 8, 9, 11, 13, 13, 15, 16, 18



(IV) 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 15, 15



(III) Su media es $\bar{x} = 11{,}5$.

DATOS	5	7	8	9	11	13	13	15	16	18
DISTANCIA A 11,5	6,5	4,5	3,5	2,5	0,5	1,5	1,5	3,5	4,5	6,5

$\xrightarrow{\text{SUMA}}$ 35

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{\text{suma de las distancias a } \bar{x}}{10} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

(IV) Su media es $\bar{x} = 12$.

DATOS	9	10	11	11	12	12	12	13	15	15
DISTANCIA A 12	3	2	1	1	0	0	0	1	3	3

$\xrightarrow{\text{SUMA}}$ 14

$$\text{Desviación media: } DM = \frac{14}{10} = 1{,}4$$

Los datos de (III) (DM = 3,5) están más dispersos que los de (IV) (DM = 1,4).

Actividades

2 Calcula el recorrido y la desviación media en las distribuciones A y B de la página anterior.

Cálculo de $\bar{x}$ en tablas de frecuencias

La distribución del *número de hijos* de un grupo de familias viene dada por la tabla siguiente. Queremos calcular su $\bar{x}$.

N.º DE HIJOS	FRECUENCIA
1	5
2	15
3	11
4	4
5	0
6	1

Cálculo de la media

¿Cuántas familias hay? Sumamos las frecuencias: 5 + 15 + 11 + 4 + 1 = 36

¿Cuál es la suma total de hijos de las 36 familias? Esta suma es:

$$\overbrace{1+1+1+1+1}^{5\text{ veces}}+\overbrace{2+2+\ldots+2}^{15\text{ veces}}+\overbrace{3+\ldots+3}^{11\text{ veces}}+\overbrace{4+4+4+4}^{4\text{ veces}}+\overbrace{6}^{1}$$

Es más fácil hacerlo así: $5 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 90$

La media es, pues, $\bar{x} = \frac{90}{36} = 2{,}5$.

Cálculos directos sobre la tabla

Los cálculos anteriores se realizan muy cómodamente sobre la tabla.

x	f	f · x
1	5	5
2	15	30
3	11	33
4	4	16
5	0	0
6	1	6
	36	90

EL 2 ESTÁ 15 VECES
$15 \cdot 2 = 30$

EL 4 ESTÁ 4 VECES
$4 \cdot 4 = 16$

NÚMERO DE INDIVIDUOS

SUMA DE LOS VALORES DE TODOS LOS INDIVIDUOS

MEDIA: $\bar{x} = \frac{90}{36} = 2{,}5$

Actividades

3 Halla la media de las siguientes distribuciones.

a)

x	2	3	4	5	6	7
f	2	4	12	8	3	1

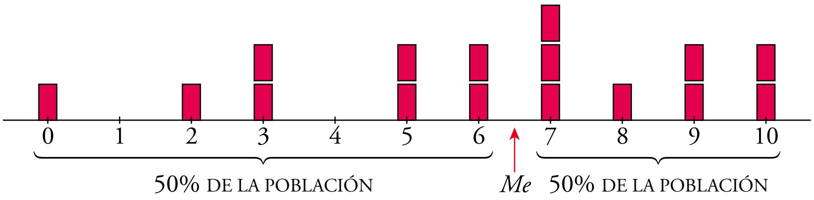
b)

x	1	2	3	4	6	7	12
f	9	7	3	3	1	1	6

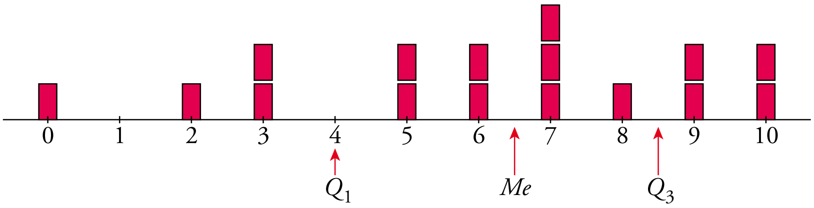
5

Parámetros de posición

A la derecha de la mediana, *Me*, está la mitad de la población. A su izquierda, la otra mitad. Es decir, la mediana parte en dos a la población:



¿Qué pasaría si quisiéramos partir la población en cuatro partes con el mismo número de individuos? Habría que señalar otros dos puntos:



Esos dos nuevos puntos se llaman **cuartiles:**

- Q_1: cuartil inferior. Entre Q_1 y *Me* está un 25% de la población.
- Q_3: cuartil superior. Entre *Me* y Q_3 está un 25% de la población.

