4

OPCIÓN B

EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matemáticas

J. Colera, Mª J. Oliveira, I. Gaztelu

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Esta serie de **Matemáticas** responde a un proyecto pedagógico creado y desarrollado por Anaya Educación para la ESO. En su elaboración han participado:

Autores: José Colera, M.ª José Oliveira, Ignacio Gaztelu, Leticia Colera Cañas y M.ª Mar Martínez

Coordinación editorial: Mercedes García-Prieto

Edición: Carlos Vallejo

Diseño de cubiertas e interiores: Miguel Ángel Pacheco y Javier Serrano

Tratamiento infográfico del diseño: Javier Cuéllar, Patricia Gómez y Teresa Miguel

Equipo técnico: Coral Muñoz

Corrección: Sergio Borbolla

Ilustraciones: Montse Español y Álex Orbe

Edición gráfica: Olga Sayans

Fotografías: 123RF/Quickimage, Age Fotostock, Archivo Anaya (Candel, C.; Cosano, P.; Martin, J.; Padura, S.; Pérez-Uz, B.; Ruiz, J.B.; Ruiz Pastor, L.; Steel, M.; Zuazo A.H.), Corbis/Cordon Press, NASA.

Las normas ortográficas seguidas son las establecidas por la Real Academia Española en la nueva **Ortografía de la lengua española,** publicada en el año 2010.

Índice

Unidad	Contenidos	Competencias

Unidad	Contenidos	Competencias

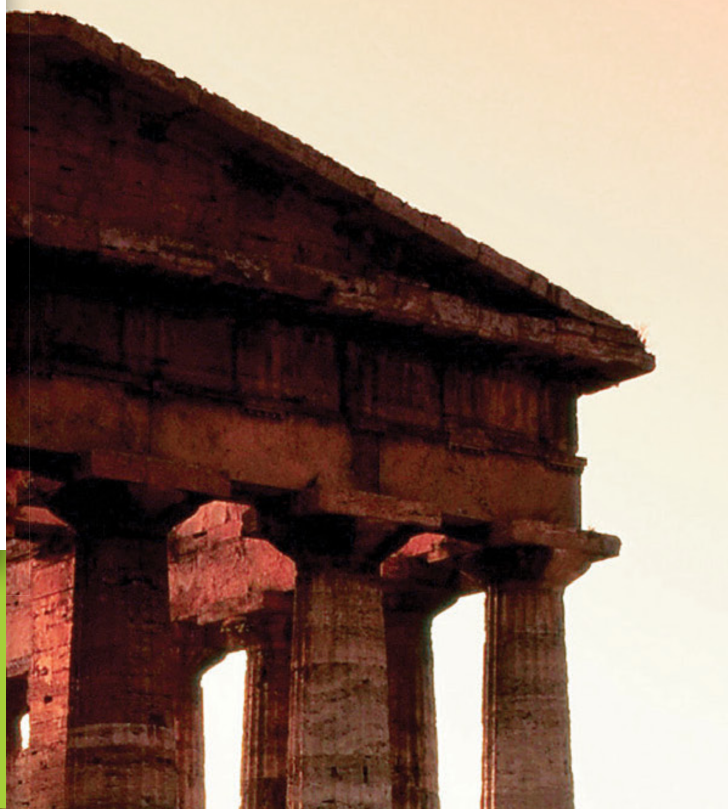
1 Números reales

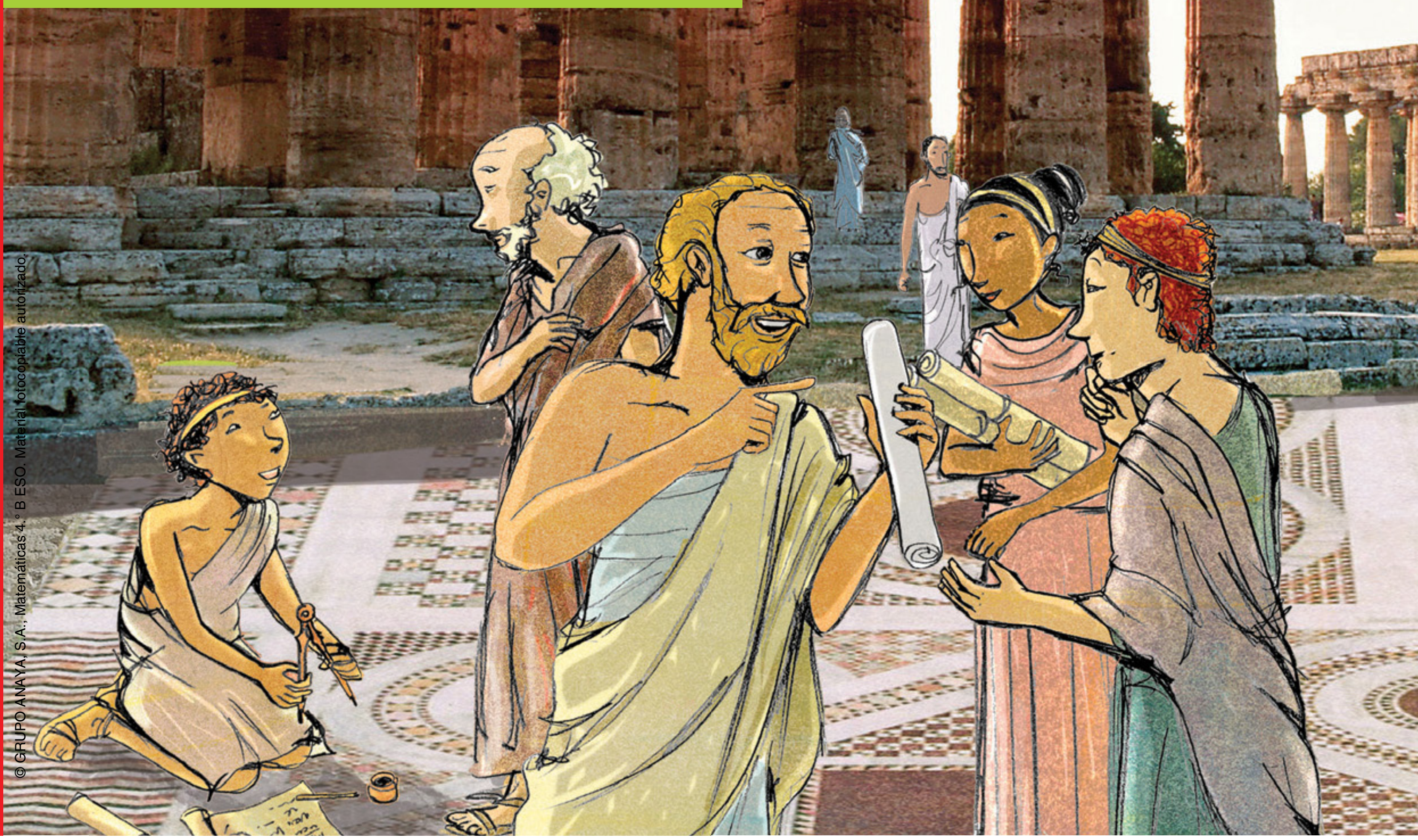
Los *números irracionales* fueron descubiertos por los pitagóricos aproximadamente en el siglo V antes de nuestra era. Sin embargo, más que como números, fueron tomados como magnitudes geométricas. Esta forma de tratarlos se extendió durante casi dos milenios. Es muy reciente, pues, la idea de que estos números, junto con los *racionales*, forman un único conjunto con estructura y características muy interesantes.

El concepto de *número real*, como ahora lo manejamos, se fue concibiendo y construyendo al evolucionar el estudio de las funciones. Finalmente, fue formalizado en 1871 por el alemán **Cantor.**

DEBERÁS RECORDAR

- Cómo expresar un número decimal exacto en forma de fracción.
- Cómo expresar un decimal periódico en forma de fracción.



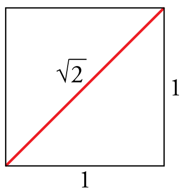


1 Números irracionales

Números racionales son los que se pueden poner como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es exacta o periódica.

Números irracionales son los no racionales, es decir, los que no pueden obtenerse como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica. Por ejemplo, $\pi = 3,14159265359\ldots$

Hay infinitos números irracionales, algunos de los cuales son especialmente interesantes. Veamos algunos.



La diagonal del cuadrado: el número $\sqrt{2}$

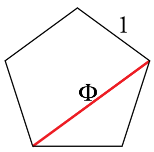
El teorema de Pitágoras nos proporciona el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1:

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{es un número irracional.}$$

Otros irracionales expresados mediante radicales

Los números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \ldots, \sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{10}, \ldots$ son irracionales.

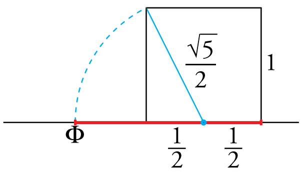
En general, si p no es una potencia n-ésima, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional.



SÍMBOLO DE LOS PITAGÓRICOS

El número de oro: $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

La diagonal de un pentágono de lado unidad es el número $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Históricamente es el primer número del que se tuvo conciencia de su irracionalidad. En el siglo v a.C., los griegos pitagóricos descubrieron con sorpresa (y casi con espanto) que la diagonal del pentágono y su lado no guardaban una proporción exacta. Hasta entonces se creía que todo el universo se regía por los números naturales y las *razones* entre ellos (fracciones). Pero al descubrir que no era así, les pareció que el caos se asomaba a su mundo. Por eso, llamaron **irracional** (contraria a la razón) a esta relación entre diagonal y lado del pentágono.

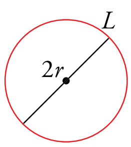


Construcción del número Φ.

Posteriormente, los artistas griegos consideraron que la proporción $\Phi : 1$ resultaba especialmente armoniosa, por lo que la llamaron **razón áurea,** y al número Φ, **número áureo.**

El nombre, Φ (**fi,** letra griega correspondiente a la F), es la inicial de **Fidias,** escultor griego que utilizó asiduamente esta razón.

El número π



$$\frac{L}{2r} = \pi$$

Como sabes, π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Este número lo conoces y lo utilizas desde hace muchos cursos. Has hecho uso de las siguientes aproximaciones suyas: 3,14 o 3,1416. Su verdadero valor tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

π es la letra griega correspondiente a la "p". ¿Por qué este nombre? La palabra griega *perifereia* significa "circunferencia" (la periferia del círculo).

2 Números reales

Entrénate

1 a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?

$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};$
$3\pi;\ -2\sqrt{5}$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

2 a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:

$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};$
$\frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama **conjunto de números reales** y se designa por $\mathbb{R}$. De modo que la tabla sobre números, que ya conocemos, puede ampliarse y completarse del siguiente modo:

- REALES $\mathbb{R}$
  - RACIONALES $\mathbb{Q}$
    - ENTEROS $\mathbb{Z}$
      - NATURALES $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ $0,\ 4,\ \frac{24}{6},\ \sqrt{121}$
      - ENTEROS NEGATIVOS $\rightarrow$ $-11,\ -\frac{27}{3},\ \sqrt[3]{-8}$
    - FRACCIONARIOS $\rightarrow$ $5{,}84;\ \frac{1}{2};\ 5{,}\widehat{83};\ -\frac{3}{10}$
  - IRRACIONALES $\rightarrow$ $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \Phi,\ \pi,\ -\sqrt{5}+2,\ \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que se hacen con los racionales: suma, resta, multiplicación y división (salvo por el cero) y se mantienen las mismas propiedades.

También podemos extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par de números negativos) y el resultado sigue siendo un número real. Eso no ocurría con los números racionales.

La recta real

Si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y marcamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, *a cada punto de la recta le corresponde un número real*. Por eso, a la recta numérica la llamamos **recta real.**

Ejercicio resuelto

Situar cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Cada uno puede estar en más de un casillero:

$\mathbf{24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;}$
$\mathbf{\frac{3}{5};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{9};\ \frac{28}{7};\ \pi - 1}$

NATURALES, $\mathbb{N}$	$24;\ 28/7 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$24;\ -5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
FRACCIONARIOS	$0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ 3/5$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;\ 3/5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
IRRACIONALES	$\sqrt{7};\ \pi - 1$

Actividades

1 Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (HAZLO EN TU CUADERNO).

$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi - 3$

NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
FRACCIONARIOS	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
IRRACIONALES	

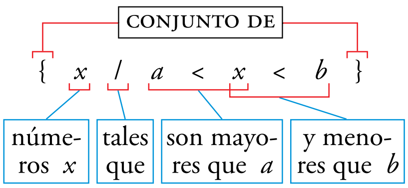
3 Intervalos y semirrectas

Para designar algunos tramos de la recta real, existe una nomenclatura que debes conocer.

Intervalo abierto

$(a, b) = \{x \,/\; a < x < b\}$

La expresión anterior se lee así:



Intervalo abierto

El **intervalo abierto** $(\boldsymbol{a, b})$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, sin incluir ni a ni b: $\{x \,/\; a < x < b\}$.

Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $(–2, 1)$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre $–2$ y 1, sin incluir ni $–2$ ni 1: $\{x \,/\; –2 < x < 1\}$.

Su representación es esta:

Intervalo cerrado

El **intervalo cerrado** $[\boldsymbol{a, b}]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, ambos incluidos: $\{x \,/\; a \le x \le b\}$.

Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $[–2, 1]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre $–2$ y 1, incluyendo el $–2$ y el 1: $\{x \,/\; –2 \le x \le 1\}$.

Su representación es esta:

Intervalo semiabierto

- El **intervalo** $(\boldsymbol{a, b}]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo b pero no a: $\{x \,/\; a < x \le b\}$.

  Se representa así:

- El **intervalo** $[\boldsymbol{a, b})$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b, incluyendo a pero no b: $\{x \,/\; a \le x < b\}$.

  Se representa así:

Por ejemplo, el intervalo $(3, 4]$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre 3 y 4, incluyendo el 4 pero no el 3: $\{x \,/\; 3 < x \le 4\}$.

Su representación es esta:

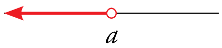
El intervalo $[3, 4)$ es el conjunto de todos los números comprendidos entre 3 y 4, incluyendo el 3 pero no el 4: $\{x \,/\; 3 \le x < 4\}$.

Su representación es esta:

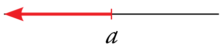
Semirrectas y recta real

Semirrectas

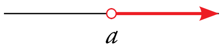
$(-\infty, a) = \{x \,/\; x < a\}$



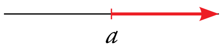
$(-\infty, a] = \{x \,/\; x \le a\}$



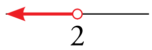
$(a, +\infty) = \{x \,/\; x > a\}$

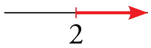


$[a, +\infty) = \{x \,/\; x \ge a\}$



$(-\infty, a)$ son los números menores que a: $\{x \,/\; x < a\}$.
$(-\infty, a]$ son los números menores que a y el propio a: $\{x \,/\; x \le a\}$.
$(a, +\infty)$ son los números mayores que a: $\{x \,/\; x > a\}$.
$[a, +\infty)$ son los números mayores que a y el propio a: $\{x \,/\; x \ge a\}$.

- $(-\infty, 2)$ es el conjunto $\{x \,/\; x < 2\}$ → 

- $[2, +\infty)$ es el conjunto $\{x \,/\; x \ge 2\}$ → 

La propia **recta real** se representa en forma de intervalo así: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

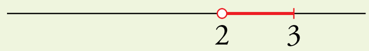
Ejercicios resueltos

1. Escribir en forma de intervalo y representar:

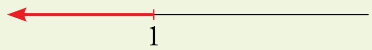
a) $2 < x \le 3$ **b)** $x \le 1$

c) $x > 0$

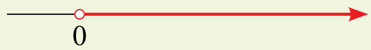
1. a) Intervalo semiabierto $(2, 3]$



b) Semirrecta $(-\infty, 1]$



c) Semirrecta $(0, +\infty)$



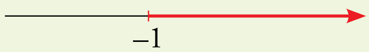
2. Escribir en forma de desigualdad y representar:

a) $[-2, 0]$ **b)** $[-1, +\infty)$

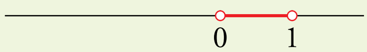
c) $(0, 1)$

2. a) $\{x \,/\, -2 \le x \le 0\}$

b) $\{x \,/\, x \ge -1\}$



c) $\{x \,/\, 0 < x < 1\}$



Actividades

1 Escribe los conjuntos siguientes en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones indicadas en cada caso:

a) Comprendidos entre 5 y 6, ambos incluidos.

b) Mayores que 7.

c) Menores o iguales que –5.

2 Escribe en forma de intervalo y representa:

a) $\{x \,/\; 3 \le x < 5\}$ b) $\{x \,/\; x \ge 0\}$

c) $\{x \,/\; -3 < x < 1\}$ d) $\{x \,/\; x < 8\}$

3 Escribe en forma de desigualdad y representa:

a) $(-1, 4]$ b) $[0, 6]$ c) $(-\infty, -4)$ d) $[9, +\infty)$

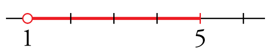
4 Escribe en forma de intervalo o semirrecta y representa en la recta real los números que cumplen la desigualdad indicada en cada caso:

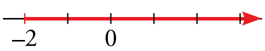
a) $-3 \le x \le 2$ b) $-1 < x < 5$

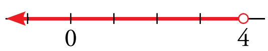
c) $0 < x \le 7$ d) $x > -5$

5 Expresa como intervalo o semirrecta y como una desigualdad cada uno de los conjuntos de números representados.

a) 

b) 

c) 

d) 

6 Indica cuáles de los números siguientes están incluidos en $A = [-3, 7)$ o en $B = (5, +\infty)$:

$-3;\; 10;\; 0{,}5;\; 7;\; \sqrt{5};\; 6{,}\widehat{3}$

4 Raíces y radicales

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 2$ b) $\sqrt[k]{-243} = -3$

c) $\sqrt[4]{k} = \dfrac{2}{3}$ d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2$

2. Calcula las raíces siguientes:

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[5]{32}$

c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[8]{0}$

e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$

Se llama **raíz *n*-ésima** de un número a, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical;** a, **radicando,** y n, **índice** de la raíz.

Cuando manejes expresiones como esta, habrá ocasiones en las que debes calcular el valor numérico. Para ello, deberás tener en cuenta la definición, como en las que se proponen en este margen, o bien recurrir a la calculadora. Pero en otros casos deberás mantener el radical, simplificarlo, operar con otros radicales, etcétera. Nos dedicaremos a esto en el próximo epígrafe.

Algunas peculiaridades de las raíces

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n.
- Si $a < 0$, solo existen sus raíces de índice impar.
- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, con $\sqrt{4}$ nos referimos a la positiva: $\sqrt{4} = 2$.

  En general, un número positivo, a, tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Forma exponencial de los radicales

Los radicales se pueden expresar como potencias:

$$\sqrt{a} = a^{1/2}, \text{ pues } (a^{1/2})^2 = a^{2/2} = a$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}, \text{ pues } (a^{2/3})^3 = a^{6/3} = a^2$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{5} = 5^{1/2} \ ; \ \sqrt[5]{2^3} = 2^{3/5}$$

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

Actividades

1 Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[15]{a^6}$

d) $\sqrt{a^{13}}$ e) $\sqrt[6]{a^5}$ f) $\sqrt[4]{a^8}$

2 Calcula.

a) $4^{1/2}$ b) $125^{1/3}$ c) $625^{1/4}$

d) $8^{2/3}$ e) $64^{5/6}$ f) $36^{3/2}$

3 Expresa en forma radical.

a) $x^{7/9}$ b) $n^{2/3}$ c) $b^{3/2}$ d) $a^{4/5}$

4 Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[5]{x^2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{10^6}$ d) $\sqrt[4]{20^2}$

e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ f) $\sqrt[4]{a}$ g) $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$ h) $\sqrt[15]{a^5}$

5 Pon en forma de raíz.

a) $5^{1/2}$ b) $(-3)^{2/3}$ c) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/3}$

d) $(a^3)^{1/4}$ e) $(a^{1/2})^{1/3}$ f) $(a^{-1})^{3/5}$

5 Potencias y raíces con la calculadora

Potencias y raíces sencillas: $\boxed{x^2}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x^3}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$

Todas las calculadoras científicas tienen las teclas $\boxed{x^2}$ y $\boxed{\sqrt{\ }}$. Muchas tienen también $\boxed{x^3}$ y $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$, aunque estas suelen aparecer como **segunda función** (es decir, fuera de la tecla y, por tanto, deben ser precedidas por $\boxed{\text{SHIFT}}$).

Por ejemplo:

$247^2 \to 247\ \boxed{x^2}\ \boxed{61009}$ $\qquad 4{,}8^3 \to 4{,}8\ \boxed{x^3}\ \boxed{110.592}$

$\sqrt{247} \to \boxed{\sqrt{\ }}\ 247\ \boxed{=}\ \boxed{15.71623364}$

$\sqrt[3]{4{,}8} \to \boxed{\sqrt[3]{\ }}\ 4{,}8\ \boxed{=}\ \boxed{1.6868653306}$

Si hay en la pantalla un número cuya raíz cuadrada quieres calcular, antes de dar a la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ pulsa $\boxed{=}$.

Por ejemplo: $\boxed{58403}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{241.667126436}$

Atención

Hay calculadoras antiguas que proceden al revés:

$\sqrt{247} \to 247\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{15.7162336}$

Potencias de índice cualquiera: $\boxed{x^y}$ (o bien $\boxed{x^{\blacksquare}}$)

$17{,}84^5 \to 17{,}84\ \boxed{x^y}\ 5\ \boxed{=}\ \boxed{1807066.97984}$

$4^{2{,}5} \to 4\ \boxed{x^y}\ 2{,}5\ \boxed{=}\ \boxed{32}$

Raíces de índice cualquiera: $\boxed{\sqrt[y]{\ }}$ (o bien $\boxed{\sqrt[\blacksquare]{\square}}$)

Atención, aquí el orden en que intervienen el índice, el radicando y la tecla dependen mucho de la calculadora. Por ejemplo:

$\sqrt[5]{32}$

- $5\ \boxed{\sqrt[y]{\ }}\ 32\ \boxed{=}\ \boxed{2}$ PANTALLA SENCILLA
- $\boxed{\sqrt[\blacksquare]{\square}}\ 5 \blacktriangleright 32\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt[5]{32}\quad 2}$ PANTALLA DESCRIPTIVA

Atención

En algunas calculadoras, en vez de llamar a esta función $\sqrt[x]{\ }$ se le llama $x^{1/y}$, y actúa así:

$32\ \boxed{x^{1/y}}\ 5\ \boxed{=}\ \boxed{2}$

Incluso hay calculadoras con la tecla $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$. Con ellas se procede así:

$\sqrt[5]{32} \to 32\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ 5\ \boxed{=}\ \boxed{2}$

Cálculo de raíces con la tecla de potencia

$\sqrt[5]{32} = 32^{1/5} \to 32\ \boxed{x^y}\ 5\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}\ \boxed{2}$

$\sqrt[5]{32^3} = 32^{3/5} \to 32\ \boxed{x^y}\ 3\ \boxed{a^b/c}\ 5\ \boxed{=}\ \boxed{8}$

Actividades

Halla con la calculadora:

1 a) $\sqrt{541}$ b) 327^2 c) $\sqrt[3]{8{,}53}$

2 a) $\sqrt[5]{8{,}24}$ b) $\sqrt[6]{586}$ c) $\sqrt[4]{79{,}46}$

3 a) $\sqrt[5]{37^2}$ b) $\sqrt[4]{2{,}1^5}$ c) $\sqrt[3]{0{,}008^2}$

4 Calcula las raíces del ejercicio 2 utilizando la tecla $\boxed{x^y}$.
(Por ejemplo: $8{,}24\ \boxed{x^y}\ 5\ \boxed{1/x}\ \boxed{=}$).

5 Calcula las raíces del ejercicio 3 utilizando la tecla $\boxed{x^y}$.
(Por ejemplo: $37\ \boxed{x^y}\ 2\ \boxed{a^b/c}\ 5\ \boxed{=}$).

6 Propiedades de los radicales

Los radicales tienen una serie de propiedades que debes conocer y utilizar con soltura. Todas ellas son consecuencias de propiedades de las potencias.

Simplificación de radicales

Si el radicando está en forma de potencia, o puede ponerse así, es posible que el radical pueda simplificarse. Para ello, conviene expresarlo en forma de potencia.

Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

Entrénate

1 Simplifica.

a) $\sqrt[4]{5^2}$ b) $\sqrt[6]{2^3}$ c) $\sqrt[8]{3^4}$

d) $\sqrt{7^4}$ e) $\sqrt[3]{5^6}$ f) $\sqrt[4]{11^8}$

Extracción de factores fuera de una raíz

Si el radicando descompuesto en factores tiene potencias de exponente igual o mayor que el índice de la raíz, algunos de ellos pueden salir fuera de la raíz.

Por ejemplo:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = 2^{4/2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} =$$

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Entrénate

2 Extrae factores.

a) $\sqrt{12}$ b) $\sqrt{50}$

c) $\sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt[3]{24}$

e) $\sqrt{175}$ f) $\sqrt[4]{80}$

g) $\sqrt{180}$ h) $\sqrt{300}$

Producto de radicales del mismo índice

Por ejemplo:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{15 \cdot 20} = \sqrt{300} = \sqrt{100 \cdot 3} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{5 \cdot 50} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

Entrénate

3 Multiplica y simplifica.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}$ d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}$ f) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

Potencia de un radical

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = \sqrt{2^{3 \cdot 4}} = \sqrt{2^{12}} = 2^{12/2} = 2^6$$

$$\left(\sqrt[5]{4}\right)^3 = \left(\sqrt[5]{2^2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^{2 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$$

$$\left(\sqrt[6]{7^2}\right)^3 = \sqrt[6]{7^{2 \cdot 3}} = \sqrt[6]{7^6} = 7$$

Entrénate

4 Efectúa.

a) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ b) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10}$ c) $\left(\sqrt{7}\right)^3$

d) $\left(\sqrt[6]{2^3}\right)^2$ e) $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^2$ f) $\left(\sqrt[4]{2^2}\right)^3$

Entrénate

1 Escribe con solo una raíz.

a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{7}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$

Entrénate

2 Suma si es posible.

a) $\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{7} + \sqrt{7}$

c) $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$ d) $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

Entrénate

3 Elimina el radical del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Raíz de un radical

Por ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{11}} = \sqrt[6]{11}$$

Suma y resta de radicales

Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Solo pueden sumarse radicales idénticos. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \sqrt{7} - \sqrt[3]{7}\end{array}\right\} \text{Solo pueden realizarse de forma aproximada, o bien hay que dejarlas indicadas.}$$

Sí puede simplificarse la expresión siguiente:

$$7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - \sqrt{5} = 17\sqrt{5}$$

Hay casos en los que la posibilidad de simplificar una suma de radicales queda oculta. Previamente, deberemos sacar los factores que podamos fuera de las raíces, o simplificarlas. Por ejemplo:

$$\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{2^5} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} =$$

$$= 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Eliminación de un radical del denominador

Es costumbre en los resultados matemáticos en los que intervienen radicales evitar que estos estén en el denominador. Veamos unos casos en los que esto se consigue de forma sencilla:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Observa que se multiplica el denominador por el radical necesario para que desaparezca la raíz:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \ ; \ \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7$$

Lógicamente, el numerador se multiplica por la misma expresión.

Actividades

1 Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

2 Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt{x^3}$ b) $\sqrt[3]{a^5}$ c) $\sqrt{b^5}$

d) $\sqrt[3]{32x^4}$ e) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ f) $\sqrt[5]{64}$

3 Multiplica y simplifica.

a) $\sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{a^2}\ \sqrt[3]{a^4}$

c) $\sqrt[6]{x}\ \sqrt[6]{x^2}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}\ \sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}$

4 Extrae factores y suma si es posible.

a) $\sqrt{12} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{18} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$ d) $2\sqrt{6} - \sqrt{8}$

7 Números aproximados. Notación científica

Aproximaciones y errores

En las aplicaciones prácticas se suelen manejar números aproximados. Recordemos algunos conceptos y procedimientos con los que se controla su uso.

Se llaman **cifras significativas** las que se usan para expresar un número aproximado. Solo se deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste y de modo que sean relevantes para lo que se desea transmitir.

Por ejemplo, si al medir la capacidad de una piscina se obtiene 718 900 *l*, sería más razonable decir que tiene 719 m^3, utilizando solo 3 cifras significativas. Pero si la medición no fue muy fina, lo propio sería decir 720 m^3 o, mejor, 72 decenas de m^3.

Error absoluto de una medida aproximada es la diferencia entre el valor real y el valor aproximado.

$$\text{Error absoluto} = |\text{Valor real} - \text{Valor aproximado}|$$

El valor exacto, generalmente, es desconocido. Por tanto, también se desconoce el error absoluto. Lo importante es poder acotarlo: **el error absoluto es menor que…** Una cota del error absoluto se obtiene a partir de la última cifra significativa utilizada.

En el ejemplo anterior (capacidad de la piscina: 719 m^3), la última cifra significativa (el 9) designa unidades de m^3. El error absoluto *es menor que medio metro cúbico* (error < 0,5 m^3).

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real. Es tanto menor cuantas más cifras significativas se usan.

En el ejemplo, el error relativo es menor que $\frac{0,5}{719} < 0,0007$.

Notación científica

Los números $3,845 \cdot 10^{15}$ y $9,8 \cdot 10^{-11}$ están en notación científica porque:

— Están descritos mediante dos factores, un número decimal y una potencia de 10.

— El número decimal es mayor o igual que 1 y menor que 10.

— La potencia de 10 es de exponente entero.

El primero, $3,845 \cdot 10^{15} = 3\,845\,000\,000\,000\,000$, es un número "grande".

El segundo, $9,8 \cdot 10^{-11} = 0,000000000098$, es un número "pequeño".

El exponente sirve para interpretar cómo de grande o de pequeño es el número, pues nos da la cantidad total de cifras que tiene.

Observa

a) 34 m tiene 2 cifras significativas.

b) 0,0863 hm^3 tiene 3 cifras significativas.

c) 53 000 g tiene 2 cifras significativas, pues los ceros del final solo sirven para designar el número. Mejor sería que se pusiera 53 miles de gramos, o bien, 53 kg.

Observa

a) $\begin{cases} \text{Medición: } 34 \text{ m} \\ \text{Error absoluto} < 0,5 \text{ m} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Medición: } 0,0863 \text{ hm}^3 \\ \text{Error abs.} < 0,00005 \text{ hm}^3 \\ \text{Es decir, error abs.} < 50 \text{ m}^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{Medición: } 53\,000 \text{ g} \\ \text{Error absoluto} < 500 \text{ g} \end{cases}$

Observa

Los errores relativos de las mediciones anteriores son:

a) E.r. < 0,5/34 < 0,015

b) E.r. < 0,00005/0,0863 < 0,0006

c) E.r. < 500/53 000 < 0,0095 < 0,01

Cálculo mental

Expresa en notación científica los siguientes números:

a) 340 000

b) 0,00000319

c) $25 \cdot 10^6$

d) $0,04 \cdot 10^9$

e) $480 \cdot 10^{-8}$

f) $0,05 \cdot 10^{-8}$

Ejercicios resueltos

1. Expresar con un número razonable de cifras significativas las siguientes cantidades:

a) Visitantes en un año a una pinacoteca: 183 594.

b) Asistentes a una manifestación: 234 590.

c) Número de bacterias en 1 dm^3 de cierto preparado: 302 593 847.

1. a) Puede ser razonable que esta cantidad se dé con tanta precisión, pues los asistentes a un museo pagan una entrada que, lógicamente, se contabiliza. Suponemos que ese número, 183 594, es el de entradas vendidas.

No obstante, para cierto tipo de comunicaciones podría simplificarse la cifra: "casi doscientos mil", "más de ciento ochenta mil" son valoraciones adecuadas.

b) Es imposible que nadie haya contado los manifestantes con tanta precisión. Aunque la cifra no esté "hinchada" o "achicada" por razones sectarias, no se puede afinar tanto en estas valoraciones. Razonable sería decir, por ejemplo, "más de doscientos mil", o bien "entre 200 000 y 250 000".

c) Una o, como mucho, dos cifras significativas: 3 cientos de millones de bacterias (o 30 decenas de millones).

2. Dar una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometido en cada una de las valoraciones que se han dado en las cantidades del ejercicio anterior.

2. a) Si decimos que el número de visitantes es 180 mil (o mejor, 18 decenas de miles) cometemos un error absoluto de 183 594 – 180 000 = 3 594 personas. Lo sabemos con precisión porque conocemos la cantidad exacta. Sin embargo, quien reciba la información (18 decenas de miles) deberá entender que puede haber un error de hasta 5 unidades de la primera cifra no utilizada: 5 000 personas. Es decir:

180 mil personas, con un error menor que 5 000

Error relativo $< 5\,000/180\,000 < 0{,}028 < 0{,}03 \to$ E.r. $< 0{,}03$

b) Valoración: 200 000 $\to$ Error absoluto $< 50\,000$

Error relativo $< 50\,000/200\,000 = 0{,}25$

c) Valoración: 3 cientos de millones = 300 millones

Error absoluto $< 0{,}5$ decenas de millones = 5 millones

Error relativo $< 5/300 < 0{,}017 < 0{,}02 \to$ E.r. $< 0{,}02$

3. Efectuar y repasar con la calculadora:

a) $(6{,}4 \cdot 10^5) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-6})$

b) $(2{,}52 \cdot 10^4) : (4 \cdot 10^{-6})$

3. a) $(6{,}4 \cdot 10^5) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-6}) = 33{,}28 \cdot 10^{5-6} = 3{,}328 \cdot 10 \cdot 10^{-1} = 3{,}328$

b) $(2{,}52 \cdot 10^4) : (4 \cdot 10^{-6}) = 0{,}63 \cdot 10^{4-(-6)} = 6{,}3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 6{,}3 \cdot 10^9$

Actividades

1 Escribe estos números en notación científica:

a) 13 800 000 b) 0,000005

c) 4 800 000 000 d) 0,0000173

2 Calcula mentalmente y comprueba con la calculadora.

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{12})$ b) $(1{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$ d) $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^7)$ f) $(4{,}4 \cdot 10^8) : (2 \cdot 10^{-5})$

g) $(5 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{-9})$

3 ¿Cuál de las siguientes medidas es más precisa (tiene menos error relativo)? Di, en cada una, de qué orden es el error absoluto cometido:

a) Altura de Claudia: 1,75 m.

b) Precio de un televisor: 1 175 €.

c) Tiempo de un anuncio: 95 segundos.

d) Oyentes de un programa de radio: 2 millones.

4 Di una cota del error absoluto en cada una de estas medidas: 53 s; 18,3 s; 184 s; 8,43 s. ¿En cuál de ellas es mayor el error relativo?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Números reales

1 ▼▽▽ a) Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

$$\frac{41}{13};\ \sqrt{49};\ 53{,}\widehat{7};\ 3{,}2;\ \sqrt{12};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{\pi}{2}$$

b) ¿Alguno de ellos es entero?

c) Ordénalos de menor a mayor.

2 ▼▽▽ Di cuáles de los siguientes números son irracionales:

$$\frac{-3}{4};\ 1{,}7\widehat{3};\ \sqrt{3};\ \pi;\ \sqrt{9};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 3{,}7$$

3 ▼▽▽ Indica cuáles de los siguientes números pueden expresarse como cociente de dos números enteros y cuáles no:

$$21{,}5;\ \sqrt{7};\ 2{,}010010001\ldots;$$
$$\sqrt[3]{-8};\ 2+\sqrt{3};\ 0{,}\widehat{5};\ 2\pi-1$$

4 ▼▽▽ Clasifica estos números en naturales, enteros, racionales y reales:

3	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$	$7{,}23$
-2	$\pi + 1$	0	-4
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{-1}$	$\frac{11}{9}$	$\sqrt{5}$
2	$2{,}48$	18	$1+\sqrt{2}$
-1	$\sqrt[5]{-2}$	1	$1{,}010203\ldots$

Intervalos y semirrectas

5 ▼▼▽ Describe cuáles son los números que pertenecen a los intervalos siguientes:

$A = (-2, 3)$ $B = [5, 10]$ $C = [0, 7)$

$D = (-1, 4]$ $E = (-\infty, 2)$ $F = [3, +\infty)$

6 ▼▽▽ Considera los números siguientes:

$$1;\ 2;\ 2{,}3;\ 3;\ 3{,}9;\ 4;\ 4{,}1$$

a) Indica cuáles de ellos pertenecen al intervalo $[2, 4)$.

b) ¿Y cuáles pertenecen al intervalo $[2, 4]$?

c) ¿Y cuáles al $(2, +\infty)$?

7 ▼▽▽ Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen estas condiciones, en cada caso:

a) $0 < x < 1$ b) $x \le -3$ c) $x > 0$

d) $-5 \le x \le 5$ e) $x > -5$ f) $1 \le x < 3$

8 ▼▼▽ Escribe en forma de desigualdad y representa los siguientes intervalos:

a) $(1;\ 2{,}5)$ b) $[-2, 3]$ c) $[-7, 0)$

d) $[-3, +\infty)$ e) $(2, +\infty)$ f) $(-5, 2]$

9 ▼▽▽ Expresa como intervalos y mediante desigualdades cada uno de los conjuntos de números representados:

a) 

b) 

c) 

d) 

10 ▼▽▽ Escribe en forma de intervalo y representa los números que cumplen las condiciones dadas en cada caso:

a) Menores o iguales que 3.

b) Comprendidos entre –1 y 0, incluyendo el 0, pero no el –1.

c) Mayores que 2, pero menores que 3.

d) Mayores que 5.

Potencias y raíces

11 ▼▽▽ Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[5]{a^2}$ c) $\sqrt[8]{a^5}$ d) $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt{a^{-1}}$ f) $\sqrt[4]{a^2}$ g) $\sqrt{a}$ h) $\sqrt{2}$

12 ▼▽▽ Expresa en forma de raíz.

a) $3^{2/5}$ b) $2^{3/4}$ c) $a^{1/3}$ d) $a^{1/2}$

e) $x^{1/4}$ f) $a^{3/2}$ g) $x^{-1/2}$ h) $x^{-3/2}$

13 ▼▽▽ Calcula.

a) $25^{1/2}$ b) $27^{1/3}$ c) $125^{2/3}$ d) $81^{3/4}$

e) $9^{5/2}$ f) $16^{5/4}$ g) $49^{3/2}$ h) $8^{5/3}$

14 ▼▽▽ Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[5]{243}$ c) $\sqrt[7]{0}$

d) $\sqrt[4]{1}$ e) $\sqrt[3]{-1}$ f) $\sqrt[5]{-1}$

g) $\sqrt[3]{-27}$ h) $\sqrt{144}$ i) $\sqrt[6]{15\,625}$

15 ▼▼▽ Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[k]{243} = 3$ b) $\sqrt[3]{k} = -2$ c) $\sqrt[4]{k} = \frac{3}{2}$

d) $\sqrt[k]{-125} = -5$ e) $\sqrt[3]{k} = -1$ f) $\sqrt[k]{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$

16 ▼▽▽ Obtén con la calculadora.

a) $\sqrt[5]{9}$ b) $\sqrt[3]{-173}$ c) $\sqrt[4]{14^3}$

d) $\sqrt[4]{75{,}3}$ e) $\sqrt[6]{603}$ f) $\sqrt[3]{0{,}06^2}$

17 ▼▽▽ Halla con la calculadora.

a) $28^{3/4}$ b) $8^{1/2}$ c) $0{,}02^{2/3}$

d) $0{,}8^{3/5}$ e) $125^{5/2}$ f) $3{,}5^{1/5}$

Radicales

18 ▼▽▽ Simplifica.

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ e) $\sqrt[6]{125}$ f) $\sqrt[5]{3^{15}}$

19 ▼▼▽ Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[10]{a^8}$ b) $\sqrt[4]{a^{12}}$ c) $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^2}$ e) $\sqrt[3]{a^6b^6}$ f) $\sqrt[6]{a^2b^4}$

20 ▼▽▽ Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}$

21 ▼▼▽ Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt{300}$

22 ▼▽▽ Reduce a un solo radical.

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ e) $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

23 ▼▼▽ Calcula y simplifica en cada caso:

a) $(\sqrt{2})^{10}$ b) $(\sqrt[3]{2})^4$ c) $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ f) $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^6$

24 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

Expresa como un solo radical:

$$\sqrt{63} - 5\sqrt{28} + \sqrt{112}$$

Descomponemos en factores cada radicando:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{63} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} \\ \sqrt{28} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} \\ \sqrt{112} = \sqrt{2^4 \cdot 7} = 4\sqrt{7} \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} 3\sqrt{7} - 5 \cdot 2\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = \\ = 3\sqrt{7} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = \\ = -3\sqrt{7} \end{array}$$

25 ▼▼▽ Expresa como un solo radical.

a) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$ b) $5\sqrt{48} + \sqrt{12}$

c) $3\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$ d) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

26 ▼▼▽ Efectúa.

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$ d) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

27 ▼▽▽ Suprime el radical del denominador.

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{12}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{15}}$

28 ▼▼▽ Suprime el radical del denominador.

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ d) $\frac{5}{\sqrt[4]{2}}$

Números aproximados. Notación científica

29 ▼▼▽ Expresa con un número razonable de cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo de la aproximación que des.

a) Oyentes de un programa de radio: 843 754

b) Precio de un coche: 28 782 €

c) Tiempo que tarda la luz en recorrer una distancia: 0,0375 segundos.

d) Gastos de un ayuntamiento: 48 759 450 €

30 ▼▽▽ Escribe en notación científica.

a) 752 000 000 b) 0,0000512

c) 0,000007 d) 15 000 000 000

31 ▼▽▽ Expresa en notación científica.

a) $32 \cdot 10^5$ b) $75 \cdot 10^{-4}$ c) $843 \cdot 10^7$

d) $458 \cdot 10^{-7}$ e) $0{,}03 \cdot 10^6$ f) $0{,}0025 \cdot 10^{-5}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

32 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $(1{,}5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$ b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{11})$

c) $(4 \cdot 10^{-7}) : (2 \cdot 10^{-12})$ d) $\sqrt{4 \cdot 10^8}$

33 ▼▽▽ Calcula con lápiz y papel, expresa el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.

a) $(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ b) $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^5)$

c) $(1{,}2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$

Aplica lo aprendido

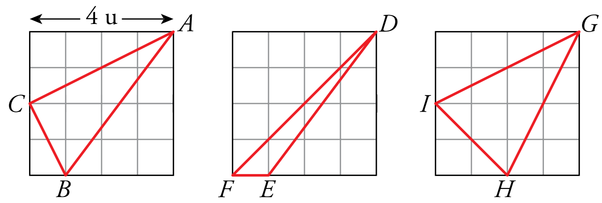
34 ▼▽▽ Halla el área total y el volumen de un cilindro de 5 cm de radio y 12 cm de altura. Da su valor exacto en función de π.

35 ▼▽▽ En un círculo cuya circunferencia mide 30π m, cortamos un sector circular de 120° de amplitud. Halla el área de ese sector dando su valor exacto en función de π.

36 ▼▽▽ Calcula el área total y el volumen de un cono de 5 cm de radio y 10 cm de generatriz.

Da el valor exacto.

37 ▼▼▽ Calcula el perímetro de los triángulos *ABC*, *DEF* y *GHI*. Expresa el resultado con radicales.



38 ▼▼▽ Halla el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden el doble de la base cuya longitud es $\sqrt{3}$ cm. Expresa el resultado con radicales.

Autoevaluación

¿Sabes clasificar los números en los distintos conjuntos numéricos?

1 Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales y reales:

$$7{,}53; \ \sqrt{64}; \ \frac{\sqrt{7}}{2}; \ -5; \ \frac{\pi}{4}; \ 3{,}2\widehat{3}; \ \frac{7}{11}$$

¿Conoces y utilizas las distintas notaciones para un intervalo?

2 a) Escribe como intervalo y representa $-3 < x \le 5$.

b) Escribe como desigualdad y representa $(-\infty, 8]$.

c) Escribe en forma de intervalo y representa "los números mayores que –1".

d) Expresa como una desigualdad el conjunto de números representado:

¿Sabes identificar una raíz con una potencia y manejar las operaciones con radicales?

3 Halla el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 7$ b) $\sqrt[k]{-125} = -5$ c) $\sqrt{625} = k$

4 Simplifica y, si es posible, extrae factores:

a) $\sqrt[3]{2^{15}}$ b) $\sqrt[8]{6^{10}}$

c) $\sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{18}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

5 Opera:

a) $4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{75}$

6 Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{7}}$

2 Polinomios y fracciones algebraicas

El lenguaje algebraico actual es sencillo, cómodo y operativo. En el largo camino para llegar a él, cabe considerar tres grandes etapas.

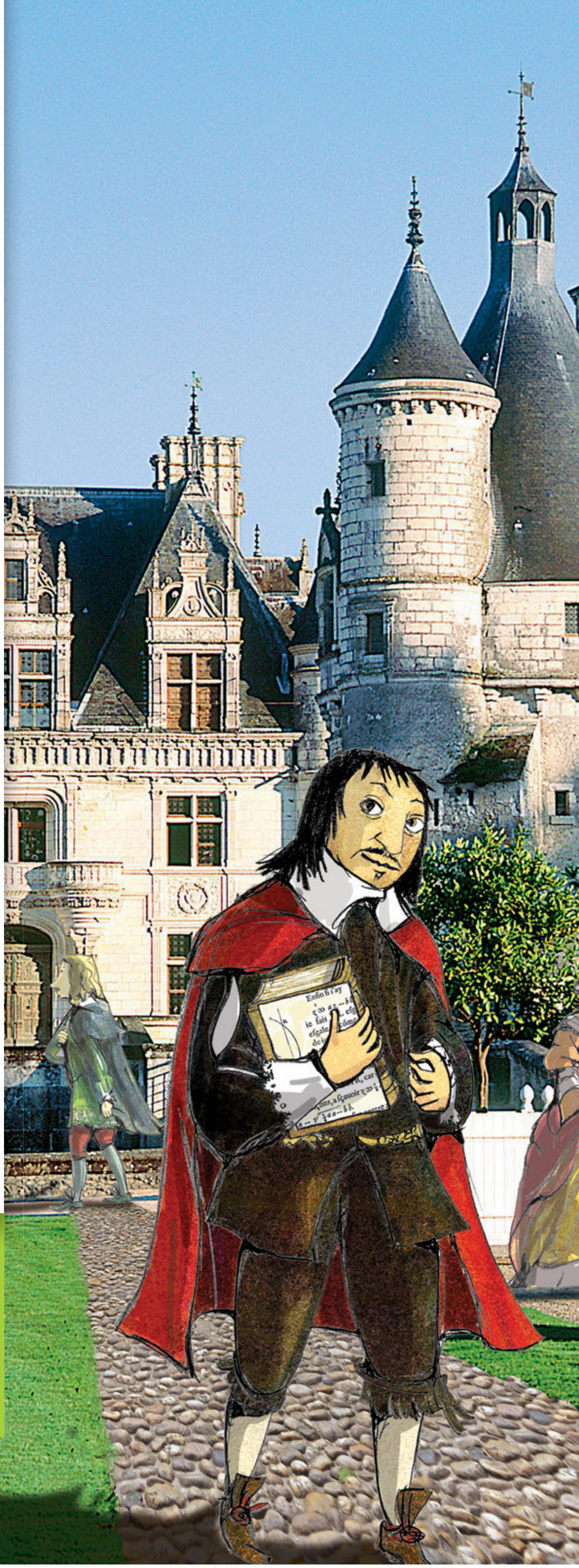
Álgebra primitiva o retórica. En ella, todo se describe con lenguaje ordinario. Babilonios, egipcios y griegos antiguos la practicaban; y también los árabes, quienes, entrado ya el siglo IX, retornaron a ella.

Álgebra sincopada. **Diofanto** (s. III) fue el pionero, utilizando una serie de abreviaturas que aliviaban los procesos. Por ejemplo, $7x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ lo escribía ss7 c2 x5 M s4 u6 (s significa cuadrado; c, cubo; x, incógnita; M, menos; u, número).

Durante el Renacimiento (ss. XV y XVI), el álgebra sincopada mejoró debido a la incorporación de nuevos símbolos: operaciones, coeficientes, potencias…

Álgebra simbólica. Consiste en una simbolización completa. **Vieta**, a finales del XVI, mejoró lo que ya había, de modo que su lenguaje algebraico fue predecesor del actual. Y **Descartes,** en el siglo XVII, lo acabó de perfeccionar. Actualmente, escribimos el álgebra tal como lo hacía él, a excepción del signo =, que él lo ponía así: ∞ (parece que este signo proviene de una deformación de æ, iniciales de *aequalis*, igual).