▼ **EJEMPLO**

DISTRIBUCIÓN: 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9

Tiene 14 individuos. La cuarta parte (25%) es 14 : 4 = 3,5.

- Q_1 tiene que dejar a su izquierda "3 elementos y medio". Por tanto, hemos de situarlo en el cuarto individuo, considerando que "medio individuo" queda a su izquierda, y el "otro medio", a su derecha. Es decir: $Q_1 = 2$.
- *Me* tiene que dejar a su izquierda 7 individuos ($3{,}5 \cdot 2 = 7$). Por tanto, está entre el 7.° y el 8.° elemento; es decir, $Me = 5{,}5$.
- Q_3 tiene que dejar a su izquierda "10 elementos y medio" ($3{,}5 \cdot 3 = 10{,}5$). Por tanto, según el razonamiento seguido para hallar Q_1, Q_3 está en el 11.° elemento; es decir, $Q_3 = 8$.

Resumiendo:

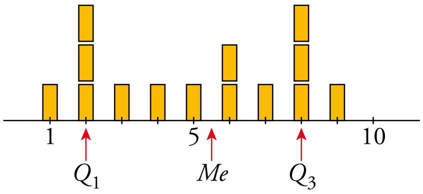
$$1,\ 2,\ 2,\ \underset{\substack{\uparrow \\ Q_1 = 2}}{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ \underset{\substack{\uparrow \\ Me = 5{,}5}}{\ }\ 6,\ 6,\ 7,\ \underset{\substack{\uparrow \\ Q_3 = 8}}{8},\ 8,\ 8,\ 9$$

Observa

¿POR QUÉ SE LLAMAN Q_1 Y Q_3?

Porque la mediana sería el segundo cuartil ($Me = Q_2$).

La mediana y los cuartiles son **medidas de posición.**



Actividades

1 En cada una de las siguientes distribuciones:

a) Halla Q_1, *Me* y Q_3.

b) Representa los datos y sitúa Q_1, *Me* y Q_3 sobre ellos.

A: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 9, 10

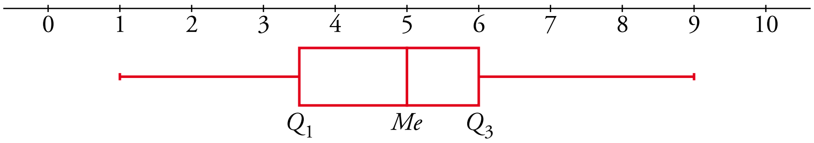
B: 1, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 16

C: 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 5, 5, 10

Diagramas de caja (o “de caja y bigotes”)

Esta representación gráfica está estrechamente ligada a las medidas de posición, mediana y cuartiles, que hemos aprendido en el apartado anterior.

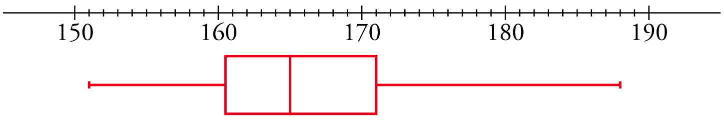
Consiste en representar estos tres valores, así como el recorrido, de manera muy clara. Por ejemplo, una distribución de notas representada así:



significa: el menor valor es 1, y el mayor, 9. $Q_1 = 3{,}5$; $Me = 5$; $Q_3 = 6$. Es decir, **la caja** describe el tramo que hay entre los dos cuartiles, señalando expresamente la mediana, y **los bigotes** se extienden a la totalidad de los datos.

▼ **EJEMPLO**

Las estaturas de un grupo de jóvenes se representan mediante el siguiente diagrama de caja y bigotes:



A la vista del diagrama podemos decir:

El más bajo mide 151 cm, y el más alto, 188 cm.

Los cuartiles son $Q_1 = 160{,}5$ cm y $Q_3 = 171$ cm.

La mediana, $Me = 165$ cm.

Como consecuencia, un 25% de estos jóvenes miden entre 151 cm y 160,5 cm; otro 25%, entre 160,5 y 165 cm; otro 25%, entre 165 cm y 171 cm, y el último 25% (los más altos) miden entre 171 cm y 188 cm.

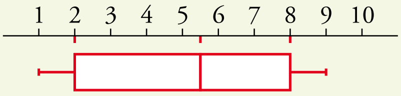
Ejercicio resuelto

Representa en un diagrama de caja y bigotes los datos:

1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9

En la página anterior hemos obtenido sus medidas de posición:

$Q_1 = 2$ $Me = 5{,}5$ $Q_3 = 8$



Ponemos la escala.

Dibujamos el diagrama.

Actividades

2 Representa mediante un diagrama de caja y bigotes cada una de las tres distribuciones de la ACTIVIDAD 1 de la página anterior.

Utiliza los valores de la media, Me, y de los cuartiles, Q_1 y Q_3, obtenidos en esa actividad.

3 Representa mediante un diagrama de caja y bigotes las siguientes calificaciones de 35 individuos:

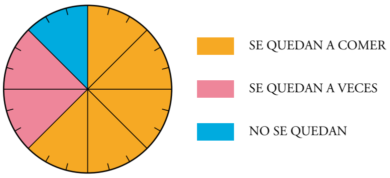
0 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6
6 7 7 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 10 10

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Gráficas estadísticas

1 ▼▼▽ Este diagrama de sectores representa los 24 estudiantes de una clase de 1.º de ESO, según se queden o no a comer en el colegio:

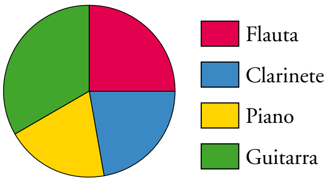


a) ¿Qué fracción de los alumnos se queda a comer?

b) ¿Qué porcentaje no se queda nunca?

c) ¿Qué tanto por ciento se queda a veces?

2 ▼▼▽ En clase de Música, cada alumno tiene que elegir un instrumento entre cuatro posibles. La distribución de los alumnos según el instrumento elegido viene dada por este diag,rama de sectores:



a) ¿Cuál es el instrumento más elegido? ¿Y el menos?

b) ¿Hay algún instrumento que lo hayan elegido exactamente el 25% de la clase?

c) Sabiendo que los alumnos que han elegido cada instrumento son 7, 8, 9 y 12, ¿qué número corresponde a cada uno de ellos?

3 ▼▼▽ Haz un climograma como el de la página 170 con los siguientes datos:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
T	14	13	20	22	26	29	32	30	28	22	16	12
LL	85	93	62	120	40	50	30	45	10	24	60	90

T: temperatura en °C. LL: pluviosidad en mm de agua.

Parámetros estadísticos

4 ▼▽▽ Halla la media, la mediana, el recorrido, la desviación media y los cuartiles de las siguientes distribuciones:

a) 1, 3, 8, 9, 4, 1, 1, 7, 10, 10

b) 1, 3, 5, 4, 2, 8, 9, 6, 10, 6

5 ▼▽▽ Compara la media y la mediana de cada una de las siguientes distribuciones y relaciona el resultado con su asimetría:

a) 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8

b) 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10

c) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9

6 ▼▼▽ Lanzamos un dado 40 veces. Estos son los resultados:

3	5	1	2	5	5	3	4	6	2
4	3	6	4	1	6	4	2	6	1
4	3	5	6	2	1	5	6	6	2
4	2	3	2	6	5	4	1	6	1

a) Halla la frecuencia de cada uno de los valores de la variable.

b) Calcula la media y la moda de la distribución.