La falta de operatividad del álgebra durante muchos siglos obligó a los matemáticos a agudizar su ingenio para obtener y demostrar relaciones algebraicas. Algunos se valieron, para ello, de figuras geométricas, dando lugar al *álgebra geométrica*.



DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se operan los polinomios (suma, resta y multiplicación).
- Cómo sacar factor común.
- Las identidades notables.

1 Operaciones con polinomios

Definición

Se llama **opuesto** de un polinomio al que resulta de cambiar de signo todos sus términos:

$$-(x^3 + 2x^2 - 5x - 11) =$$
$$= -x^3 - 2x^2 + 5x + 11$$

Suma y resta de polinomios

Para sumar dos polinomios, agrupamos sus términos y simplificamos los monomios semejantes. Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Por ejemplo: $A = 3x^2 + 5x - 2, \ B = x^3 + 4x^2 - 5$

$$\boxed{\begin{array}{r} A \\ +\,B \\ \hline A + B \end{array}} \rightarrow \begin{array}{rrrr} & 3x^2 & +\,5x & -\,2 \\ x^3 & +\,4x^2 & & -\,5 \\ \hline x^3 & +\,7x^2 & +\,5x & -\,7 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{r} A \\ -\,B \\ \hline A - B \end{array}} \rightarrow \begin{array}{rrrr} & 3x^2 & +\,5x & -\,2 \\ -x^3 & -\,4x^2 & & +\,5 \\ \hline -x^3 & -\,x^2 & +\,5x & +\,3 \end{array}$$

A veces, escribimos directamente el resultado, quitando paréntesis (si los hay) y agrupando los monomios semejantes. Por ejemplo:

- $(x^2 + 3x + 2) + (2x^2 - 5) = x^2 + 3x + 2 + 2x^2 - 5 = 3x^2 + 3x - 3$
- $(3x + 1) - (2x - 3) = 3x + 1 - 2x + 3 = x + 4$

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Por ejemplo: $M = x^3 - 2x^2 + 5x - 1, \ N = 3x^2$

$$\boxed{\begin{array}{r} M \\ \times\,N \\ \hline M \cdot N \end{array}} \rightarrow \begin{array}{rrrr} x^3 & -\,2x^2 & +\,5x & -\,1 \\ & & & 3x^2 \\ \hline 3x^5 & -\,6x^4 & +\,15x^3 & -\,3x^2 \end{array}$$

También, en este caso, podemos escribir directamente el resultado. Por ejemplo:

- $(2x^2 - 3) \cdot (2x) = 4x^3 - 6x$
- $7(2x + 5) = 14x + 35$
- $(5x^2)(6x^2 - 4x + 3) = 30x^4 - 20x^3 + 15x^2$

Actividades

1 Sean $P = x^4 - 3x^3 + 5x + 3, \ Q = 5x^3 + 3x^2 - 11$. Halla $P + Q$ y $P - Q$.

2 Efectúa.

a) $2x(3x^2 - 4x)$

b) $5(x^3 - 3x)$

c) $4x^2(-2x + 3)$

d) $-2x(x^2 - x + 1)$

e) $-6(x^3 - 4x + 2)$

f) $-x(x^4 - 2x^2 + 3)$

3 Halla los productos siguientes:

a) $x(2x + y + 1)$

b) $2a^2(3a^2 + 5a^3)$

c) $ab(a + b)$

d) $5(3x^2 + 7x + 11)$

e) $x^2y(x + y + 1)$

f) $5xy^2(2x + 3y)$

g) $6x^2y^2(x^2 - x + 1)$

h) $-2(5x^3 + 3x^2 - 8)$

i) $3a^2b^3(a - b + 1)$

j) $-2x(3x^2 - 5x + 8)$

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos.

Por ejemplo: $P = 2x^3 - 4x^2 - 1,\ \ Q = 3x - 2$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & 2x^3 & -\,4x^2 & & -\,1 & \longleftarrow\ P \\
 & & & 3x & -\,2 & \longleftarrow\ Q \\
\hline
 & -4x^3 & +\,8x^2 & & +\,2 & \longleftarrow\ \text{producto de } -2 \text{ por } P \\
6x^4 & -\,12x^3 & & -\,3x & & \longleftarrow\ \text{producto de } 3x \text{ por } P \\
\hline
6x^4 & -\,16x^3 & +\,8x^2 & -\,3x & +\,2 & \longleftarrow\ P \cdot Q
\end{array}
$$

Ten en cuenta

Esta forma de disponer los cálculos permite multiplicar polinomios de manera ordenada y segura. Cuando falta algún término, hay que dejar un hueco en el lugar correspondiente.

A veces, cuando hay pocos términos, realizamos el producto escribiéndolo directamente. Por ejemplo:

$$(2x^2 - 1)\,(3x + 4) = 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4$$

División de polinomios

Nomenclatura

Si un polinomio P depende de la variable x, se le suele designar $P(x)$.

La división de polinomios es similar a la división entera de números naturales. Veamos cómo se procede en la práctica dividiendo dos polinomios concretos:

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 \qquad Q(x) = 2x + 3 \qquad P(x) : Q(x)$

$$
\begin{array}{lrrrr|l}
 & 2x^3 & -\,7x^2 & -\,11x & +\,13 & 2x + 3 \\
\cline{6-6}
\text{Restamos } x^2(2x+3) \longrightarrow & -\,2x^3 & -\,3x^2 & & & x^2 - 5x + 2 \\
\cline{2-3}
 & & -\,10x^2 & -\,11x & +\,13 & \\
\text{Restamos } -5x(2x+3) \longrightarrow & & 10x^2 & +\,15x & & (2x^3) : (2x) = x^2 \\
\cline{3-5}
 & & & 4x & +\,13 & (-10x^2) : (2x) = -5x \\
\text{Restamos } 2(2x+3) \longrightarrow & & & -\,4x & -\,6 & (4x) : (2x) = 2 \\
\cline{4-5}
 & & & & 7 &
\end{array}
$$

DIVIDENDO = DIVISOR · COCIENTE + RESTO

Por tanto: $2x^3 - 7x^2 - 11x + 13 = (2x + 3) \cdot (x^2 - 5x + 2) + 7$

Actividades

4 Dados los polinomios $P = 3x^2 - 5$, $Q = x^2 - 3x + 2$, $R = -2x + 5$, calcula:

a) $P \cdot R$ b) $Q \cdot R$ c) $P \cdot Q$

5 Opera y simplifica:

a) $2x(3x^2 - 2) + 5(3x - 4)$

b) $(x^2 - 3)(x + 1) - x(2x^2 + 5x)$

c) $(3x - 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 4x)$

6 Efectúa $P(x) : Q(x)$ en cada caso y expresa el resultado así:

$P(x) = Q(x) \cdot$ COCIENTE + RESTO

a) $P(x) = 3x^2 - 11x + 5 \qquad Q(x) = x + 6$

b) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 \qquad Q(x) = 3x + 1$

c) $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 18x + 3 \qquad Q(x) = x$

d) $P(x) = 5x^2 + 11x - 4 \qquad Q(x) = 5x - 2$

División de un polinomio por $x - a$. Regla de Ruffini

Paolo Ruffini

Paolo Ruffini fue un matemático italiano que vivió entre los siglos XVIII y XIX. Se le dio su nombre a esta regla porque la utilizó en la demostración de una importante propiedad matemática. Pero dicha regla ya aparecía en un libro de álgebra de Pietro Paoli publicado 25 años antes.

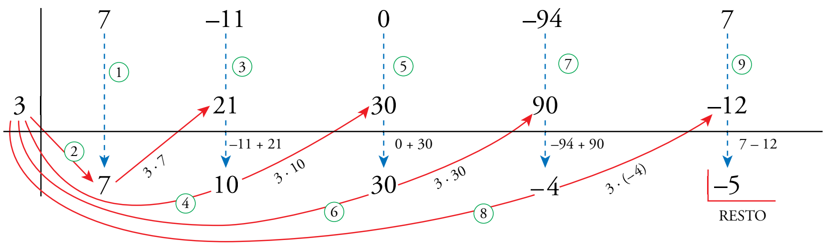
Es muy frecuente tener que dividir un polinomio por una expresión del tipo $x - a$. El procedimiento que exponemos a continuación permite realizar esas divisiones de forma rápida y cómoda. Veámoslo por medio de un ejemplo:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
7x^4 & -11x^3 & & -94x & +7 & x-3 \\
\cline{6-6}
-7x^4 & +21x^3 & & & & 7x^3+10x^2+30x-4 \\
\cline{1-2}
 & 10x^3 & & & & \\
 & -10x^3 & +30x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & & 30x^2 & & & \\
 & & -30x^2 & +90x & & \\
\cline{3-4}
 & & & -4x & & \\
 & & & +4x & -12 & \\
\cline{4-5}
 & & & & -5 &
\end{array}
$$

Esta misma división puede realizarse, sintéticamente, del siguiente modo:

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 7 & -11 & 0 & -94 & 7 \\
3 & & 21 & 30 & 90 & -12 \\
\hline
 & 7 & 10 & 30 & -4 & \boxed{-5}
\end{array}
$$

$\underbrace{7 \quad 10 \quad 30 \quad -4}_{\text{COEFICIENTES DEL COCIENTE}}$ RESTO



COCIENTE: 7 10 30 –4 significa: $7x^3 + 10x^2 + 30x - 4$

RESTO: –5

Los pasos, numerados en verde, son los mismos que se hacen en la división realizada arriba.

Este método, en el que solo intervienen los coeficientes y solo se realizan las operaciones que realmente importan, se llama regla de Ruffini.

La **regla de Ruffini** sirve para dividir un polinomio por $x - a$. Las operaciones (sumas y multiplicaciones por a) se realizan una a una. Se obtienen, así, los coeficientes del cociente y el resto de la división.

Actividades

7 Aplica la regla de Ruffini para efectuar las siguientes divisiones:

a) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$

b) $(6x^5 - 3x^4 + 2x) : (x + 1)$

c) $(7x^2 - 5x^3 + 3x^4 - 2x + 13) : (x - 4)$

d) $(4x^3 - 9 - 51x^2 + 6x^4 - 3x) : (x + 3)$

8 Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^2 + 3x + 2) : (x + 2)$

b) $(2x^3 + 3x + 1) : (x - 1)$

c) $(x^4 - 3x^3 + 2x + 8) : (x - 2)$

d) $(x^5 - 4x^3 + 3x^2) : (x - 1)$

2 Factorización de polinomios

Raíces de un polinomio

Un número a se llama **raíz** de un polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$. Las raíces de un polinomio son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Para localizar las raíces enteras de un polinomio, probaremos con los divisores (positivos y negativos) de su término independiente.

Una vez localizada una raíz, a, puesto que $P(x)$ es divisible por $x - a$, podremos ponerlo así: $P(x) = (x - a) \cdot P_1(x)$. Las restantes raíces las buscaremos en $P_1(x)$.

Cálculo mental

Di si 0, 1, –1, 2 o –2 son raíces de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 4x$

b) $x^4 - x^3 - 2x^2$

c) $x^3 + x^2 - 25x - 25$

d) $x^5 - 5x^3 + 4x$

Procedimiento para factorizar un polinomio

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.

Veamos, prácticamente, cómo factorizar $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$:

- Para localizar las raíces de $P(x)$, iremos probando con los divisores (positivos y negativos) de 2. Empecemos por 1 y por –1:

	4	–4	–9	1	2
1		4	0	–9	–8
	4	0	–9	–8	–6

1 no es raíz.

	4	–4	–9	1	2
–1		–4	8	1	–2
	4	–8	–1	2	0

–1 sí es raíz.

Escribimos $P(x)$ factorizado: $P(x) = (x + 1)(4x^3 - 8x^2 - x + 2)$

- Ahora buscamos las raíces de $P_1(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$:

1 ha quedado descartado. Probamos de nuevo con –1 y resulta que no lo es (es decir, –1 es una *raíz simple*). A continuación, probamos con 2:

	4	–8	–1	2
2		8	0	–2
	4	0	–1	0

2 sí es raíz de $P_1(x)$ [y, por tanto, de $P(x)$]

$P_1(x) = (x - 2)(4x^2 - 1)$

Igualdades notables

Las **igualdades notables,** así como la extracción de **factor común,** son procedimientos sencillos que ayudan en la factorización de polinomios.

- Cuando queda un polinomio cuyas raíces se pueden localizar por otros medios, al hacerlo se concluye el proceso. En nuestro caso, reconocemos que $4x^2 - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$. Por tanto, el resultado final es:

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(2x + 1)(2x - 1) = 4(x + 1)(x - 2)(x + 1/2)(x - 1/2)$$

Hay polinomios para cuya factorización no es necesario aplicar la regla de Ruffini. Por ejemplo, $Q(x) = x^4 - x^3 - 20x^2$.

- Empezamos por extraer x^2 como factor común: $Q(x) = x^2(x^2 - x - 20)$
- Ahora hallamos las raíces de $x^2 - x - 20$: $x_1 = 5$ y $x_2 = -4$.

Por tanto, $Q(x) = x^2(x - 5)(x + 4)$.

Notas

- Si llegamos a un polinomio de segundo grado sin raíces, dicho polinomio queda como un único factor (no se puede descomponer en dos).
- Si un polinomio tiene más de dos raíces no enteras, entonces, aunque pueda factorizarse, nosotros no sabremos hacerlo.

Ejercicios resueltos

1. Factorizar y decir cuáles son las raíces.

$\boldsymbol{P(x) = 12x^5 - 36x^4 + 27x^3}$

1. Todos los sumandos tienen el factor x^3. Los coeficientes 12, –36 y 27 son múltiplos de 3. Por tanto, podemos sacar $3x^3$ como factor común.

$$P(x) = 3x^3(4x^2 - 12x + 9)$$

Observamos que $4x^2 - 12x + 9$ es igual a $(2x - 3)^2$.

$$P(x) = 3x^3(2x - 3)^2$$

Obtenemos las raíces igualando a 0 cada factor.

Las raíces de $P(x)$ son 0 (raíz triple) y 3/2 (raíz doble).

2. Factorizar.

$\boldsymbol{Q(x) = 4x^2 - 8x + 3}$

2. Buscamos las raíces igualando a 0 y resolviendo la ecuación:

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2};\ x = \frac{3}{2}$$

Por tanto: $Q(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$, o bien:

$$Q(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)2\left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x - 1)(2x - 3)$$

3. Factorizar.

$\boldsymbol{R(x) = x^3 - x + 6}$

3. Utilizamos la regla de Ruffini para localizar una raíz entre los divisores de 6:

	1	0	–1	6
–2		–2	4	–6
	1	–2	3	0

–2 es una raíz de $R(x)$.

Buscamos raíces de $x^2 - 2x + 3$:

$x^2 - 2x + 3 = 0$ no tiene solución.

Hemos llegado a un polinomio de segundo grado que no tiene raíces.

Entonces: $R(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 3)$

Actividades

1 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $3x^2 + 2x - 8$

b) $3x^3 - 48x$

c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

d) $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

e) $x^3 - 2x^2 - 15x$

f) $2x^3 - x^2 - x + 2$

2 Expresa los polinomios siguientes como cuadrado de un binomio (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 + 12x + 36 = (x + \square)^2$ b) $49 + 14x + x^2$

c) $4x^2 - 20x + 25 = (\square - 5)^2$ d) $1 + 4x + 4x^2$

3 Expresa en cada caso como producto de dos binomios (hazlo en tu cuaderno):

a) $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$ b) $x^2 - 1$

c) $9 - x^2$ d) $4x^2 - 1$

4 Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 6x^2 + 9x$ b) $x^3 - x$

c) $4x^4 - 81x^2$ d) $x^3 + 2x^2 + x$

e) $3x^3 - 27x$ f) $3x^2 + 30x + 75$

5 Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^4 - 8x^3 + 16x^2$ b) $x^3 - 4x$

c) $9x^3 + 6x^2 + x$ d) $4x^2 - 25$

3 Fracciones algebraicas

Se llama **fracción algebraica** al cociente indicado de dos polinomios.

Por ejemplo: $\dfrac{x}{3x^2-5}$, $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{3x+1}{x^2+6x-3}$

Las fracciones algebraicas se comportan de forma muy similar a las fracciones numéricas, como veremos a continuación.

Simplificación

Para simplificar una fracción, se dividen el numerador y el denominador por uno o más factores comunes a ambos. Se obtiene así otra fracción equivalente.

Por ejemplo: $\dfrac{3x(x+1)^2}{6x^2(x+1)} = \dfrac{\cancel{3}\cancel{x}\cancel{(x+1)}(x+1)}{\cancel{3}\cdot 2\cdot \cancel{x}\cdot x\cdot \cancel{(x+1)}} = \dfrac{x+1}{2x}$

Reducción a común denominador

Para reducir varias fracciones a común denominador, se sustituye cada fracción por otra equivalente, de modo que todas tengan el mismo denominador. Este será múltiplo de todos los denominadores.

$$\frac{3}{x}, \quad \frac{5}{x-2}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\frac{3\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}, \quad \frac{5\cdot x}{(x-2)\cdot x}$$

Denominador común: $x\cdot(x-2)$

Observa que en cada fracción se han multiplicado numerador y denominador por el factor apropiado para obtener el denominador común que se desea.

Atención

Para sumar (o restar) fracciones algebraicas con el mismo denominador, se suman los numeradores y se mantiene el denominador común.

$$\frac{3}{x+1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x-2}{x+1} = $$
$$= \frac{3+x-(x-2)}{x+1} = \frac{5}{x+1}$$

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones algebraicas, se reducen a común denominador y se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador común.

Por ejemplo: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x-2} = \dfrac{3(x-2)}{x(x-2)}+\dfrac{5x}{x(x-2)} = \dfrac{3x-6+5x}{x(x-2)} = \dfrac{8x-6}{x^2-2x}$

Ejercicios resueltos

1. $\dfrac{3x+5}{2x+3}-\dfrac{x-7}{2x+3}$

2. $\dfrac{5x+4}{x}+\dfrac{x-2}{2x}$

3. $\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x+3}{x}$

4. $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}$

1. $\dfrac{3x+5}{2x+3}-\dfrac{x-7}{2x+3} = \dfrac{3x+5-(x-7)}{2x+3} = \dfrac{2x+12}{2x+3}$

2. $\dfrac{5x+4}{x}+\dfrac{x-2}{2x} = \dfrac{2(5x+4)}{2x}+\dfrac{x-2}{2x} = \dfrac{10x+8+x-2}{2x} = \dfrac{11x+6}{2x}$

3. $\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x(x+3)}{x\cdot x} = \dfrac{3+x^2+3x}{x^2} = \dfrac{x^2+3x+3}{x^2}$

4. $\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1} = \dfrac{(x+1)\cdot 3x}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{(x-1)\cdot 2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3x^2+3x-(2x-2)}{(x+1)(x-1)} =$

$= \dfrac{3x^2+x+2}{x^2-1}$

Producto

El producto de dos fracciones algebraicas es el producto de sus numeradores partido por el producto de sus denominadores.

Por ejemplo: $\dfrac{2x}{x-3} \cdot \dfrac{5x+1}{x^2} = \dfrac{2x \cdot (5x+1)}{(x-3) \cdot x^2} = \dfrac{10x^2+2x}{x^3-3x^2}$

Definición

Se llama **inversa** de una fracción algebraica a la que se obtiene intercambiando numerador y denominador:

La inversa de $\dfrac{5}{x+2}$ es $\dfrac{x+2}{5}$.

Cociente

El cociente de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por la inversa de la segunda (producto cruzado de términos).

Por ejemplo: $\dfrac{3}{x} : \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{3(x+2)}{5x} = \dfrac{3x+6}{5x}$

Ejercicios resueltos

1. $\dfrac{2x-7}{x} \cdot \dfrac{3}{x+1}$

2. $\dfrac{5}{x-3} : \dfrac{x}{x^2+1}$

3. $\dfrac{3}{x} \cdot \left(\dfrac{5x+3}{x-1} : \dfrac{5x+3}{x}\right)$

1. $\dfrac{2x-7}{x} \cdot \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{3(2x-7)}{x(x+1)} = \dfrac{6x-21}{x^2+x}$

2. $\dfrac{5}{x-3} : \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{5}{x-3} \cdot \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{5(x^2+1)}{(x-3)x} = \dfrac{5x^2+5}{x^2-3x}$

3. $\dfrac{3}{x} \cdot \left(\dfrac{5x+3}{x-1} : \dfrac{5x+3}{x}\right) = \dfrac{3}{\cancel{x}} \cdot \dfrac{\cancel{5x+3}}{x-1} \cdot \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{5x+3}} = \dfrac{3}{x-1}$

Actividades

1 Simplifica las fracciones siguientes. Para ello, saca factor común cuando convenga:

a) $\dfrac{15x^2}{5x^2(x-3)}$

b) $\dfrac{3(x-1)^2}{9(x-1)}$

c) $\dfrac{3x^2-9x^3}{15x^3-3x^4}$

d) $\dfrac{9(x+1)-3(x+1)}{2(x+1)}$

e) $\dfrac{5x^2(x-3)^2(x+3)}{15x(x-3)}$

f) $\dfrac{x(3x^3-x^2)}{(3x-1)x^3}$

2 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{x-2}{x}$

b) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2x^2+8x}{x^2+x} - 4x$

c) $\dfrac{2}{x^2-9} - \dfrac{7x}{x-3} + 3$

d) $\dfrac{5x^3+15x^2}{x+3} - \dfrac{10x^3+15x^2}{5x^2} + 2x$

3 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica. Ten en cuenta las identidades notables:

a) $\dfrac{x^2-1}{x} : (x-1)$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x} : \dfrac{x^2-4}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x} : \dfrac{x-1}{x}$

d) $6x^2 \cdot \dfrac{x-3}{x^3}$

e) $\dfrac{3x-3}{x^2} \cdot \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$

f) $\dfrac{2x}{x-1} : \dfrac{4x^2}{2x-2}$

g) $\dfrac{x+5}{10} \cdot \dfrac{5}{(x+5)^2}$

h) $\dfrac{2x^2}{3x} \cdot \dfrac{6x}{4x^3}$

i) $\dfrac{4x-3}{2x} \cdot \dfrac{4x^2}{8x-6}$

j) $\dfrac{3x-3}{x^2} \cdot \dfrac{3x}{18(x-1)}$

4 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{6x^2}{4x^2-9} : \left(\dfrac{5x}{2x-3} + \dfrac{5x}{2x+3}\right)$

b) $\dfrac{x^2}{5x^2-25} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)(5x^2-25)}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Operaciones con polinomios

1 ▼▽▽ Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $3x(2x-1)-(x-3)(x+3)+(x-2)^2$

b) $(2x-1)^2+(x-1)(3-x)-3(x+5)^2$

c) $\frac{4}{3}(x-3)^2-\frac{1}{3}(3x-1)(3x+1)-\frac{1}{3}(4x^3+35)$

2 ▼▽▽ Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(2y+x)(2y-x)+(x+y)^2-x(y+3)$

b) $3x(x+y)-(x-y)^2+(3x+y)y$

c) $(2y+x+1)(x-2y)-(x+2y)(x-2y)$

3 ▼▽▽ Halla el cociente y el resto de cada una de estas divisiones:

a) $(7x^2-5x+3):(x^2-2x+1)$

b) $(2x^3-7x^2+5x-3):(x^2-2x)$

c) $(x^3-5x^2+2x+4):(x^2-x+1)$

4 ▼▼▽ Calcula el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

a) $(3x^5-2x^3+4x-1):(x^3-2x+1)$

b) $(x^4-5x^3+3x-2):(x^2+1)$

c) $(4x^5+3x^3-2x):(x^2-x+1)$

Factor común e identidades notables

5 ▼▽▽ Expresa como cuadrado de un binomio.

a) $16x^2+1-8x$ b) $36x^2+25y^2+60xy$

c) $9x^4+y^2+6x^2y$ d) y^4-2y^2+1

6 ▼▽▽ Expresa como producto de dos binomios.

a) $49x^2-16$ b) $9x^4-y^2$ c) $81x^4-64x^2$

d) $25x^2-3$ e) $2x^2-100$ f) $5x^2-2$

7 ▼▽▽ Saca factor común e identifica los productos notables como en el ejemplo.

• $\mathbf{2x^4+12x^3+18x^2=2x^2(x^2+6x+9)=2x^2(x+3)^2}$

a) $20x^3-60x^2+45x$ b) $27x^3-3xy^2$

c) $3x^3+6x^2y+3y^2x$ d) $4x^4-81x^2y^2$

Regla de Ruffini. Aplicaciones

8 ▼▽▽ Aplica la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(5x^3-3x^2+x-2):(x-2)$

b) $(x^4-5x^3+7x+3):(x+1)$

c) $(-x^3+4x):(x-3)$

d) $(x^4-3x^3+5):(x+2)$

9 ▼▽▽ Comprueba si los polinomios siguientes son divisibles por $x-3$ o $x+1$.

a) $P_1(x)=x^3-3x^2+x-3$

b) $P_2(x)=x^3+4x^2-11x-30$

c) $P_3(x)=x^4-7x^3+5x^2-13$

☞ *Recuerda, para que sea divisible, el resto debe ser 0.*

Factorización de polinomios

10 ▼▽▽ Factoriza los siguientes polinomios:

a) x^2+4x-5 b) $x^2+8x+15$

c) $7x^2-21x-280$ d) $3x^2+9x-210$

11 ▼▽▽ Busca, en cada caso, una raíz entera y factoriza, después, el polinomio:

a) $2x^2-9x-5$ b) $3x^2-2x-5$

c) $4x^2+17x+15$ d) $-x^2+17x-72$

12 ▼▽▽ Saca factor común y utiliza las identidades notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $3x^3-12x$ b) $4x^3-24x^2+36x$

c) $45x^2-5x^4$ d) $x^4+x^2+2x^3$

e) x^6-16x^2 f) $16x^4-9$

13 ▼▽▽ Descompón en factores y di cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:

a) x^3+2x^2-x-2 b) $3x^3-15x^2+12x$

c) $x^3-9x^2+15x-7$ d) x^4-13x^2+36

14 ▼▼▽ Factoriza los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) x^3-2x^2-2x-3 b) $2x^3-7x^2-19x+60$

c) x^3-x-6 d) $4x^4+4x^3-3x^2-4x-1$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Fracciones algebraicas

15 ▼▽▽ Simplifica estas fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{9x}{12x^2}$ b) $\dfrac{x(x+1)}{5(x+1)}$ c) $\dfrac{x^2(x+2)}{2x^3}$

16 ▼▼▽ Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:

a) $\dfrac{x^2-4x}{x^2}$ b) $\dfrac{3x}{x^2+2x}$ c) $\dfrac{3x+3}{(x+1)^2}$

d) $\dfrac{2x^2+4x}{x^3+2x^2}$ e) $\dfrac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2}$ f) $\dfrac{5x^3+5x}{x^4+x^2}$

17 ▼▼▽ Efectúa.

a) $\dfrac{1}{6x}+\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{2x^3}$ b) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x-1}{x-7}$

c) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x-4}+\dfrac{x+1}{x-4}$ d) $\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{x-1}{x+3}$

e) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}$ f) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2+x}+2$

18 ▼▼▽ Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.

a) $\dfrac{2x+4}{3x^2+6x}$ b) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ c) $\dfrac{x-2}{x^2+4-4x}$

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ e) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ f) $\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x+3}$

19 ▼▼▽ Opera, y simplifica si es posible.

a) $\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{3}{x^2}$ b) $\dfrac{3x+2}{x-1}:\dfrac{x+1}{x}$

c) $\dfrac{3}{(x-1)^2}:\dfrac{2}{x-1}$ d) $(x+1):\dfrac{x^2-1}{2}$

Traducción al lenguaje algebraico

20 ▼▽▽ Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos.

b) El área total de un ortoedro de dimensiones x, $2x$ y 5 cm.

c) La cantidad de leche envasada en "x" botellas de 1,5 *l* y en "y" botellas de 1 *l*.

d) El área de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide 3 cm más que el otro.

21 ▼▼▽ Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:

a) La edad de Alberto dentro de 22 años.

b) La cantidad que se obtiene al invertir x euros y ganar el 11%.

c) Por un ordenador y un equipo de música se pagan 2 500 €. Si el ordenador cuesta x euros, ¿cuánto cuesta el equipo de música?

d) Comprar un artículo por x euros y perder el 15% de su valor. ¿Cuánto costaría ahora?

e) El perímetro de un triángulo rectángulo en el cual uno de los catetos mide los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto, 5 cm menos que esta.

f) Los lados de un triángulo rectángulo isósceles de 24 cm de perímetro.

22 ▼▼▽ Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:

a) El área de una lámina de bronce cuya base mide 5/3 de su altura.

b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $16-x$ y $9-x$.

c) El área de un cuadrado de lado $x+3$.

d) La diferencia de áreas de dos cuadrados de lados x y $x+3$, respectivamente.

e) La superficie de un jardín rectangular de base x y perímetro 70 m.

f) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de 24 cm de perímetro.

g) El área de un rombo sabiendo que la longitud de una diagonal es el triple de la otra.

23 ▼▽▽ Expresa algebraicamente cada enunciado.

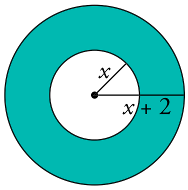
a) El cuadrado de la diferencia de dos números.

b) La suma de los cuadrados de dos números.

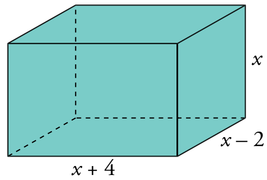
c) La diagonal de un rectángulo de dimensiones x e y.

d) El coste de la mezcla de dos tipos de café, cuyos precios son 8 €/kg y 10 €/kg.

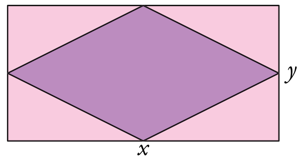
24 ▼▽▽ Expresa algebraicamente el área de esta corona circular.



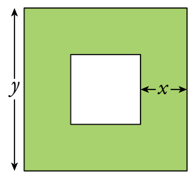
27 ▼▽▽ Expresa mediante polinomios el área y el volumen de este ortoedro:



28 ▼▼▽ En un rectángulo de lados x e y inscribimos un rombo. Escribe el perímetro del rombo en función de los lados del rectángulo.



29 ▼▼▽ Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada utilizando x e y.



Aplica lo aprendido

25 ▼▽▽ Escribe, en cada caso, un polinomio de segundo grado que tenga por raíces:

a) 7 y –7 b) 0 y 5

c) –2 y –3 d) 4 (doble)

26 ▼▽▽ Escribe, en cada caso, un polinomio que tenga las siguientes raíces:

a) $x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 2$

b) $x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -1$

Autoevaluación

¿Sabes operar con polinomios?

1 Opera y simplifica:

a) $(2x + 3) \cdot (x^2 - 3x) - x(x + 8)$

b) $(x^3 - 2x + 3)(x^2 + 4x - 1)$

2 Halla el cociente y el resto:

a) $(2x^3 + 3x^2 - 7) : (x + 1)$

b) $(2x^3 - 11x^2 + 5x) : (2x - 1)$

¿Factorizas un polinomio con agilidad?

3 Completa en tu cuaderno estas expresiones:

a) $(x + 5)^2 = x^2 + \square + 25$

b) $(2x - \square)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

c) $(7x + \square)^2 = \square x^2 + \square x + 16$

4 Factoriza:

a) $x^4 - 16x^2$ b) $x^3 - 25x$

c) $x^3 - 6x^2 + 9x$ d) $x^3 - 2x^5 - 5x + 6$

¿Manejas los procedimientos para simplificar distintas expresiones algebraicas?

5 Reduce:

a) $6 \cdot \left(\dfrac{x^2 + 1}{3} - \dfrac{x^2 - 4}{6} - x + 1\right)$

b) $\dfrac{3 - x}{x^2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{x + 5}{2x}$

6 Sustituye x por $1 + 2y$ en $x^2 - y - 8$ y simplifica.

¿Sabes traducir un enunciado al lenguaje algebraico?

7 Expresa algebraicamente y simplifica.

a) La diferencia de los cuadrados de dos números que suman 7 unidades.

b) Precio final de un producto que costaba x euros después de una subida del 8%.

c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide la mitad del otro.

d) Lo que pago por tres bocadillos y cinco refrescos.

3 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

Diofanto (siglo III) propuso problemas algebraicos complejos y los resolvió por métodos originales y muy interesantes. Pero su aportación careció de método y tuvo poco valor pedagógico.

Al-Jwarizmi (siglo IX) fue quien, por primera vez, realizó un tratamiento sistemático y completo de la resolución de ecuaciones de primero y segundo grados. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala,* elemental, didáctico y exhaustivo, fue muy conocido y estudiado y, posteriormente, traducido a todos los idiomas.

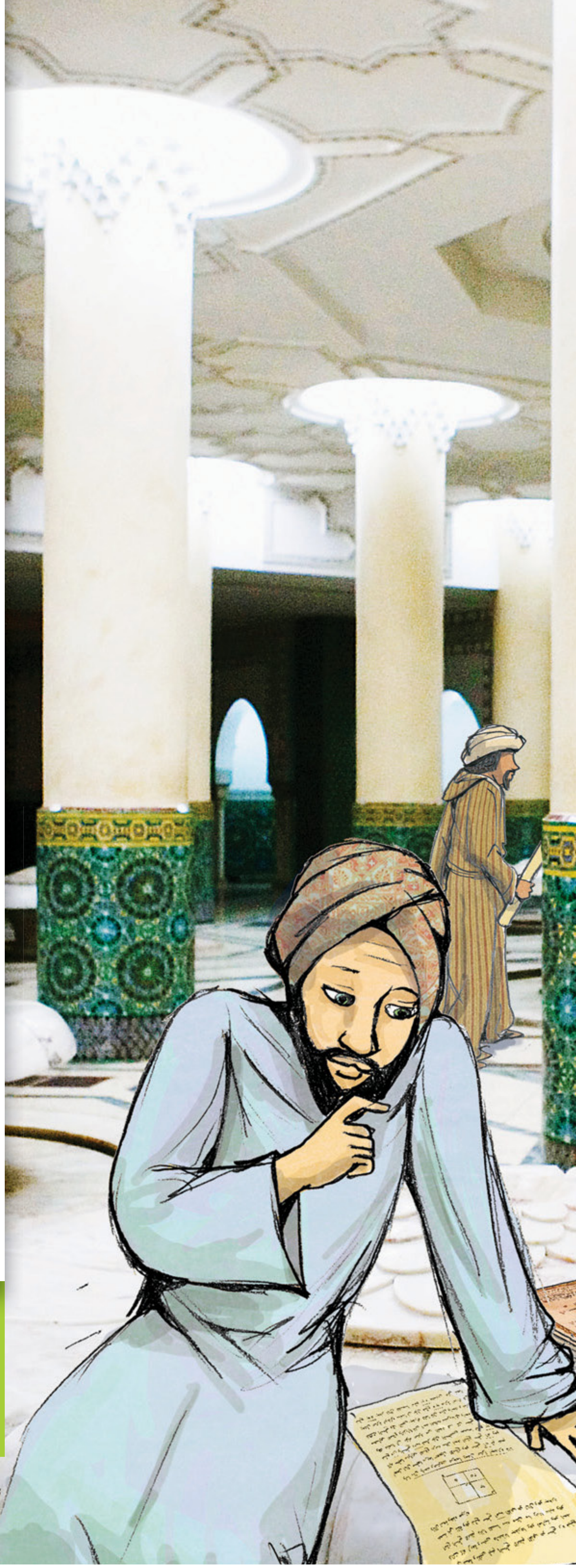
En el siglo XVI, varios algebristas italianos (Tartaglia, Cardano, Ferrari, Fior) mantuvieron unas interesantísimas, agitadas y fecundas discusiones sobre la resolución de distintos tipos de ecuaciones cúbicas (de tercer grado). Sus diatribas, en muchos casos, se dilucidaban en debates públicos a los que se retaban mediante pasquines. A pesar de que el tono de estos y de aquellas (pasquines y diatribas) distaba mucho de ser correcto, sirvieron para dar un gran impulso a la resolución de ecuaciones de grado superior.

Los sistemas de ecuaciones se plantearon y resolvieron de forma simultánea a las ecuaciones, ya que el paso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a una ecuación con una incógnita no supone ningún problema especial.

Históricamente, los sistemas de ecuaciones lineales no han sido un reto especialmente difícil. Ya en el siglo II a.C., los chinos resolvían sistemas lineales de varias ecuaciones con el mismo número de incógnitas, mediante un método elegante y potente, similar al que se usa en la actualidad.

DEBERÁS RECORDAR

- Qué entendemos por ecuación y por su solución.
- En qué consisten y cómo se manejan las desigualdades.



1

Ecuaciones de segundo grado

Cálculo mental

Resuelve sin utilizar la fórmula y, si es posible, a ojo:

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $5x^2 - 20 = 0$

d) $3x^2 - 300 = 0$

e) $(x - 5)^2 = 25$

f) $(x - 5)^2 = 4$

g) $3(x - 2)^2 = 3$

h) $3(x - 2)^2 - 3 = 0$

i) $7(x - 4)^2 = 63$

j) $7(x - 4)^2 - 63 = 0$

Las ecuaciones de segundo grado son de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Ecuaciones completas

Cuando $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es completa y se resuelve aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } b^2 - 4ac > 0, \text{ hay dos soluciones.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac = 0, \text{ hay una solución.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac < 0, \text{ no hay ninguna solución.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ es completa. En ella, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$. La resolvemos aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array} \Bigg\} \text{ Tiene dos soluciones.}$$

Ecuaciones incompletas

Si $b = 0$ o $c = 0$, la ecuación se llama incompleta y se puede resolver con mucha sencillez, sin necesidad de aplicar la fórmula anterior:

- **Si $b = 0$** $\rightarrow$ Despejamos directamente x^2. Por ejemplo:

  $$3x^2 - 48 = 0 \rightarrow 3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

- **Si $c = 0$** $\rightarrow$ Factorizamos sacando factor común. Por ejemplo:

  $$2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x - 1) = 0 \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1/2 \end{array}$$

Ten en cuenta

Las ecuaciones incompletas también se pueden resolver por la fórmula anterior, pero es mucho más cómodo resolverlas mediante el procedimiento adjunto.

Ejercicio resuelto

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ **b) $5x^2 - 7x + 3 = 0$** **c) $5x^2 + 45 = 0$**

a) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6}{18} = \frac{-1}{3}$. Solución única.

b) $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{10} = \frac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$. Sin solución.

c) $5x^2 + 45 = 0 \rightarrow 5x^2 = -45 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$. Sin solución.

Actividades

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $10x^2 - 3x - 1 = 0$ b) $x^2 - 20x + 100 = 0$

c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$ d) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $3x^2 + 5 = 0$

c) $7x^2 + 5x = 0$ d) $2x^2 + 10x = 0$

2 Otros tipos de ecuaciones

Hay ecuaciones que no son de primer ni de segundo grado, pero que podrás resolver aplicando lo que ya sabes. Veamos algunos ejemplos.

Ecuaciones factorizadas

Queremos resolver la ecuación $x(x-1)(x^2-5x+6)=0$.

En el primer miembro aparece el producto de tres factores. Para que un producto sea cero, es necesario que uno de los factores sea cero.

Por tanto, igualamos a cero cada uno de los factores:

$$x(x-1)(x^2-5x+6)=0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x-1=0 \rightarrow x_2 = 1 \\ x^2-5x+6=0 \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases} \end{cases}$$

No lo olvides

Para resolver una ecuación de este tipo:

$$[\ldots]\cdot[\ldots]\cdot[\ldots]=0$$

es decir, "producto de varios factores igualado a cero", igualamos a cero cada uno de los factores y resolvemos las correspondientes ecuaciones.

Ecuaciones con radicales

Resolvamos la ecuación $\sqrt{x^2+7}+2=2x$:

- Aislamos el radical en un miembro, pasando al otro lo demás:

$$\sqrt{x^2+7}=2x-2$$

- Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2=(2x-2)^2 \rightarrow x^2+7=4x^2-8x+4$$

- Pasamos todo a un miembro y lo ordenamos:

$$x^2+7-4x^2+8x-4=0 \rightarrow -3x^2+8x+3=0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $(a=-3,\ b=8,\ c=3)$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{-6}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{-6}=\frac{-8\pm 10}{-6} \begin{cases} x_1=-1/3 \\ x_2=3 \end{cases}$$

- En este tipo de ecuaciones (con radicales), al elevar al cuadrado (2.° paso), pueden aparecer soluciones falsas. Por eso, es **necesario comprobar las soluciones obtenidas** sustituyéndolas en la ecuación inicial. En este caso, $x=-1/3$ *no* es solución, pero $x=3$ sí lo es.

La ecuación tiene una solución: $x=3$

No lo olvides

Para resolver una ecuación en la que aparece un radical:

- Se aísla el radical en uno de los miembros.
- Se elevan al cuadrado los dos miembros, con lo que desaparece el radical.
- Se resuelve la ecuación resultante.
- Se comprueba la validez de cada solución sobre la ecuación inicial.

Actividades

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-4)(x-6)=0$ b) $(x+2)(x-3)=0$

c) $x(x+1)(x-5)=0$ d) $(3x+1)(2x-3)=0$

e) $x(x^2-64)=0$ f) $(2x+1)(x^2+5x-24)=0$

2 Resuelve.

a) $\sqrt{x}-3=0$ b) $\sqrt{x}+2=x$

c) $\sqrt{4x+5}=x+2$ d) $\sqrt{x+1}-3=x-8$

e) $\sqrt{2x^2-2}=1-x$ f) $\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{5x+6}$

Ecuaciones con la x en el denominador

Resolvamos la ecuación $\dfrac{200}{x} + 5 = \dfrac{200}{x-2}$:

- Para suprimir los denominadores, multiplicamos todo por $x \cdot (x-2)$:

$$200(x-2) + 5x(x-2) = 200x \rightarrow 200x - 400 + 5x^2 - 10x = 200x \rightarrow$$

$$\rightarrow 5x^2 - 10x - 400 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 80 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+320}}{2} \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

- Comprobamos en la ecuación inicial y vemos que ambas soluciones son válidas.

Por tanto, la ecuación inicial tiene dos soluciones: $x = -8$ y $x = 10$.

Ecuaciones bicuadradas: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Son ecuaciones de 4.° grado sin términos de grado impar. Para resolverlas, hacemos $x^2 = z$ y, por tanto, $x^4 = z^2$. Se obtiene así una ecuación de segundo grado cuya incógnita es z:

$$az^2 + bz + c = 0$$

Una vez resuelta, se obtienen los correspondientes valores de x. Por cada valor positivo de z habrá dos valores de x, pues $x^2 = z \rightarrow x = \pm\sqrt{z}$.

Ejercicio resuelto

Resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \xrightarrow{x^2 = z} z^2 - 13z + 36 = 0$$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} z = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ z = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$

Entrénate

1 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{10}{x+3} + 5 = 4x - 1$

b) $\dfrac{2\,000}{x} + 25 = \dfrac{2\,000}{x-4}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

d) $x^4 - 25x^2 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$

Actividades

3 Un vendedor callejero lleva un cierto número de relojes, por los que piensa sacar 200 €. Pero comprueba que dos de ellos están deteriorados. Aumentando el precio de los restantes en 5 €, consigue recaudar la misma cantidad. ¿Cuántos relojes llevaba?

☞ *Llevaba x relojes. El precio de cada uno iba a ser $\dfrac{200}{x}$.*

4 El lado menor de un triángulo rectángulo mide 5 cm. Calcular el otro cateto sabiendo que la hipotenusa mide 1 cm más que él.

☞ *Si los catetos miden 5 cm y x cm, la hipotenusa medirá $\sqrt{x^2 + 25}$ cm.*

5 Un grupo de amigos alquilan un autocar por 2 000 € para una excursión.

Fallan 4 de ellos, por lo que los restantes deben pagar 25 € más cada uno.

¿Cuántos había al principio?

6 En un triángulo rectángulo, un cateto mide 8 cm. Calcula la longitud del otro cateto sabiendo que la hipotenusa mide 2 cm más que él.

3 Sistemas de ecuaciones lineales

Vamos a recordar qué son los sistemas de ecuaciones y cómo se resuelven.

Dos ecuaciones forman un **sistema de ecuaciones** cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

Si ambas ecuaciones son lineales, se dice que el sistema es lineal.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolución de un sistema lineal

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Se obtiene, así, una ecuación con una incógnita. Se resuelve. Su solución se sustituye en la primera ecuación. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{array}\right\} \to x = 15 - 2y \to 3(15 - 2y) - 5y = 1 \to \dots \to y = 4 \to$$

$$\to x = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7$$

Solución: $x = 7,\ y = 4$

Método de igualación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan los resultados. Al igual que en el método anterior, también en este se obtiene una ecuación con una incógnita. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to x = \dfrac{1 + 5y}{3} \\ \to x = 15 - 2y \end{array} \Bigg\} \to \frac{1 + 5y}{3} = 15 - 2y \to y = 4$$

$$x = 15 - 2 \cdot 4 = 7$$

Solución: $x = 7,\ y = 4$

Método de reducción

Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando por los números que convenga) *para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas. Al restarlas se obtiene una ecuación sin esa incógnita.* Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 76 \\ 4x - 2y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.^{a} \cdot 4} \\ \xrightarrow{2.^{a} \cdot 3} \end{array} \begin{array}{r} 12x + 20y = 304 \\ 12x - \ \ 6y = 18 \\ \hline 26y = 286 \end{array}$$

Restando: $26y = 286 \to y = 11$

$$3x + 5 \cdot 11 = 76 \to x = 7$$

Solución: $x = 7,\ y = 11$

Entrénate

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando los tres métodos que conoces: sustitución, igualación y reducción:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - 3y = -15 \\ x - y = -5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - y = 1/6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - \frac{1}{2}y = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 6x + 3y = -15 \end{cases}$

4 Sistemas de ecuaciones no lineales

Ten en cuenta

Los sistemas de ecuaciones no lineales se resuelven de forma esencialmente igual a los sistemas lineales.

Son aquellos en los que una de las dos ecuaciones, o ambas, son no lineales, es decir, tienen monomios de segundo grado (x^2, y^2, $x \cdot y$) o de grado superior, o radicales, o alguna incógnita en el denominador…

Para resolverlos, podemos despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en la otra (método de sustitución) o eliminar una incógnita simplificando entre las dos ecuaciones (método de reducción) o cualquier otro método por el que podamos pasar a una ecuación con una incógnita.

No lo olvides

Si hay raíces o incógnitas en el denominador, al resolver la ecuación puede aparecer alguna solución falsa. Por eso, en tales casos, es necesario comprobar todas las soluciones sobre el sistema inicial.

Ejercicio resuelto

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

a) Aplicamos el método de sustitución:

$$\begin{cases} y - x = 1 & \rightarrow \quad y = 1 + x \\ x^2 + y^2 = 5 & \rightarrow \quad x^2 + (1 + x)^2 = 5 \ \rightarrow \ x^2 + 1 + x^2 + 2x = 5 \ \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \ \rightarrow \ x^2 + x - 2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 & \rightarrow \ y_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = -2 & \rightarrow \ y_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 1,\ y_1 = 2$

$x_2 = -2,\ y_2 = -1$

b) Aplicamos el método de reducción:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

Sumando: $2x^2 = 98 \ \rightarrow \ x^2 = 49 \ \rightarrow \ x = \pm 7$

Si $x = 7 \ \rightarrow \ 49 + y^2 = 58 \ \rightarrow \ y^2 = 9 \ \rightarrow \ y = \pm 3$

Si $x = -7 \ \rightarrow \ 49 + y^2 = 58 \ \rightarrow \ y^2 = 9 \ \rightarrow \ y = \pm 3$

Hay cuatro soluciones: $x_1 = 7,\ y_1 = 3$

$x_2 = 7,\ y_2 = -3$

$x_3 = -7,\ y_3 = 3$

$x_4 = -7,\ y_4 = -3$

Actividades

1 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = \sqrt{x + 1} \\ y = 5 - x \end{cases}$

5 Inecuaciones de primer grado

A veces, los enunciados que dan lugar a una expresión algebraica no dicen "es igual a", sino "es mayor que" o "es menor que". Estos enunciados dan lugar a expresiones como estas, llamadas **inecuaciones:**

$$2x + 4 > 0 \qquad 10 - 5x \le 15$$

Recuerda

$a < b$ a es menor que b.