7 ▼▼▽ Halla la media y la desviación media de cada una de las siguientes distribuciones. Represéntalas.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	0	0	1	1	6	15	9	4	3	0	1

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	9	6	1	1	0	1	1	1	1	7	12

Parámetros de posición

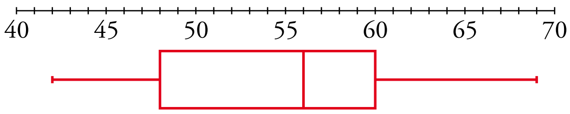
8 ▼▽▽ El número de errores que tuvieron en un test un grupo de estudiantes fueron:

1, 1, 2, 2, 4, 5, 5, 8, 8, 9

Halla la mediana y los cuartiles primero y tercero, y haz un diagrama de caja con esos datos.

9 ▼▽▽ Los tiempos que un grupo de personas han empleado en hacer un test se distribuyen entre 0 y 50 minutos. Construye el diagrama de caja sabiendo que $Q_1 = 23$, $Me = 34$ y $Q_3 = 39$.

10 ▼▽▽ Este diagrama de caja representa la distribución de los pesos de un grupo de alumnos y alumnas de una clase:



Completa en tu cuaderno estas frases observando el diagrama:

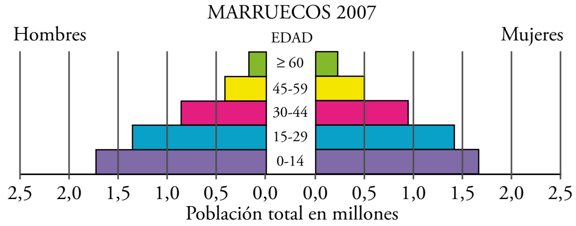
a) El 50% de los alumnos y las alumnas de esta clase pesan … o menos.

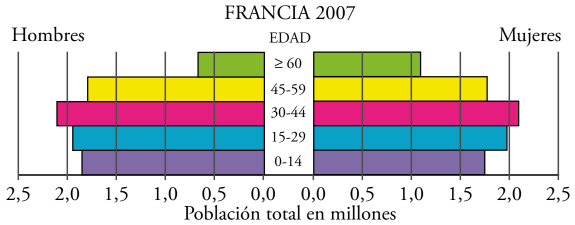
b) El 25% de los alumnos y las alumnas de esta clase pesan … o menos.

c) El 25% de los alumnos y las alumnas de esta clase pesan … o más.

d) El 50% de los pesos centrales varían entre … y …

11 ▼▼▽ Observa estas pirámides de población:





¿Verdadero o falso? Justifícalo:

a) La proporción de ancianos/as en Francia es mucho mayor que en Marruecos.

b) Hay más ancianas que ancianos en ambos países.

c) La proporción de niños/as es mayor en Marruecos que en Francia.

12 ▼▼▼ En una clase de 30 alumnos y alumnas hay 17 chicas. En total, hay 14 con gafas. Sabemos que 6 chicas tienen gafas. ¿Cuántos chicos hay sin gafas? Completa esta tabla en tu cuaderno:

	GAFAS	NO GAFAS	TOTAL
CHICAS			
CHICOS			
TOTAL			

Autoevaluación

¿Sabes hallar algunos parámetros estadísticos a partir de datos sueltos o dados en una tabla de frecuencias?

1 Halla la media, la mediana, la moda y la desviación media de las siguientes distribuciones:

a) 10, 12, 19, 15, 8, 10, 10

b) 0, 3, 3, 3, 3, 4, 5

2 Halla la media de esta distribución:

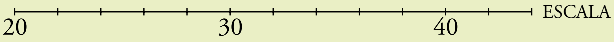
x	2	3	4	5	6	7	8	9
f	4	8	6	3	1	2	0	1

¿Sabes hallar algunos parámetros de posición y sabes construir e interpretar diagramas de caja?

3 Halla la mediana y los cuartiles de esta distribución:

23, 25, 26, 28, 31, 31, 34, 36, 36, 37, 38, 38, 39, 40

Construye un diagrama de caja.



¿Interpretas tablas de doble entrada?

4 Estas son las notas de un examen:

1	5	8	6	2	2	7	8	4	9
4	6	5	4	5	7	2	3	6	8
9	3	2	5	3	10	6	10	1	10
6	8	7	8	4	5	5	6	10	5

a) La variable, ¿es cualitativa o cuantitativa?

b) Representa los datos en una tabla de frecuencias.

c) Recoge los resultados en un diagrama de barras.

d) Halla la media, la mediana y la moda.