$a \le b$ a es menor que b o igual a b.

$a > b$ a es mayor que b.

$a \ge b$ a es mayor que b o igual a b.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica. Tiene dos miembros entre los cuales aparece uno de estos signos: $<$, $\le$, $>$, $\ge$.

Se llama **solución** de una inecuación a cualquier valor de la incógnita que hace cierta la desigualdad.

Las inecuaciones suelen tener infinitas soluciones (solo hay un número igual, pero hay infinitos números menores que otro).

Resolución de una inecuación de primer grado

Para resolver una ecuación, seguíamos una serie de pasos: quitar paréntesis, quitar denominadores, pasar las x a un miembro y los números al otro…

Todos ellos son válidos, exactamente igual, para las inecuaciones, salvo uno:

Si se multiplican o se dividen los dos miembros de una inecuación por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

No lo olvides

$2 < 5 \rightarrow -2 > -5$

$-x > 3 \rightarrow x < -3$

$-2x \ge 1 \rightarrow x \le \frac{-1}{2}$

Ejercicio resuelto

Resolver estas inecuaciones:

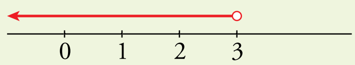
a) $2x + 1 < 7$

b) $7 - 5x \le 12$

a) $2x + 1 < 7 \rightarrow 2x < 6 \rightarrow x < 6 : 2 \rightarrow x < 3$

Solución: x puede ser cualquier número menor que 3.

Conjunto de soluciones: $(-\infty, 3)$

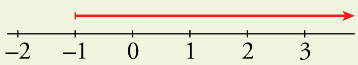


b) $7 - 5x \le 12 \rightarrow -5x \le 12 - 7 \rightarrow -x \le 5 : 5 \rightarrow -x \le 1 \rightarrow x \ge -1$

(Al cambiar de signo, cambia el sentido de la desigualdad).

Solución: x puede ser -1 o cualquier número mayor que él.

Conjunto de soluciones: $[-1, +\infty)$



Actividades

1 Traduce a lenguaje algebraico.

a) El triple de un número más 8 unidades es menor que 20.

b) El doble del número de personas de mi clase no supera a 70.

2 Resuelve y representa gráficamente las soluciones.

a) $5x < -5$

b) $2x + 3 \ge 7$

c) $104 - 9x \le 4(5x - 3)$

d) $3(4 - x) > 18x + 5$

e) $\frac{x}{4} - x \ge \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$

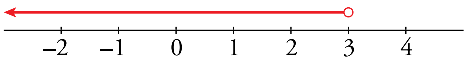
f) $\frac{4 - 2x}{3} > 2(x - 3)$

Sistemas de inecuaciones

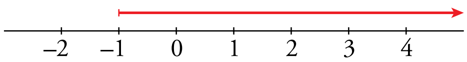
Si deseamos encontrar las soluciones comunes a varias inecuaciones, decimos que estas forman un **sistema de inecuaciones.**

Por ejemplo:

- Las soluciones de $2x + 1 < 7$ son $x < 3$

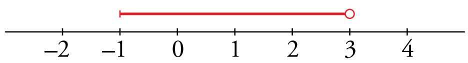


- Las soluciones de $7 - 5x \leq 12$ son $x \geq -1$



Por tanto, las soluciones del sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 1 < 7 \\ 7 - 5x \leq 12 \end{cases} \quad \text{son } -1 \leq x < 3$$



Observa

Cuando decimos "las soluciones *son* $x < 3$" queremos decir "las soluciones *son* todos los números menores que 3".

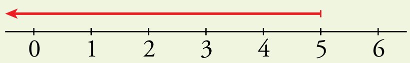
Análogamente, $x \geq -1$ significa "el número -1 y todos los números mayores que él".

Problema resuelto

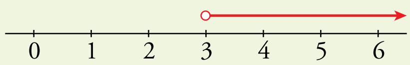
1. Resolver este sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 2 \leq 17} \\ \mathbf{5 - x < 2} \end{cases}$$

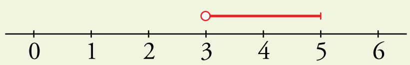
1. 1.ª inecuación: $3x + 2 \leq 17 \ \to\ 3x \leq 15 \ \to\ x \leq 5$



2.ª inecuación: $5 - x < 2 \ \to\ -x < -3 \ \to\ x > 3$



Sistema: *Solución:* $3 < x \leq 5$



La solución del sistema es cualquier número mayor que 3, que no supere al 5.

2. ¿Cuánto vale un chocolate con churros en el bar de la esquina? Ayer fuimos 6 personas y nos costó más de 20 €. Hoy hemos ido 8 personas y ha costado menos de 30 €.

2. Llamamos x al precio del chocolate con churros:

Ayer: $6x > 20 \ \to\ x > 3,\widehat{3} \ \to\ x \geq 3,34$ €

Hoy: $8x < 30 \ \to\ x < 3,75$ € $\to\ x \leq 3,74$ €

Por tanto, su precio está comprendido entre 3,34 € y 3,74 €. Probablemente, sea 3,50 €.

Actividades

3 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x \leq 15 \\ 2x \geq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 5 \leq x + 12 \\ x + 4 < 5x - 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 7 > 23 \\ 3 - 2x > x - 30 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x - 1 \geq 14 - 8x \\ 5x + 8 > 6x + 5/2 \end{cases}$

4 Tres amigos contratan tres viajes a Praga. Les cuesta algo menos de 2 200 € en total. Cinco amigos contratan el mismo viaje. Por ser cinco, les hacen una bonificación de 500 €, y pagan algo más de 3 000 €.

¿Cuánto vale ese viaje a Praga, si sabemos que es múltiplo de 10 €?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1 ▼▽▽ Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x+3} = 32$ b) $\sqrt{2x+1} = 9$

c) $x^{x+1} = 8$ d) $(x-1)^3 = 27$

2 ▼▼▽ Busca por tanteo, con la calculadora, una solución aproximada hasta las décimas.

a) $x^3 + x^2 = 20$ b) $x^x = 35$

c) $3^x = 1\,000$ d) $x^3 = 30$

Ecuaciones de segundo grado

3 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

c) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ d) $x^2 + x + 2 = 0$

4 ▼▽▽ Resuelve:

a) $4x^2 - 64 = 0$ b) $3x^2 - 9x = 0$

c) $2x^2 + 5x = 0$ d) $2x^2 - 8 = 0$

5 ▼▽▽ Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general:

a) $(3x+1)(3x-1) + \dfrac{(x-2)^2}{2} = 1 - 2x$

b) $\dfrac{x^2+2}{3} - \dfrac{x^2+1}{4} = \dfrac{x+5}{12}$

c) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3} = \dfrac{3x-2}{6} + \dfrac{x^2}{3}$

6 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(2x+1)^2 = 1 + (x-1)(x+1)$

b) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{2} + x = \dfrac{x}{4}$

c) $x + \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} = x^2 - 2$

Otros tipos de ecuaciones

7 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x-5)(x+7) = 0$ b) $(x-2)(4x+6) = 0$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0$ d) $(3x+1)(x^2+x-2) = 0$

8 ▼▼▼ Resuelve.

a) $x - \sqrt{x} = 2$ b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

c) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$ d) $x + \sqrt{5x+10} = 8$

e) $\sqrt{2x^2+7} = \sqrt{5-4x}$ f) $\sqrt{x+2} + 3 = x - 1$

9 ▼▼▼ Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3x}{2}$ b) $\dfrac{800}{x} - 50 = \dfrac{600}{x+4}$

c) $\dfrac{1}{x^2} - 2 = \dfrac{3-x}{3x^2}$ d) $\dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{2x-4}{x+4}$

Inecuaciones

10 ▼▽▽ Halla el conjunto de soluciones de cada inecuación y represéntalo.

a) $3x - 7 < 5$ b) $2 - x > 3$

c) $7 \geq 8x - 5$ d) $1 - 5x \leq -8$

e) $6 < 3x - 2$ f) $-4 \geq 1 - 10x$

11 ▼▽▽ Halla el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2 + x \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x > 0 \\ 3 - x \leq 0 \end{cases}$

Sistemas lineales

12 ▼▽▽ Completa en tu cuaderno para que los siguientes sistemas tengan como solución $x = -1$, $y = 2$:

a) $\begin{cases} x - 3y = \dots \\ 2x + y = \dots \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - x = \dots \\ 2y + x = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = \dots \\ \dots + y/2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dots - 2x = 4 \\ 3y + \dots = 1 \end{cases}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

13 ▼▽▽ Resuelve estos sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$

14 ▼▽▽ Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{x-3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$

15 ▼▽▽ Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 10x + 3y = -1 \end{cases}$

16 ▼▽▽ Resuelve por el método que consideres más adecuado:

a) $\begin{cases} 7x + 6y = 2 \\ y + 5 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$

Sistemas no lineales

17 ▼▼▽ Halla las soluciones de estos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

18 ▼▼▼ Resuelve los sistemas siguientes por el método de reducción y comprueba que tienen cuatro soluciones:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 7 \\ 2x^2 = 11y^2 - 3 \end{cases}$

Aplica lo aprendido

19 ▼▽▽ El área de una lámina rectangular de bronce es de 60 cm^2 y su base mide 5/3 de su altura. Halla las dimensiones de la lámina.

20 ▼▼▽ Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,5 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?

21 ▼▽▽ En una papelería, el precio de una copia en color es 0,75 € y el de una en blanco y negro es 0,20 €. En una semana, el número de copias en color fue la décima parte que en blanco y negro y se recaudaron 110 €. Calcula cuántas copias se hicieron de cada tipo.

22 ▼▽▽ Se mezclan 8 *l* de aceite de 4 €/*l* con otro más barato para obtener 20 *l* a 2,5 €/*l*. ¿Cuál es el precio del aceite barato?

23 ▼▽▽ La suma de dos números consecutivos es menor que 27. ¿Cuáles pueden ser esos números si sabemos que son de dos cifras?

24 ▼▼▽ Un grupo de amigos han reunido 50 € para ir a una discoteca. Si la entrada cuesta 6 €, les sobra dinero, pero si cuesta 7 € no tienen bastante. ¿Cuántos amigos son?

25 ▼▼▽ En un rectángulo en el que la base mide 3 cm más que la altura, el perímetro es mayor que 50 pero no llega a 54. ¿Cuál puede ser la media de la base?

26 ▼▽▽ Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

27 ▼▽▽ Una empresa aceitera ha envasado 3 000 *l* de aceite en 1 200 botellas de 2 *l* y de 5 *l*. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

28 ▼▽▽ Un test consta de 48 preguntas. Por cada acierto se suman 0,75 puntos y por cada error se restan 0,25. Mi puntuación fue de 18 puntos. ¿Cuántos aciertos y errores tuve, si contesté a todo?

29 ▼▽▽ Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0,80 € por cada pieza que sale de su taller para la venta, pero sufre una pérdida de 1 € por cada pieza defectuosa que debe retirar. En un día ha fabricado 2 255 bombillas, obteniendo unos beneficios de 1 750 €. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas defectuosas se fabricaron ese día?

30 ▼▽▽ Una empresa de alquiler de coches cobra por día y por kilómetros recorridos. Un cliente pagó 160 € por 3 días y 400 km, y otro pagó 175 € por 5 días y 300 km. Averigua cuánto cobran por día y por kilómetro.

31 ▼▼▽ La edad de un padre es hoy el triple que la del hijo y hace 6 años era cinco veces la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno?

☞

	EDAD ACTUAL	EDAD HACE 6 AÑOS
PADRE	x	$y - 6$
HIJO	y	$x - 6$

32 ▼▼▽ En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

☞

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ A	x	6	$6x$
CAFÉ B	y	8,50	$8{,}50y$
MEZCLA	20	7	140

Autoevaluación

¿Dominas la resolución de ecuaciones de segundo grado y de otros tipos de ecuaciones?

1 Resuelve:

a) $5(x-3)^2 + x^2 - 46 = -(2x+1)(1-3x)$

b) $(x+3)(2x-5) = 0$

c) $\dfrac{3}{2x} - \dfrac{3}{4x} = \dfrac{x+1}{8}$

¿Sabes resolver inecuaciones?

2 Resuelve y representa las soluciones.

a) $\dfrac{2(x-5)}{3} \le 2x - 6$ b) $\begin{cases} 5x - 3 > x + 5 \\ x - 6 \le 0 \end{cases}$

¿Sabes resolver con soltura sistemas de ecuaciones?

3 Resuelve:

a) $\begin{cases} y + 1 = 6 - x \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + y = \dfrac{5}{2} \\ 2x + 6y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y = 8 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 34 \\ 2x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$

¿Has adquirido destreza en el planteamiento y la resolución de problemas algebraicos?

4 Dos bocadillos y un refresco cuestan 5,35 €; tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8,60 €. Calcula el precio de un bocadillo y el de un refresco.

5 Los lados de un triángulo miden 18 cm, 16 cm y 9 cm. Si restamos una misma cantidad a los tres lados, obtenemos un triángulo rectángulo. ¿Qué cantidad es esa?

6 En una empresa alquilan bicicletas a 3 € la hora y motocicletas por 5 € fijos más 2 € por hora. ¿A partir de cuántas horas es más económico alquilar una motocicleta que una bicicleta?

4 Funciones. Características

El concepto de función ha ido evolucionando y perfilándose a lo largo del tiempo. ¿Qué requisitos se le ha ido exigiendo a dicho concepto?

— Una función relaciona dos variables.

— Las funciones describen fenómenos naturales.

— Las relaciones funcionales pueden ser descritas mediante fórmulas (relaciones algebraicas).

— Las funciones pueden ser representadas gráficamente.

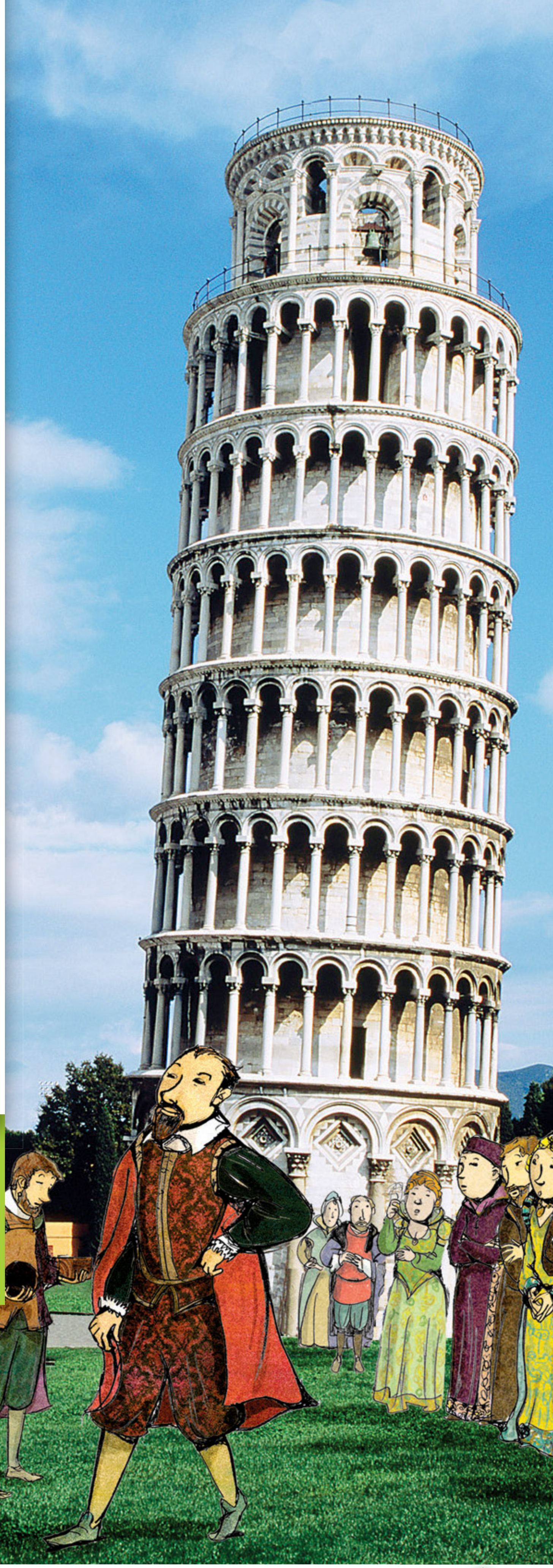
Oresme (matemático francés del siglo XIV) afirmó en 1350 que las leyes de la naturaleza son relaciones de dependencia entre "dos cantidades". Puede considerarse una primera aproximación al concepto de función.

Galileo (finales del siglo XVI) utiliza por primera vez la experimentación cuantitativa (diseña, experimenta, mide, anota) para establecer relaciones numéricas que describan fenómenos naturales.

Descartes (siglo XVII), con su algebrización de la geometría, propicia que las funciones puedan ser representadas gráficamente.

Leibniz, en 1673, utiliza por primera vez la palabra *función* para designar estas relaciones.

Euler, entre 1748 y 1755, fue perfilando el concepto, al que dio precisión y generalidad, admitiendo, finalmente, que una relación entre dos variables puede ser función aunque no haya una expresión analítica que la describa. El propio Euler fue quien aportó la nomenclatura $f(x)$.



DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se representan y se interpretan funciones descritas mediante enunciados.
- Qué es y cómo se obtiene la pendiente de un segmento.

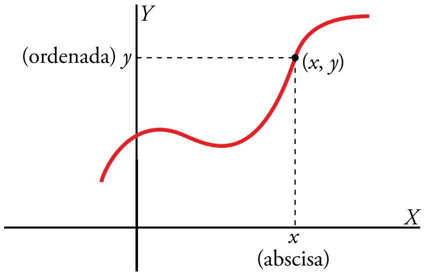
1 Conceptos básicos

Una función liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se las llama x e y:

x es la **variable independiente** y es la **variable dependiente**

La función, que se suele denotar por $y = f(x)$, asocia a cada valor de x **un único** valor de y:

$$x \to y = f(x)$$

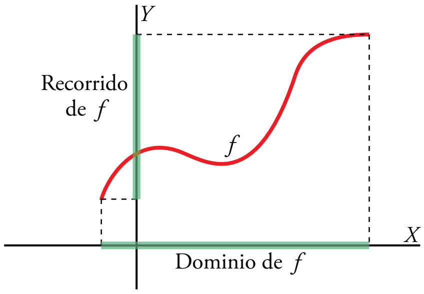


Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica: sobre unos ejes cartesianos con sendas escalas, representamos las dos variables:

La x sobre el eje horizontal (eje de **abscisas**).

La y sobre el eje vertical (eje de **ordenadas**).

Cada punto de la gráfica tiene dos **coordenadas,** su abscisa, x, y su ordenada, y.



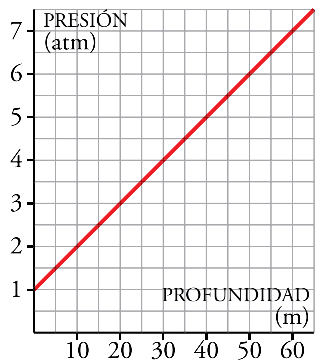
Se llama **dominio de definición** de una función, f, y se designa por *Dom f*, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

Se llama **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuales hay un x tal que $f(x) = y$.

Actividades

1 Esta gráfica corresponde a la función:

profundidad dentro del agua $\to$ *presión*

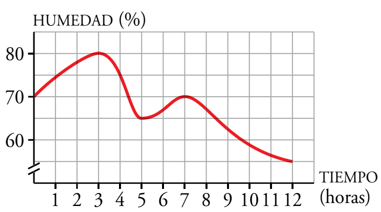


a) ¿Cuáles son las variables?

b) ¿Qué escalas se utilizan?

c) Di cuál es el dominio de definición y el recorrido.

2 Esta gráfica muestra la humedad relativa del aire en una ciudad.

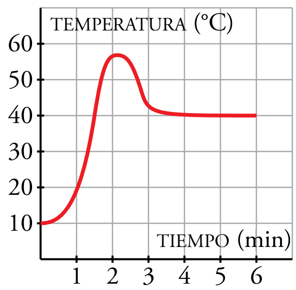


a) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente? ¿Qué escalas se utilizan?

b) ¿Durante cuánto tiempo se midió la humedad?

c) ¿Entre qué valores varió la humedad?

3



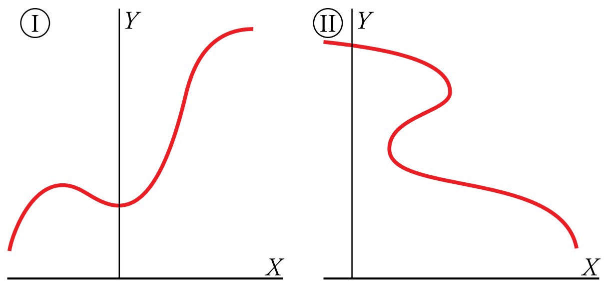
La gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo.

a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?

4



Una de estas dos gráficas corresponde a una función, y la otra, no. Identifica cada cual, razonadamente.

2 Cómo se presentan las funciones

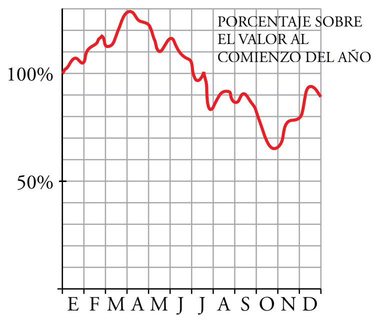
Tanto para el estudio de las matemáticas como para otras ciencias o en la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con funciones.

Las funciones nos vienen dadas de muy diversas formas: mediante su *gráfica*, por una *tabla de valores*, por una *fórmula* o mediante una *descripción verbal (enunciado)*.

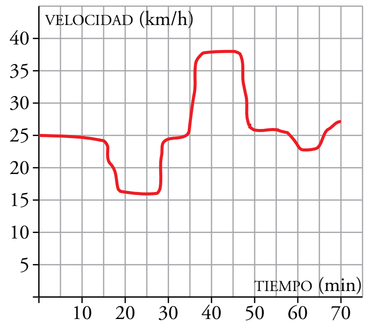
Mediante su expresión gráfica

Las siguientes dos funciones vienen dadas por sus representaciones gráficas:

ÍNDICE DE LA BOLSA EN UN AÑO



VELOCIDAD DE UN CICLISTA EN CADA INSTANTE DE UN RECORRIDO



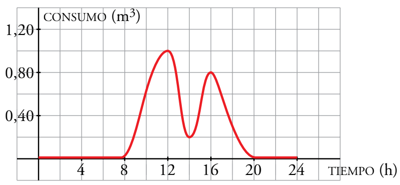
Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su **representación gráfica.** Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.

Mediante un enunciado

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción (como la que se hace en la siguiente actividad 1 para describir el recorrido de Alberto hasta la escuela), la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa.

Entrénate

1 El consumo de agua de un colegio viene dado por esta gráfica:



Haz un pequeño informe relacionando la gráfica con los movimientos del colegio (horas de entrada y de salida, recreos...).

Actividades

1 Haz una gráfica en la que se vea representado el recorrido de Alberto desde su casa hasta el colegio, en función del tiempo: de casa salió a las 8:30 h y fue seguidito hasta casa de su amigo Íker. Lo esperó un rato sentado en un banco y luego se fueron juntos, muy despacio, hacia el colegio. Cuando ya estaban llegando, se dio cuenta de que se había dejado la cartera en el banco. Volvió corriendo, la recuperó y llegó al colegio a las 9 en punto.

2 Vamos a analizar la gráfica de arriba que describe la velocidad del ciclista:

a) ¿Cuánto tiempo tarda en hacer el recorrido?

b) En los primeros 15 minutos circula en llano. ¿A qué velocidad lo hace? ¿Qué distancia recorre?

c) Entre el minuto 18 y el 27 va cuesta arriba. Di a qué velocidad.

d) Señala un intervalo de 5 minutos en el que marcha cuesta abajo. ¿A qué velocidad lo hace?

Mediante una tabla de valores

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos, como en la tabla siguiente, hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

Esta tabla de valores permite calcular lo que cada persona debe pagar a Hacienda un cierto año (cuota íntegra) en función de lo que gana (base liquidable).

BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	CUOTA ÍNTEGRA EUROS	RESTO BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	TIPO APLICABLE %
0	0	4 000	15
4 000	600	10 000	25
14 000	3 000	12 000	28
26 000	6 360	20 000	37
46 000	13 760	en adelante	45

Ejemplo

Alguien que gane 32 500 €:

- Se sitúa en la 4.ª fila.
- Por los primeros 26 000 € paga 6 360 €, y por el resto, el 37%:

  32 500 – 26 000 = 6 500 €

  37% de 6 500 = 6 500 × 0,37 = = 2 405 €

Por tanto, paga 6 500 + 2 405.

Es decir, si gana 32 500 €, ha de pagar 8 905 €.

Mediante su expresión analítica o fórmula

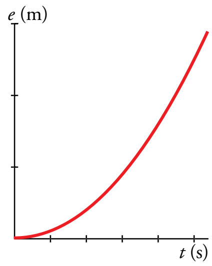
La **expresión analítica** es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero requiere un minucioso estudio posterior.

Veamos algunos ejemplos:

▼ **EJEMPLO 1**

Una bola que se deja caer por un plano levemente inclinado lleva una aceleración de 0,2 m/s^2.

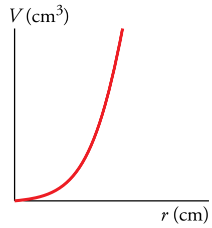
La distancia, e, en metros, que recorre en función del tiempo, t, en segundos, viene dada por la fórmula $e = 0{,}1t^2$.



▼ **EJEMPLO 2**

El volumen de una esfera en función de su radio es:

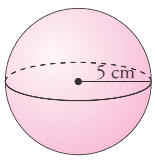
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (r \text{ en cm}, \; V \text{ en cm}^3)$$

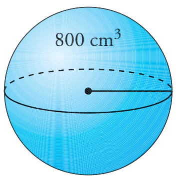


Actividades

3 En el EJEMPLO 1, calcula la distancia que recorre la bola en 1, 2, 3, 4 y 5 segundos. ¿A qué tiempo corresponde una distancia de 2 m?

4 En el EJEMPLO 2, halla el volumen de una esfera de radio 5 cm y el radio de una esfera de volumen 800 cm^3.





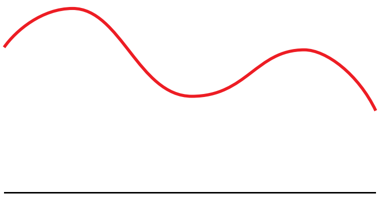
5 El coste de una línea de telefonía móvil para internet es $C = 10 + 1{,}5t$ (C, en €; t, en horas). Representa la función.

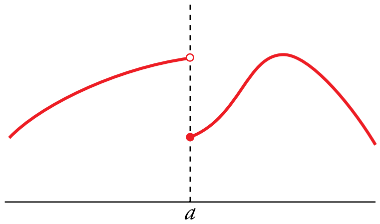
6 Esta tabla muestra cómo varía la cantidad de agua que hay en un depósito cuando se abre un desagüe:

***t* (min)**	0	1	2	3	5
***V* (l)**	20	18	16	14	10

Representa la función *tiempo* → *volumen*.

3 Funciones continuas. Discontinuidades

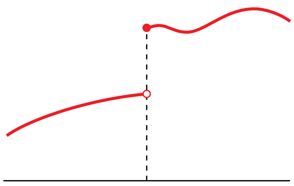




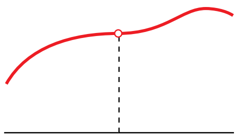
La función de la izquierda es continua en todo su dominio de definición.

La función de la derecha no es continua, porque presenta una discontinuidad en el punto de abscisa a.

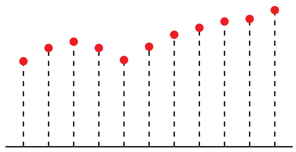
Hay distintos tipos de discontinuidad. Observa algunos:



Hay un salto.



Le falta un punto.



Solo está definida en puntos aislados.

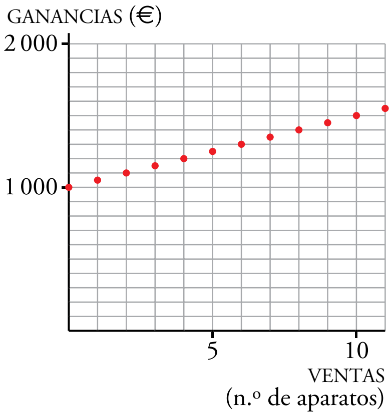
Una función es **continua** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo.

Se puede decir de una función que es **continua en un intervalo** $[a, b]$ si no presenta ninguna discontinuidad en él.

Entrénate

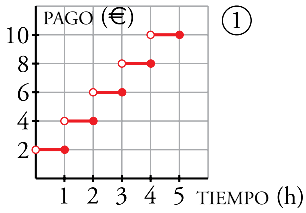
Un representante de ordenadores recibe cada mes 1 000 € fijos más 50 € por cada aparato vendido. Esta es la gráfica de la función:

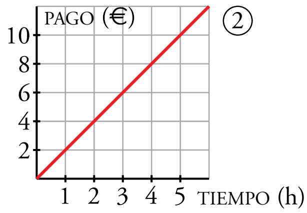
aparatos vendidos ⟶ *ganancias mensuales*

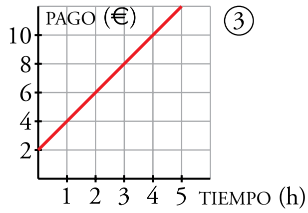


Explica por qué no se pueden unir los puntos.

Hasta hace poco, los aparcamientos cobraban "por horas". Esto quiere decir que solo por entrar ya se pagaba 1 h. Si se estaba 1 h y 10 min se pagaban 2 h. La primera de las tres gráficas siguientes describe esta forma de pago:







Los usuarios prefieren que las tarifas se rijan por la función continua de en medio. Los representantes de los aparcamientos preferirían, si se quiere que la función sea continua, la de la derecha.

Observa

La primera gráfica, discontinua, refleja el pago "por horas" (hora empezada, hora pagada). La segunda consiste en pagar exactamente lo que se gasta. En la tercera, hay un pago inicial (por entrar en el aparcamiento, 2 €) y, a continuación, se paga lo que se gasta.

Actividades

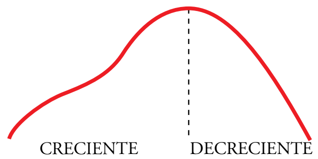
1 a) ¿Cuánto vale aparcar media hora según cada modelo 1, 2 y 3?

b) ¿Cuánto dinero cuesta aparcar 1 h 15 min según cada modelo?

c) ¿Y aparcar 4 h y 6 minutos?

d) Propón un modelo de tarifa que sea intermedio entre la preferencia de los usuarios y la de los representantes de los aparcamientos.

Crecimiento, máximos y mínimos



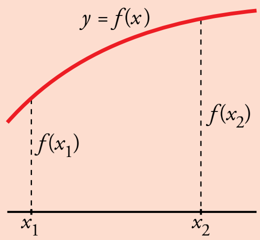
La función f es **creciente** en este tramo porque

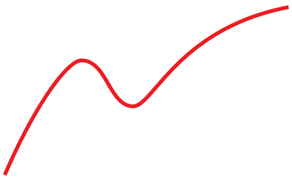
si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Análogamente, una función es **decreciente** en un intervalo cuando

si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función puede ser creciente en unos intervalos y decreciente en otros.

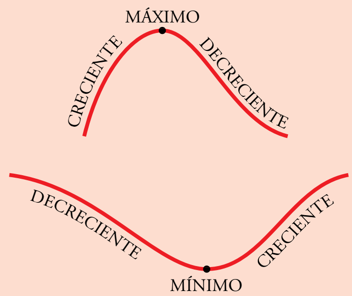




La función puede tomar en otros puntos valores mayores que un máximo relativo y menores que un mínimo relativo.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando en él la función toma un valor mayor que en los puntos próximos. En tal caso, la función es creciente hasta el máximo y decreciente a partir de él.

Análogamente, si f tiene un **mínimo relativo** en un punto, es decreciente antes del punto y creciente a partir de él.



Entrénate

Observa la gráfica del consumo de agua de un colegio que aparece en el margen de la página 47 y responde:

a) ¿Cuándo el consumo es creciente? ¿Cuándo es decreciente?

b) ¿Durante qué horas se alcanza los valores máximos y mínimos de consumo de agua?

Ejercicio resuelto

Decir los intervalos en que es creciente y en los que es decreciente la función dada gráficamente a la derecha. ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?

La función está definida entre -7 y 11.

Es creciente en los intervalos $(-7, -3)$ y $(1, 11)$.

Es decreciente en el intervalo $(-3, 1)$.

Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa -3. Su valor es 2.

Tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa 1. Su valor es -5.

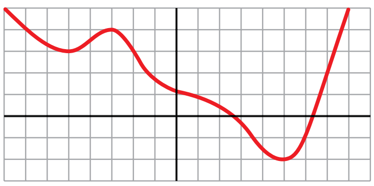
Hay puntos en los que la función toma valores menores que en el mínimo relativo. Por ejemplo, para $x = -7$, la función toma el valor -6.

Actividades

1 De la función de la derecha di:

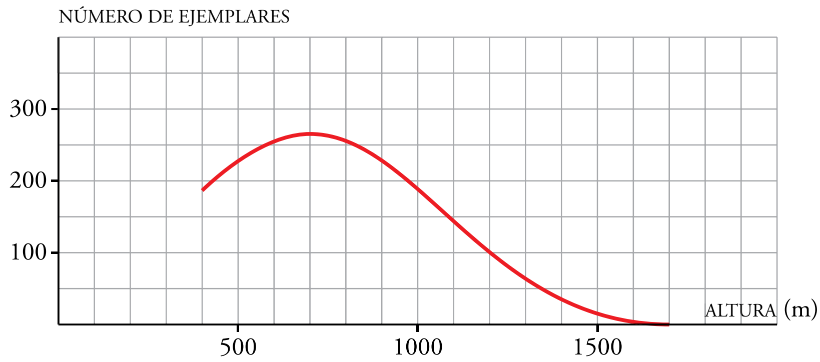
a) En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.



5 Tendencia y periodicidad

La siguiente gráfica muestra la *cantidad media de ejemplares por hectárea* que hay de una cierta especie de planta a distintas *alturas*:



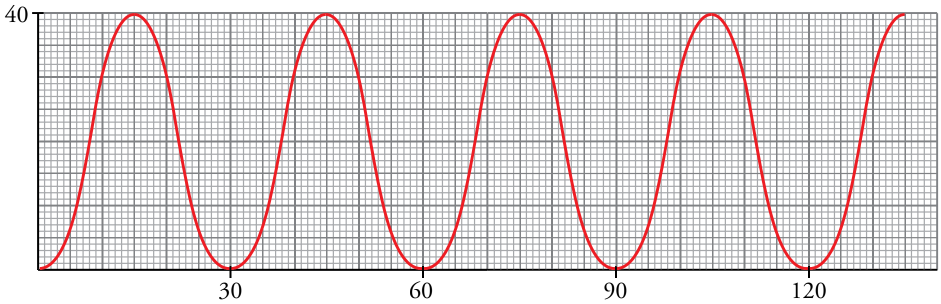
Observamos que, a partir de una cierta altura, cuanto más se sube menos ejemplares se encuentran. Y que, a partir de 1600 m, casi no hay plantas de este tipo. Podemos afirmar que:

Cuando la altura aumenta por encima de los 1600 m, el número de plantas tiende a cero.

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Periodicidad

Observamos la variación de la altura de un cestillo de una noria cuando esta da una vuelta. Tarda medio minuto (30 segundos), y en ese tiempo sube, llega al punto más alto, baja y llega al suelo. Pero este movimiento se repite una y otra vez. Su representación gráfica es esta:

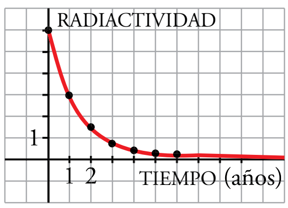


En esta función, lo que ocurre en el intervalo [0, 30] se repite reiteradamente. Se trata de una *función periódica* de *periodo* 30.

Función periódica es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo.**

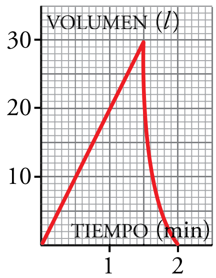
Entrénate

1 La cantidad de radiactividad que posee una sustancia se reduce a la mitad cada año. La gráfica adjunta describe la cantidad de radiactividad que hay en una porción de esa sustancia al transcurrir el tiempo.



¿A cuánto *tiende* la radiactividad con el paso del tiempo?

2 La cisterna de unos servicios públicos se llena y se vacía, automáticamente, cada dos minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica adjunta.



a) Dibuja la gráfica correspondiente a 10 min.

b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los siguientes instantes?

I) 17 min II) 40 min 30 s

III) 1 h 9 min 30 s

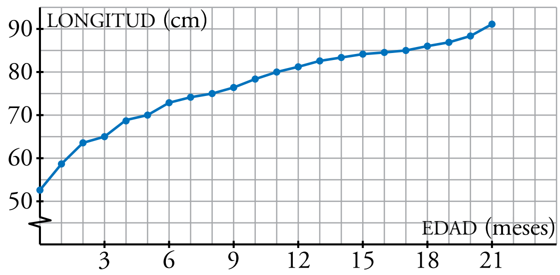
Ejercicios y problemas

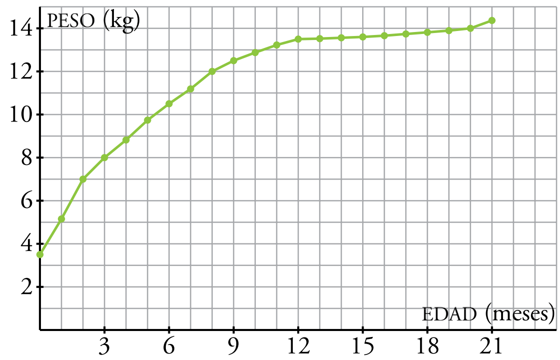
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Interpretación de gráficas

1 ▼▽▽ Pepe y Susana han medido y pesado a su hijo David cada mes, desde que nació hasta los 21 meses. Estas son las gráficas de la longitud y del peso de David en función de la edad:





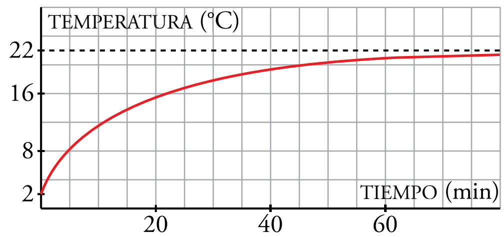
a) ¿Cuánto medía y pesaba David cuando nació?

b) ¿Cuánto creció David los seis primeros meses? ¿Y de los seis a los veintiún meses? ¿En qué meses fue mayor su crecimiento?

c) ¿Cuánto aumentó de peso David los dos primeros meses? ¿Y del mes 12 al mes 18?

d) ¿Cuánto pesaba David cuando medía 80 cm? ¿Qué edad tenía entonces?

2 ▼▽▽ Hemos sacado de la nevera un vaso con agua y lo hemos dejado sobre la mesa de la cocina. Esta gráfica muestra la temperatura del agua en grados centígrados al pasar el tiempo.



a) ¿A qué temperatura está el interior de la nevera?

b) ¿A qué temperatura está la habitación?

c) Imagina que en ese mismo momento sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C y lo dejamos sobre la mesa. Dibuja una gráfica aproximada que muestre la temperatura del agua en este segundo vaso al pasar el tiempo.

Enunciados, fórmulas y tablas

3 ▼▽▽ Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$ definida en $[-2, 3]$. Para ello, completa en tu cuaderno:

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

¿Cuál es el recorrido de la función?

4 ▼▼▽ Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha medido las distancias recorridas cada 5 minutos y ha obtenido los siguientes datos:

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) Dibuja la gráfica que relaciona la distancia y el tiempo de cada nadador y descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento durante la media hora?

c) Calcula la velocidad media de cada uno en todo el recorrido.

d) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada una de las tres funciones?

5 ▼▼▽ Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor a un ritmo de un 20% anual, aproximadamente.

a) Haz una tabla de valores que dé el valor, en años sucesivos, de un coche que costó 12 000 €.

b) Representa gráficamente la función *años transcurridos-valor del coche.*

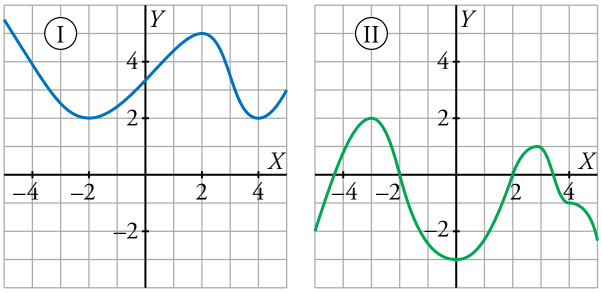
c) Encuentra una fórmula que permita hallar el precio del coche en función de los años transcurridos.

Características de una función

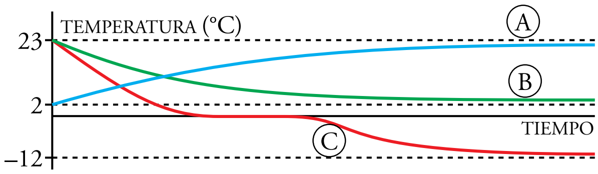
6 ▼▽▽ De cada una de las siguientes funciones di:

a) En qué intervalos crece y en cuáles decrece.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.



7 ▼▽▽ Observa las siguientes gráficas de funciones:



a) Relaciona cada curva con uno de estos enunciados.

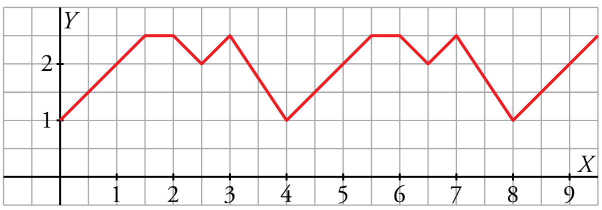
I. Temperatura de un vaso de agua cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Temperatura de un vaso de agua cuando sale de la nevera y se deja en la mesa.

III. Temperatura de un vaso de agua cuando pasa de la mesa al congelador.

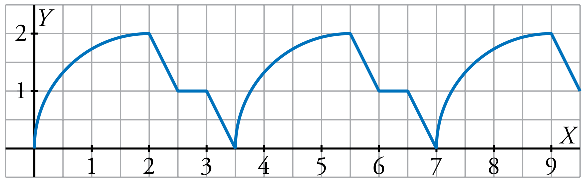
b) Determina a qué tiende cada una cuando crece la variable independiente.

8 ▼▼▽ ¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su periodo?

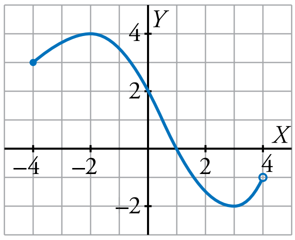


Averigua los valores de la función en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

9 ▼▽▽ Continúa esta gráfica sabiendo que se trata de una función periódica. Di cuál es su periodo.



10 ▼▽▽ Observa la gráfica de la función y responde:



a) ¿Cuáles son su dominio de definición y su recorrido?

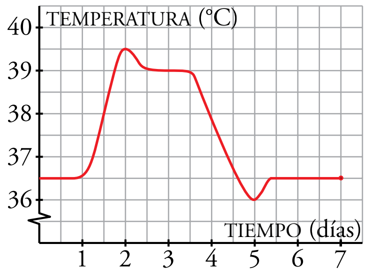
b) ¿Tiene máximo y mínimo relativos? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

c) ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes?

d) ¿En qué intervalos es la función creciente y en cuáles es decreciente?

Resuelve problemas

11 ▼▽▽ Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo.



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

d) ¿Qué tendencia tiene la temperatura?

e) Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

12 ▼▼▽ Un nadador se deja caer desde un trampolín. Su entrenador ha medido el espacio que recorre cada cuatro décimas de segundo mediante un método fotográfico. Obtiene la siguiente tabla:

TIEMPO (s)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8
ESPACIO (m)	0	0,78	3,13	7,05	12,5	14	14,5	15

El nadador se ha detenido a los 15 metros.

a) Representa la gráfica *espacio-tiempo*.

b) ¿Sabrías decir en qué momento entró en el agua?

c) ¿Qué velocidad estimas que llevaba en el momento de entrar en el agua?

d) ¿Qué altura tiene el trampolín?

13 ▼▼▽ Cuando una persona sana toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en la sangre) se eleva, en una hora aproximadamente, desde 90 mg/*dl*, que es el nivel normal, hasta 120 mg/*dl*.

Luego, en las tres horas siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 horas.

a) Representa la curva de glucemia de una persona sana.

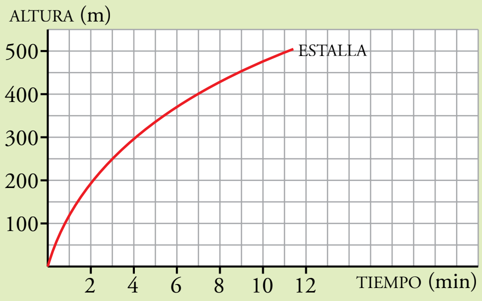
b) Di cuál es su máximo, su mínimo y explica su tendencia.

Autoevaluación

¿Sabes interpetar la gráfica correspondiente a una situación real o construirla a partir de un enunciado?

1 Un ciclista hace una excursión a un lugar que dista 30 km de su casa. Al cabo de una hora, cuando ha recorrido 15 km, hace una parada de media hora. Reanuda la marcha con la misma velocidad hasta llegar a su destino, donde descansa otra media hora, y regresa al punto de partida a la misma velocidad que a la ida. Representa la gráfica *tiempo-distancia al punto de partida.*

2 La siguiente gráfica representa la altura a la que se encuentra, con el paso del tiempo, un globo de hidrógeno que se va elevando… hasta que estalla:



a) ¿Cuánto tarda en estallar desde que lo soltamos?

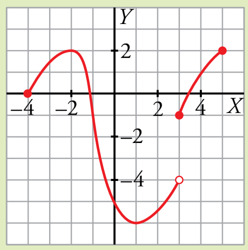
b) ¿Qué altura gana entre el minuto 3 y el minuto 6? ¿Y entre el 7 y el 11?

c) ¿Cómo es esta función, crece o decrece?

d) ¿Cómo continuarías la gráfica si el globo no hubiera estallado?

¿Reconoces las características más relevantes de una función?

3 Observa la gráfica y halla:



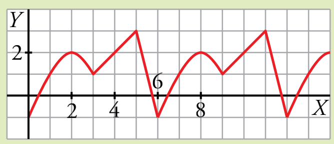
a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

4 a) ¿Es periódica esta función?



¿Cuál es su periodo?

b) Halla los valores de la función en los puntos de abscisas:

$x = 2;\ x = 4;\ x = 40;\ x = 42$

5 Funciones elementales

Después de Euler aún siguió, entre los matemáticos, la discusión sobre qué requisitos eran imprescindibles para definir una función y cuáles no. En 1923 se llegó a la siguiente definición, muy parecida a la que se usa actualmente.

> Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.

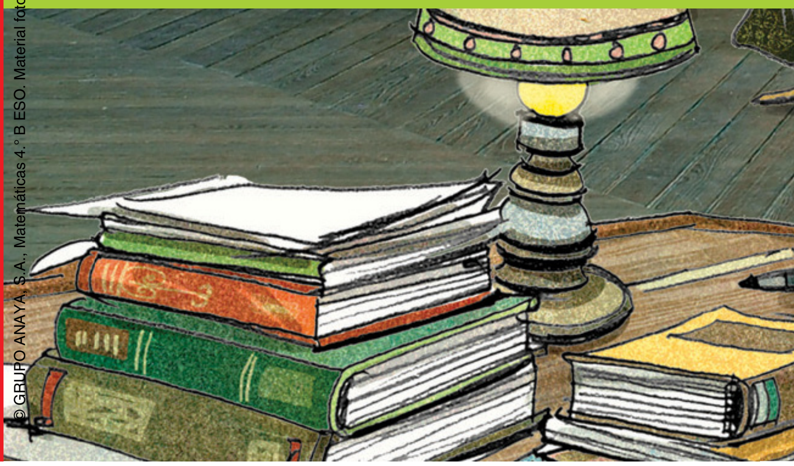
Pero en esa búsqueda de la precisión, se generaron una serie de funciones estrafalarias que llevaron a **Poincaré,** en el año 1899, a decir:

> "Durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas construidas de modo que se parezcan lo menos posible a las *funciones honestas* que sirven a algún propósito. Antes, cuando se inventaba alguna función, era con alguna meta práctica. Hoy son inventadas con el fin de mostrar que el razonamiento de nuestros antecesores fue erróneo".

En esta unidad vamos a dedicarnos a esas *funciones honestas* que propugnaba el gran Poincaré, esas funciones que sirven para algo más que para construir o desmontar conceptos.

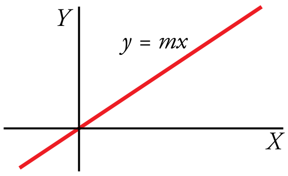
DEBERÁS RECORDAR

- Cómo se obtienen puntos de una función dada por su expresión analítica.
- Cómo se obtiene la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.



1 Distintos tipos de funciones lineales

Función de proporcionalidad: $y = mx$



Las funciones de proporcionalidad se representan mediante rectas que pasan por el origen. Describen una proporción entre los valores de las dos variables.

La pendiente de la recta es la razón de proporcionalidad, m.

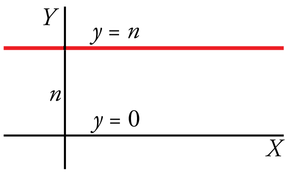
Ejemplo

El espacio recorrido con movimiento uniforme (velocidad constante) en función del tiempo es:

$$e = v \cdot t$$

v es la pendiente de la recta que relaciona e con t.

Función constante: $y = n$



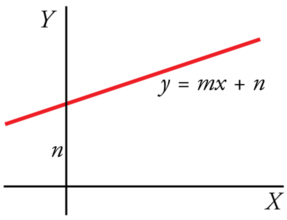
Se representa mediante una recta paralela al eje X. Su pendiente es 0.

La recta $y = 0$ coincide con el eje X.

Ejemplos

- El precio de la comida en algunos restaurantes es constante, no depende de la cantidad que nos sirvamos.
- La distancia de un satélite artificial a la Tierra es constante, no varía con el tiempo.

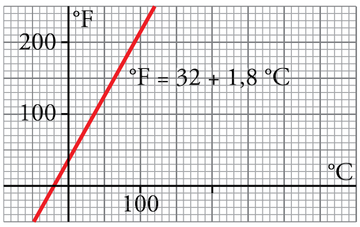
Expresión general: $y = mx + n$



Su representación es una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$. Al número n se le llama **ordenada en el origen.**

Por ejemplo:

La recta °F = 32 + 1,8 °C permite pasar de una temperatura en grados centígrados, °C, a la correspondiente en grados Fahrenheit, °F.



Actividades

1 Representa:

a) $y = 2x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = -\frac{1}{4}x$ d) $y = -\frac{7}{3}x$

2 Representa:

a) $y = 3$ b) $y = -2$ c) $y = 0$ d) $y = -5$

3 Representa:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = \frac{2}{3}x + 2$

c) $y = -\frac{1}{4}x + 5$ d) $y = -3x - 1$

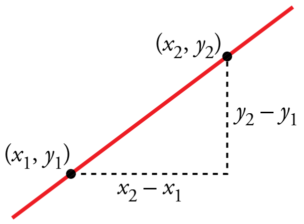
4 Un móvil, en el instante inicial, está a 3 m del origen y se aleja de este con una velocidad de 2 m/s.

Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.

5 El coste del uso doméstico de gas ciudad es de 12 € al bimestre más 0,05 € por cada kWh consumido.

Escribe la ecuación del coste bimensual, C, en función del número de kWh (E) de gas consumido.

2 Ecuación de una recta en la forma punto-pendiente



La pendiente de la recta

$$3x - 2y + 1 = 0$$

es $m = \frac{3}{2}$.

Pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta es la variación de la y (aumento o disminución) cuando la x aumenta una unidad.

Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, para hallar la pendiente, procedemos así:

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$y_2 - y_1$ es la variación de la y.
$x_2 - x_1$ es la variación de la x.

La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando está despejada la y.

Por ejemplo, observemos una tabla de valores correspondientes a $y = 2x + 1$:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

Advertimos que *cuando la x avanza 1, la y sube 2;* es decir, la pendiente de la recta es 2.

Ecuación de una recta en la forma punto-pendiente

Con mucha frecuencia hemos de escribir la ecuación de una recta de la cual conocemos un punto y la pendiente. La damos a continuación.

Punto: $P(x_0, y_0)$ Pendiente: m Ecuación: $y = y_0 + m(x - x_0)$

Recta dada por dos puntos

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, procedemos así:

- A partir de los dos puntos, obtenemos su pendiente.
- Con la pendiente y uno de los puntos, obtenemos la ecuación.

Ejercicio resuelto

Hallar la ecuación de cada una de las rectas siguientes:

a) Pasa por (0, 4) y tiene una pendiente de $\frac{7}{3}$.

b) Pasa por (–2, 7) y por (4, 5).

a) $y = 4 + \frac{7}{3}x$. Observa que (0, 4) está en el eje Y. Es decir, 4 es la ordenada en el origen.

b) Empezamos hallando su pendiente: $m = \frac{5-7}{4-(-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

Ecuación de la recta que pasa por (–2, 7) y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$:

$$y = 7 - \frac{1}{3}(x + 2)$$

Actividades

1 Halla la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–3, –5) y tiene una pendiente de $\frac{4}{9}$.

b) Pasa por el punto (0, –3) y tiene una pendiente de 4.

c) Pasa por (3, –5) y por (–4, 7).

2 Indica un punto y la pendiente de cada una de las rectas siguientes:

a) $y = -4 + 3(x - 1)$ b) $y = -2(x - 3)$ c) $y = 1 + 4x$

3 Parábolas y funciones cuadráticas

La curva que describe un balón cuando se lanza a canasta es una parábola. También describen parábolas las bolas de golf o los chorros de agua. Parabólicas son las secciones de las antenas que captan las emisiones de televisión procedentes de los satélites artificiales y las secciones de los faros de los coches. Y otros muchos objetos presentes en nuestra vida.

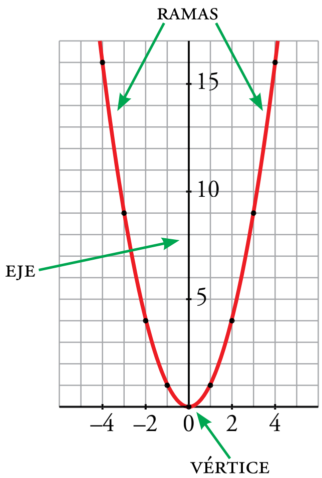
También hay muchas funciones que se representan mediante parábolas:

— El área de un cuadrado en función de su lado $(A = l^2)$ o la de un círculo en función de su radio $(A = \pi r^2)$.

— La altura a la que se encuentra una piedra que lanzamos hacia arriba en función del tiempo transcurrido desde que se lanzó $(a = v_0 t - 4{,}9t^2)$.

— El espacio que recorre un coche desde que decidimos frenar hasta que realmente se para, en función de la velocidad que llevaba $(e = 0{,}0074v^2 + 0{,}21v)$.

— …



Parábola tipo: la función $y = x^2$

Empecemos por representar el modelo de parábola más sencillo, que corresponde a la función $y = x^2$.

Se trata de una curva **simétrica** respecto al eje Y; tiene un mínimo en el punto (0, 0), al que llamamos **vértice.**

Tiene **dos ramas,** una decreciente y otra creciente.

Es una función **definida en todo** $\mathbb{R}$ y **continua,** pues no presenta saltos: se puede representar de un solo trazo.

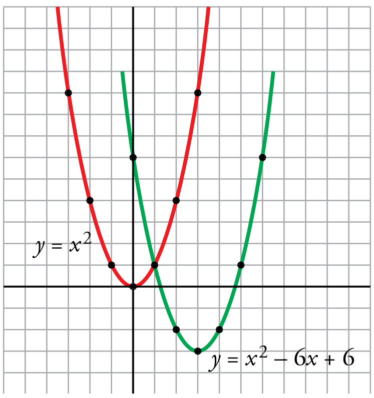
Como veremos a continuación, las gráficas de todas las demás funciones cuadráticas son similares a esta.

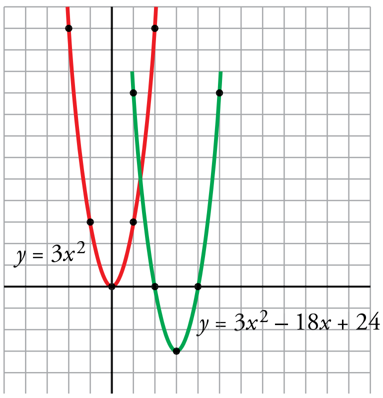
TABLA DE VALORES

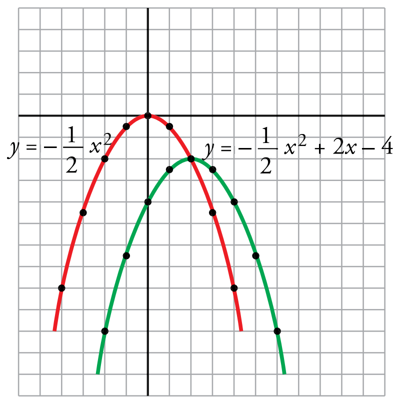
x	y
–4	16
–3	9
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Otras parábolas

Observa las siguientes curvas con sus respectivas ecuaciones:







Puedes comprobar, en cada una de ellas, que las coordenadas de los puntos señalados cumplen las correspondientes ecuaciones.

Funciones cuadráticas

Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas **cuadráticas,** se representan todas ellas mediante **parábolas** y son continuas en todo $\mathbb{R}$.

Cada una de estas parábolas tiene un eje paralelo al eje Y.

Su forma (hacia abajo, hacia arriba, más ancha…) depende de a, coeficiente de x^2, del siguiente modo:

- Si $a > 0$, tienen las ramas hacia arriba, y si $a < 0$, hacia abajo.
- Cuanto mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola.

Entrénate

1 Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 2$

b) $y = x^2 - 3$

c) $y = (x - 2)^2$

d) $y = (x + 1)^2$

2 Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = x^2 - 6x + 5$

3 Dibuja estas funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

b) $y = 2x^2 - 10x + 8$

Representación de funciones cuadráticas

Veamos algunos pasos que conviene dar para representar $y = ax^2 + bx + c$:

1.º La **abscisa del vértice** es $p = -\frac{b}{2a}$. Calculamos la ordenada.

2.º **Obtención de algunos puntos próximos al vértice.**

Calculamos el valor de la función en abscisas enteras próximas al vértice, a su derecha y a su izquierda. Así se obtiene la curva en su parte más interesante.

3.º **Puntos de corte con los ejes.**

— Corte con el eje X: se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

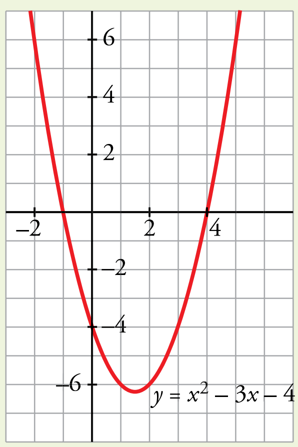
— Corte con el eje Y: es el $(0, c)$.

4.º **Representación.**

Escogeremos sobre los ejes unas escalas que nos permitan plasmar la información en un espacio razonable.

Ejercicio resuelto

Representar $y = x^2 - 3x - 4$.



1.º Obtención del vértice:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Abscisa: } p = \frac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ \text{Ordenada: } f(1{,}5) = -6{,}25 \end{array}\right\} \text{El vértice es } (1{,}5; -6{,}25).$$

2.º Obtención de puntos próximos al vértice:

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	6	0	–4	–6	–6	–4	0	6

3.º Puntos de corte con los ejes:

- Cortes con el eje X:

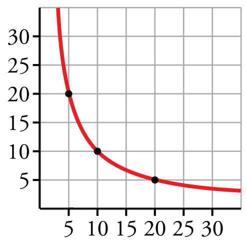
$$x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$$

- Corte con el eje Y: $(0, -4)$

(Esta información ya la teníamos en la tabla anterior)

4.º Puedes ver la representación a la izquierda.

4 Funciones de proporcionalidad inversa y radicales

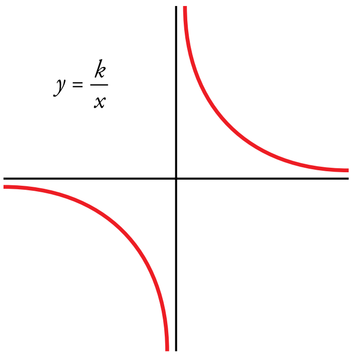


Funciones de proporcionalidad inversa

De un rectángulo de 100 cm^2 de superficie, desconocemos sus lados. Los llamamos x e y. Es claro que $xy = 100$. Lo ponemos así:

$y = \dfrac{100}{x}$ (A igualdad de áreas, los lados son inversamente proporcionales).

Las relaciones de proporcionalidad inversa, como la que acabamos de describir, se presentan con mucha frecuencia en la naturaleza, la física, la economía… Vamos a analizarlas teóricamente.



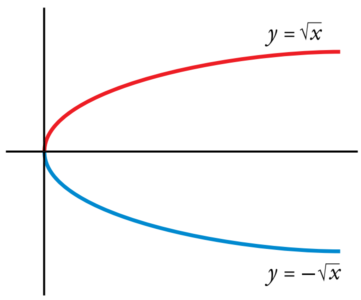
Las funciones $y = \dfrac{k}{x}$ presentan las características siguientes:

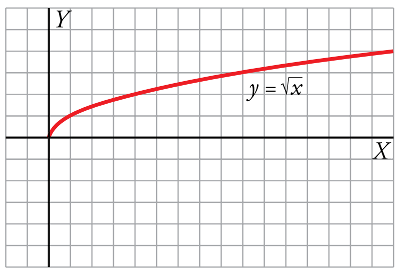
- No están definidas en $x = 0$.
- Si x se acerca a 0, y toma valores cada vez más grandes. Por eso, decimos que el eje Y es una **asíntota.**
- Si x toma valores cada vez más grandes, y se acerca a 0. Por eso, el eje X es asíntota.

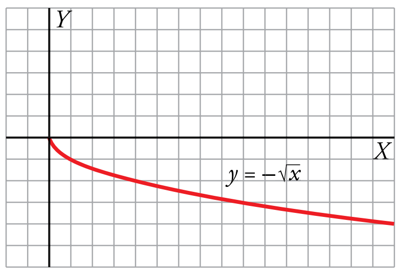
Esta curva es una **hipérbola.**

Funciones radicales

Las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ se pueden representar punto a punto y dan lugar a las gráficas que ves debajo. Son mitades de parábola y juntas describen una parábola idéntica a $y = x^2$, pero con su eje sobre el eje X.







El dominio de definición de estas funciones es $[0, +\infty)$.

Actividades

1 Representa con detalle la parte positiva de la función $y = \dfrac{36}{x}$. Para ello, dale a x los valores 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 y utiliza una hoja de papel cuadriculado para representar los puntos obtenidos.

2 Representa la función $y = \dfrac{6}{x}$. Para ello, da a x los valores ±1, ±2, ±3 y ±6.

3 Representa $y =$ y di su dominio de definición. (Da a x los valores 0, –1, –4, –9, –16).

4 Representa estas funciones y di sus dominios:

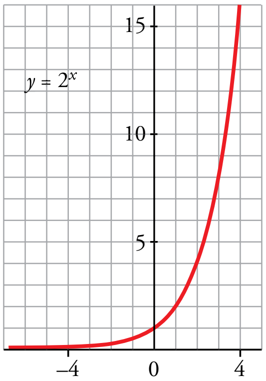
a) $y = \sqrt{x + 1}$

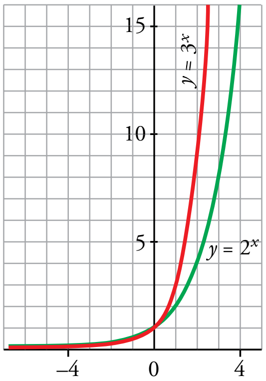
(Da a x los valores –1, 0, 3, 8, 15).

b) $y = \sqrt{1 - x}$

(Da a x los valores 1, 0, –3, –8, –15).

5 Funciones exponenciales





$y = 3^x$ crece más deprisa que $y = 2^x$.

Funciones exponenciales crecientes: $y = a^x$, $a > 1$

En el margen tienes la gráfica de la función exponencial de base 2: $y = 2^x$

$x \geq 0$:

x	0	1	2	3	4	…
2^x	1	2	4	8	16	…

Cuando x toma valores cada vez más grandes, 2^x tiende a infinito.

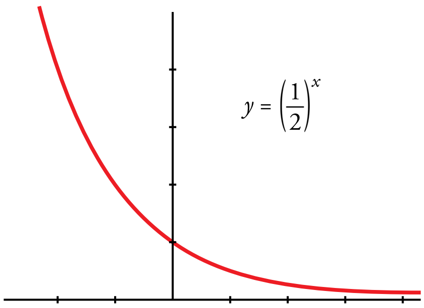
$x \leq 0$:

x	–1	–2	–3
2^x	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$	$2^{-2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	$2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Cuando x toma los valores –4, –5, –6, –10, …, 2^x se hace muy pequeño. Es decir, hacia la izquierda, 2^x tiende a cero.

Se llaman **funciones exponenciales** a las que tienen la ecuación $y = a^x$.

- Todas ellas son continuas, están definidas en todo $\mathbb{R}$ y pasan por los puntos (0, 1) y (1, a).
- Si la base es mayor que 1 ($a > 1$), entonces son crecientes.
- Crecen tanto más rápidamente cuanto mayor es a.



Funciones exponenciales decrecientes ($0 < a < 1$)

La función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ también es exponencial. Como su base (1/2) es menor que 1, la función es decreciente.

Las funciones $y = a^x$ con $0 < a < 1$ también pasan por (0, 1) y (1, a), son continuas y definidas en todo $\mathbb{R}$, pero son decrecientes. Decrecen tanto más rápidamente cuanto más próximo a 0 sea a.

Actividades

1 Calcula los valores de la función $y = 1{,}5^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –6 y 6. Representa la función.

2 Calcula los valores de la función $y = 0{,}8^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –8 y 8. Representa la función.

3 La función $y = 5^{0{,}2x}$ puede ponerse de forma exponencial $y = a^x$ teniendo en cuenta que $5^{0{,}2x} = (5^{0{,}2})^x$.

a) Calcula $5^{0{,}2}$ y guarda el resultado en la memoria: 5 $\boxed{x^y}$ 0,2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$.

b) Representa la función dando valores a x. Por ejemplo, para $x = 4$: $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{3.62}$.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Pendiente de una recta

1 ▼▽▽ Halla gráficamente la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) (2, 4) y (–1, –2) b) (–3, 5) y (3, –1)

c) (–3, 5) y (2, 1) d) (3, 2) y (5, 2)

2 ▼▽▽ Halla las pendientes de las siguientes rectas, obteniendo dos de sus puntos:

a) $y = 4x - 2$ b) $y = -\dfrac{4}{5}x$

c) $y = \dfrac{5x}{4} + 3$ d) $y = 8 - 5x$

Comprueba, en cada caso, que coinciden con el coeficiente de la x (puesto que la y está despejada). ¿Qué relación existe entre el crecimiento o el decrecimiento de una recta y su pendiente?

3 ▼▽▽ Halla las pendientes de las siguientes rectas:

a) $6x + 3y - 4 = 0$ b) $x + 4y - 2 = 0$

c) $-3x + 2y = 0$ d) $3y - 12 = 0$

Ecuación y representación de una función lineal

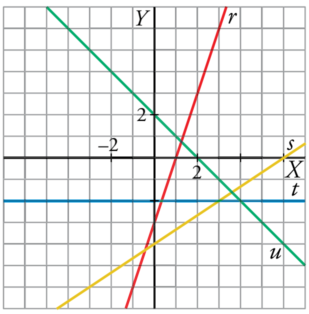
4 ▼▽▽ Asocia a cada recta su ecuación. Di, en cada caso, cuál es su pendiente.

a) $y + 2 = 0$

b) $3x - y = 3$

c) $y = 2 - x$

d) $2x - 3y = 12$



5 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones y dibújalas:

a) Pasa por (5, 3) y tiene una pendiente de 3/5.

b) Pasa por el punto (5, 3) y tiene pendiente –1/2.

c) Pasa por el punto (5, 6) y tiene la misma pendiente que la recta $2x + y = 0$.

6 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas que pasan por los puntos que se indican y represéntalas:

a) (2, 3) y (7, 0)

b) (–2, 5) y por el origen de coordenadas

c) (–3, 2) y (3, 2)

d) (0, 4) y (4, 0)

Funciones cuadráticas

7 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$

c) $y = 2x^2$ d) $y = 0{,}5x^2$

8 ▼▽▽ Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = (x + 4)^2$ b) $y = \dfrac{1}{3}x^2 + 2x$

c) $y = -3x^2 + 6x - 3$ d) $y = -x^2 + 5$

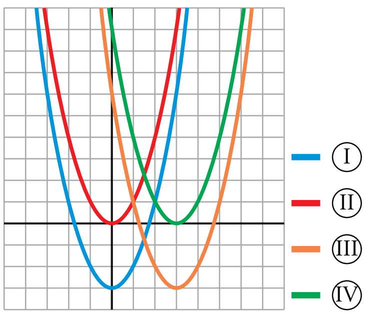
9 ▼▽▽ Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de estas parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = 3 - x^2$

c) $y = -2x^2 - 4x + 6$ d) $y = 3x^2 - 6x$

Representa cada una de esas parábolas.

10 ▼▽▽ Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:



a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$

Otras funciones

11 ▼▽▽ Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:

a) $y = \dfrac{3}{x}$ $\quad x = -3;\ -1;\ -1/2;\ 1/2;\ 1;\ 3$

b) $y = -\dfrac{3}{x}$ $\quad x = -3;\ -1;\ -1/2;\ 1/2;\ 1;\ 3$

c) $y = \dfrac{1}{x-2}$ $\quad x = -2;\ 0;\ 1;\ 3/2;\ 3;\ 4$

d) $y = -\dfrac{1}{x+1}$ $\quad x = -3;\ -2;\ -3/2;\ -1/2;\ 0;\ 1$

12 ▼▽▽ Representa las funciones siguientes:

a) $y = \sqrt{x} + 2$ $\qquad$ b) $y = 2 - \sqrt{x}$

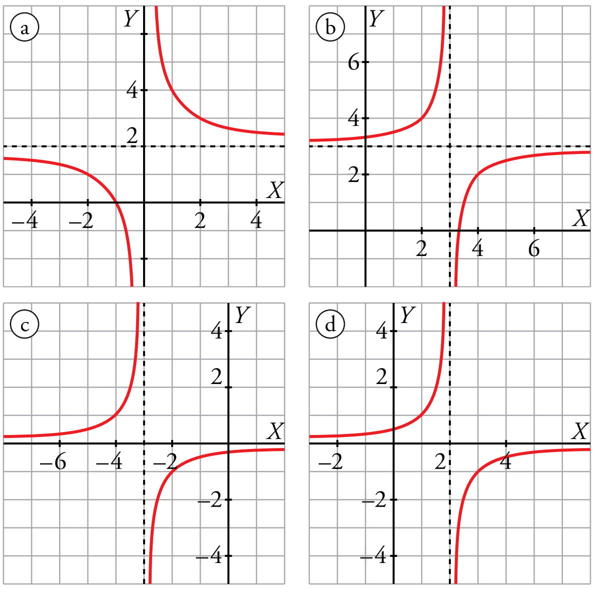
c) $y = \sqrt{3 - x}$ $\qquad$ d) $y = 2\sqrt{x + 2}$

13 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones dando a x valores comprendidos entre –4 y 4:

a) $y = 1{,}4^x$ $\qquad$ b) $y = 0{,}75^x$

c) $y = 2^x - 1$ $\qquad$ d) $y = 0{,}5^x + 2$

14 ▼▽▽ Asocia a cada gráfica una de las fórmulas que aparecen debajo:



I) $y = \dfrac{1}{2 - x}$ $\qquad$ II) $y = 3 - \dfrac{1}{x - 3}$

III) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$ $\qquad$ IV) $y = \dfrac{-1}{x + 3}$

Resuelve problemas

15 ▼▽▽ Disponemos de 40 cm de cuerda con los que podemos construir cuadrados.

a) Escribe la ecuación de la función que nos da el *perímetro* de un cuadrado construido con parte de esa cuerda o con toda ella, en función de su *lado*.

b) Halla el dominino de definición de la función.

c) Representa la función.

16 ▼▼▽ Ana corre una carrera popular de 10 km a una velocidad constante de 12 km/h. El pequeño David, que corre a 6 km/h, solo quiere hacer los últimos 5 km y llegar a la meta con Ana, así que sale desde el kilómetro 5. Los dos comienzan a correr a las 10:00 h de la mañana.

a) ¿A qué hora estará Ana en el punto desde el que salió David? ¿A qué distancia de la salida estará David en ese momento?

b) Dibuja, en los mismos ejes coordenados, la gráfica de cada recorrido.

17 ▼▼▽ Observa los datos de esta tabla:

ALTURA (m)	0	360	720	990
TEMPERATURA (°C)	10	8	6	4,5

a) Representa los puntos en una gráfica.

b) Suponiendo que se sigue la misma pauta, halla la expresión analítica de la función *altura-temperatura*.

c) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0 °C?

18 ▼▼▽ Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

19 ▼▼▼ Un ciclista sale de excursión a un lugar que dista 20 km de su casa. A los 15 minutos de la salida, cuando se encuentra a 6 km, hace una parada de 10 minutos. Reanuda la marcha y llega a su destino una hora después de haber salido.

a) Representa la gráfica *tiempo-distancia a su casa*.

b) ¿Lleva la misma velocidad antes y después de la parada? (Suponemos que en cada etapa la velocidad es constante).

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

20 ▼▽▽ ¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el área de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? Haz su representación gráfica.

21 ▼▼▽ La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s viene dada por: $h = 20t - 5t^2$

a) Representa gráficamente la función.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

22 ▼▼▽ En el contrato de alquiler de un apartamento figura que el precio subirá un 5% anual.

a) Si el precio es de 450 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

b) Escribe la función que da el precio del alquiler según los años transcurridos.

23 ▼▼▽ Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual.

a) ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?

b) Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos.

c) Calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

Autoevaluación

¿Manejas con destreza las funciones lineales?

1 Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:

a) Pasa por el punto (1, –2) y tiene pendiente 3/2.

b) Pasa por los puntos (–2, –5) y (1, 1).

2 Estas son las tarifas de dos compañías telefónicas:

A: 0,30 € por establecimiento de llamada y 0,20 €/min	B: 0,22 €/min

a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 5 minutos en cada compañía? ¿Y de 15 min? ¿Y de 20 min?

b) Haz, para cada una de las dos compañías, la gráfica de la función que nos da el precio de la llamada dependiendo del tiempo que dure.

¿Conoces familias de funciones (cuadráticas, de proporcionalidad inversa, radicales, exponenciales) y las representas a partir de sus ecuaciones, y viceversa?

3 Representa las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 4$

b) $y = x^2 + 4x - 5$

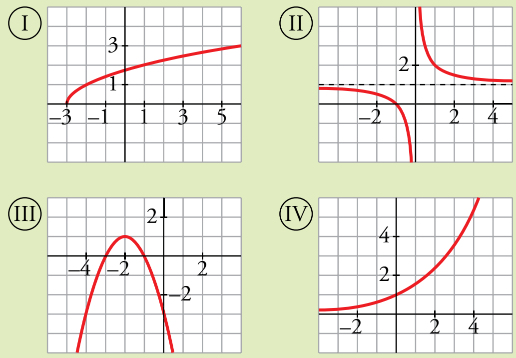
c) $y = \dfrac{-1}{x}$

d) $y = \dfrac{1}{x - 3}$

e) $y = \sqrt{-x + 2}$

f) $y = 2^x - 3$

4 Asocia a cada una de las gráficas una ecuación:



a) $y = -x^2 - 4x - 3$

b) $y = 1{,}5^x$

c) $y = \dfrac{1}{x} + 1$

d) $y = \sqrt{x + 3}$

¿Asocias una situación real con algún modelo de función y te basas en él para interpretarla?

5 En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 10% anual. Su sueldo inicial es de 24 000 € anuales.

a) ¿Cuánto ganará dentro de 10 años?

b) Escribe la función que relaciona el dinero que gana con el número de años transcurridos.

6 La semejanza. Aplicaciones

El estudio teórico de la semejanza se suele basar en el teorema de Tales. Recordemos quién fue este personaje.

Tales nació en Mileto (actualmente, en la costa occidental de Turquía), aproximadamente, en el año 640 a.C. Murió con más de 90 años.

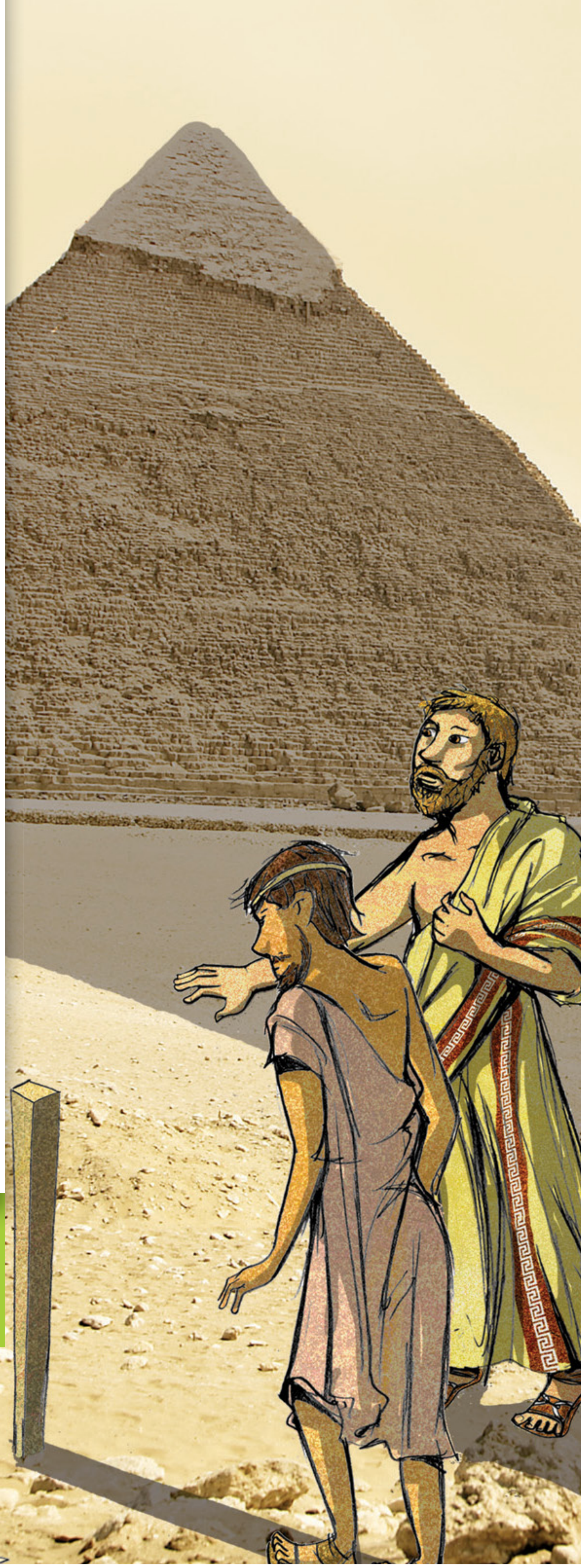
Visitó Egipto y, posiblemente, Babilonia, y aprendió la ciencia práctica acumulada durante siglos por estas civilizaciones. Aportó estos conocimientos, seguramente muy elaborados, al mundo griego.

Fue el primero que exigió que las afirmaciones matemáticas y de otras ciencias fueran avaladas por razonamientos bien fundamentados. Por eso, se le considera el fundador de la ciencia griega.

Muy admirado en su época y en siglos posteriores, se le dio el rango del primero de "los siete sabios de Grecia". Esta gran admiración de la que fue objeto hizo que se le mitificara y se le atribuyeran méritos que realmente no eran suyos. Por ejemplo, la predicción de un eclipse. Y la paternidad del teorema que lleva su nombre.

Parece cierto que en Egipto midió la altura de una pirámide comparando su sombra con la que arrojaba, en el mismo instante, una vara vertical. Pero esta aplicación práctica de la semejanza no significa que diera forma al enunciado del teorema, ni mucho menos que lo demostrara.

Ambos logros, junto con una adecuada fundamentación y su desarrollo teórico de la semejanza, hay que atribuírselos a Euclides, dos siglos y medio posterior.



DEBERÁS RECORDAR

- Qué representan los planos, las maquetas y los mapas. Cómo se interpretan. Para qué sirven.

1 Semejanza

Dos figuras semejantes tienen la *misma forma*. ¿Cómo se manifiesta matemáticamente esta apariencia?

— Los ángulos correspondientes en figuras semejantes son iguales.

— Las longitudes de los segmentos correspondientes en figuras semejantes son proporcionales. La razón de proporcionalidad se llama **razón de semejanza.**

Figuras semejantes en la vida corriente

Estamos rodeados de reproducciones:

— Fotografías, vídeos, películas en pantallas de distintos tamaños…

— Maquetas de monumentos o de urbanizaciones, copias de cuadros famosos, reproducciones de coches…

— Planos de edificios o de ciudades, mapas…

Las primeras pretenden, exclusivamente, transmitir unas características que se conservan con la semejanza: la imagen, la forma, el color, la belleza del original.

Con los planos y los mapas pretendemos más: queremos que además de apreciar la forma, se puedan obtener con precisión medidas, distancias. Por ello, van acompañados de una **escala** con la que se pueden obtener magnitudes de la realidad midiendo sobre su reproducción (plano o mapa).

Escala es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es, por tanto, la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Una escala 1:200 significa, como ya sabes, que 1 cm del plano corresponde a 200 cm = 2 m de la realidad.

La expresión 1:200 puede ponerse así: $\frac{1}{200}$, con lo que se muestra la razón de semejanza entre las dos figuras.

Relación entre las áreas y entre los volúmenes

Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes es k^3.

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

Si una maqueta está a escala 1:200, la razón entre la superficie de una parcela y la de su representación es $200^2 = 40\,000$. Y la razón entre el volumen de un edificio y el de su representación en la maqueta es $200^3 = 8\,000\,000$.

Entrénate

1 Una parcela con forma de cuadrilátero irregular tiene 820 m^2 de área y su lado menor mide 40 m. Hacemos un plano de la parcela en el que el lado menor mide 16 cm. ¿Cuál será el área de la parcela en el plano?

2 La razón entre las áreas de dos rectángulos semejantes es 9/16. Si el perímetro del menor es 138 m, ¿cuál será el perímetro del mayor?

3 Queremos hacer una maqueta a escala 1:25 de un barco que mide 9 m de largo. La superficie de la cubierta es de 21 m^2 y el volumen del casco es 31,5 m^3. ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

4 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 12 cm y 16 cm. ¿Cuál será el área de otro semejante cuya hipotenusa mide 85 cm?

5 Las áreas de los círculos máximos de dos esferas son 100π cm^2 y 16π cm^2. ¿Cuál será la razón entre su radios? ¿Y la razón entre los volúmenes de las dos esferas?

Ejercicio resuelto

El dibujo adjunto representa la maqueta de una urbanización a escala 1:500.

Sobre la maqueta se han tomado las siguientes medidas:

POLIDEPORTIVO $\begin{cases}\textbf{largo = 30 cm}\\ \textbf{ancho = 18 cm}\end{cases}$

DEPÓSITO CILÍNDRICO $\begin{cases}\textbf{diámetro = 6 cm}\\ \textbf{altura = 10 cm}\end{cases}$

CARPA: **diámetro = 16 cm**

Para construir la carpa de la maqueta se han necesitado 402 cm^2 de tela.

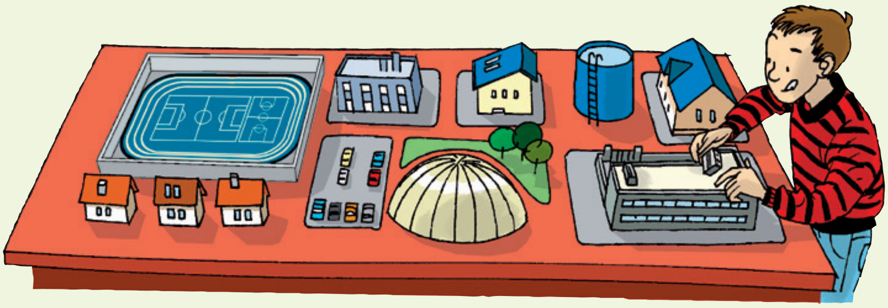
En el depósito de la maqueta caben 283 cm^3 de arena.

Hallar:

a) La superficie total del polideportivo.

b) El volumen del depósito.

c) La superficie y el volumen de la carpa, en la realidad.



Dimensiones en la realidad:

POLIDEPORTIVO $\begin{cases}\text{Largo} = 30 \text{ cm} \times 500 = 15\,000 \text{ cm} = 150 \text{ m}\\ \text{Ancho} = 18 \text{ cm} \times 500 = 9\,000 \text{ cm} = 90 \text{ m}\end{cases}$

DEPÓSITO $\begin{cases}\text{Radio} = 3 \text{ cm} \times 500 = 1\,500 \text{ cm} = 15 \text{ m}\\ \text{Altura} = 10 \text{ cm} \times 500 = 5\,000 \text{ cm} = 50 \text{ m}\end{cases}$

CARPA: Radio = 8 cm × 500 = 4 000 cm = 40 m

a) Superficie del polideportivo = 150 m × 90 m = 13 500 m^2

b) Volumen del depósito = $\pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 50 = 35\,342{,}9 \text{ m}^3$

También se puede calcular a partir del volumen del depósito en la maqueta:

$$V_{\text{depósito real}} = V_{\text{depósito maqueta}} \cdot 500^3 = 283 \text{ cm}^3 \cdot 500^3 =$$
$$= 35\,375\,000\,000 \text{ cm}^3 = 35\,375 \text{ m}^3$$

c) Superficie de la carpa = $\frac{1}{2} 4\pi r^2 = 2\pi \cdot 40^2 = 10\,053{,}1 \text{ m}^2$

También se puede calcular a partir de la superficie en la maqueta:

$$S_{\text{carpa real}} = S_{\text{carpa maqueta}} \cdot 500^2 = 402 \text{ cm}^2 \cdot 500^2 =$$
$$= 100\,500\,000 \text{ cm}^2 = 10\,050 \text{ m}^2$$

Volumen de la carpa = $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi 40^3 = 134\,041{,}3 \text{ m}^3$

Actividades

1 a) Un edificio de la maqueta anterior tiene forma de ortoedro. Sus dimensiones son 9 cm × 6,4 cm de planta y 4 cm de altura. Halla las dimensiones, el área de la fachada y el volumen en la realidad.

b) La superficie de un campo de fútbol sala en la maqueta es de 32 cm^2. ¿Cuál es la superficie en la realidad?

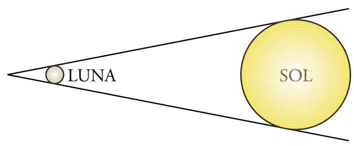
c) Una caseta de la maqueta está hecha con 0,3 cm^3 de poliexpán. ¿Cuál es su verdadero volumen?

d) La altura de un edificio en la realidad es 65 m. ¿Cuál es su altura en la maqueta?

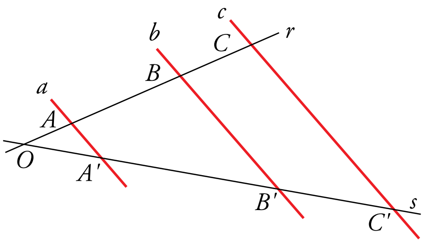
2 La Luna está a 384 000 km de nosotros y su diámetro es 3 500 km.

a) Calcula su superficie y su volumen.

b) El Sol está a 150 000 000 km de nosotros. Y su tamaño aparente es igual que el de la Luna. Según esto, halla el diámetro del Sol. Halla también su superficie y su volumen a partir de las correspondientes magnitudes de la Luna.



2 Semejanza de triángulos



Teorema de Tales

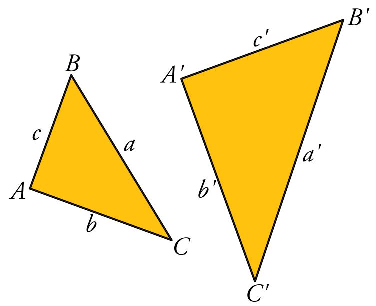
Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \qquad \text{Como consecuencia, se verifica: } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

También ocurre lo recíproco: si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ y las rectas a y b son paralelas, entonces la recta c es paralela a ellas.

El teorema de Tales sirve para estudiar la semejanza de triángulos.

Triángulos semejantes



Dos **triángulos semejantes** tienen:

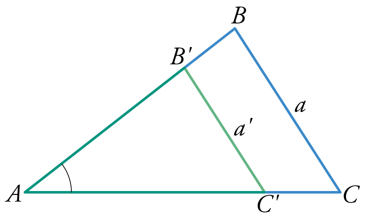
- Sus lados proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \text{razón de semejanza}$$

- Sus ángulos, respectivamente iguales:

$$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}'$$

Triángulos en posición de Tales



Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande.

Además, los lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos.

Decimos que esos dos triángulos están en **posición de Tales.**

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

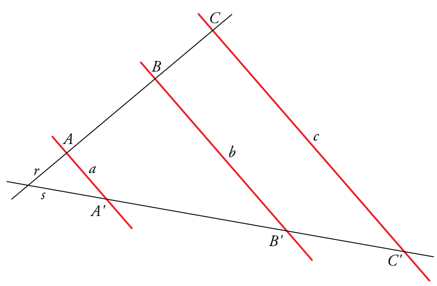
Actividades

1 Las medidas de este dibujo son:

$\overline{AB} = 2{,}3$ cm

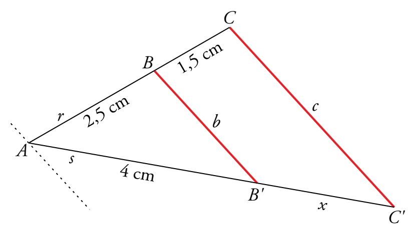
$\overline{BC} = 1{,}5$ cm

$\overline{B'C'} = 2{,}4$ cm



Aplica el teorema de Tales y calcula la longitud de $A'B'$.

2 Para aplicar el teorema de Tales, trazamos por A una recta paralela a b y a c:



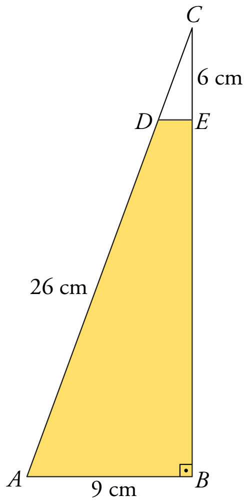
Calcula x.

3 La semejanza en los triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son particularmente importantes, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por eso les vamos a dedicar una atención especial. Empecemos por estudiar un criterio de semejanza muy fácil de aplicar.

Entrénate

En el triángulo rectángulo ABC conocemos $\overline{AB} = 9$ cm y $\overline{AC} = 26$ cm. A 6 cm del vértice C cortamos el triángulo CDE de forma que DE sea paralela a AB. Halla el área del trapecio $ADEB$.

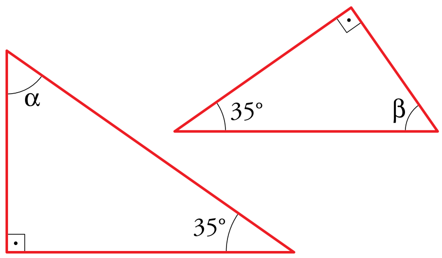


Criterio de semejanza de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.

Esto es así, pues con ese ángulo y el ángulo recto ya son dos los ángulos iguales y, por tanto, también será igual el tercero.

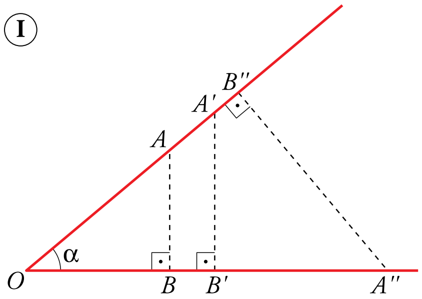
Por ejemplo:



$$\left.\begin{array}{l} 90° + 35° + \alpha = 180° \\ 90° + 35° + \beta = 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \beta$$

Consecuencias del criterio de semejanza anterior

Todos los triángulos obtenidos al trazar perpendiculares a alguno de los lados de un ángulo son semejantes.

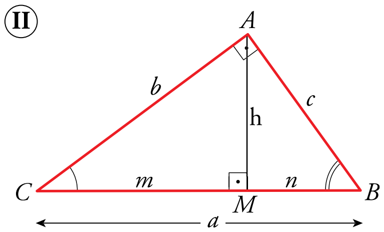


Todos esos triángulos $(ABO, A'B'O, A''B''O)$ son semejantes por tener el ángulo α común.

Por tanto, sabemos, sin más comprobación (por el criterio anterior), que sus lados son proporcionales.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OA''}}{\overline{OB''}} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{OB''}}$$

En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa determina dos triángulos semejantes al original.



En la figura II encontramos tres triángulos rectángulos: ABC, AMB y AMC.

— ABC y AMB son semejantes por compartir el ángulo $\hat{B}$.

— ABC y AMC son semejantes por compartir el ángulo $\hat{C}$.

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones del criterio de semejanza en triángulos rectángulos.

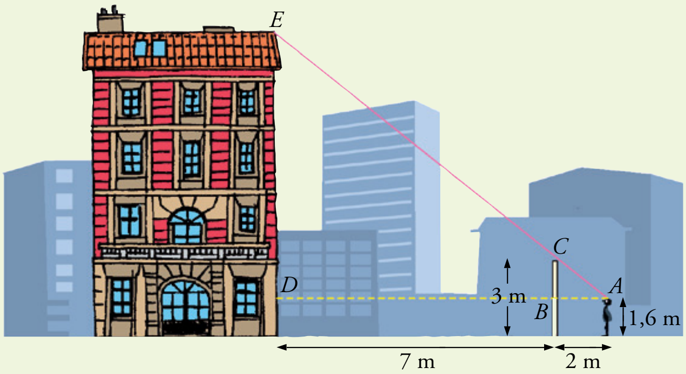
Problemas resueltos

1. Para medir la altura de un edificio, Miguel se sitúa de modo que ve alineados la parte alta de la verja y la del edificio. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.

a) Explicar por qué los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes.

b) Calcular *ED* y la altura del edificio.

1.



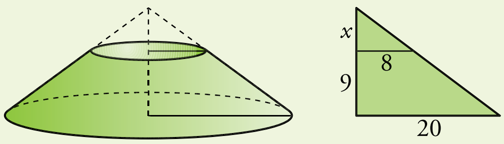
a) Los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo igual, $\hat{A}$.

b) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \rightarrow \dfrac{\overline{ED}}{3 - 1{,}6} = \dfrac{2 + 7}{2} \rightarrow \overline{ED} = \dfrac{9 \cdot 1{,}4}{2} = 6{,}3 \text{ m}$

La altura del edificio es 6,3 + 1,6 = 7,9 m.

2. Hallar el volumen de un tronco de cono de 9 cm de altura sabiendo que los radios de sus bases miden 20 cm y 8 cm.

2.



Ampliamos el tronco hasta completar un cono. Llamamos x al incremento de la altura. Tenemos en cuenta la semejanza de los dos triángulos: el pequeño, de catetos 8 y x; y el grande, de catetos 20 y $x + 9$:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+9}{20} \rightarrow 20x = 8x + 72 \rightarrow 12x = 72 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

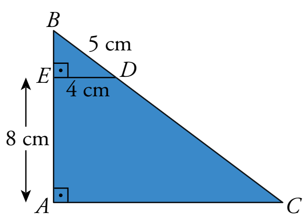
El volumen del tronco de cono es la diferencia de volúmenes de dos conos:

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot (9 + 6) - \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi(6\,000 - 384) = 5\,881{,}06 \text{ cm}^3$$

Actividades

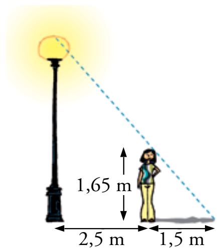
1 Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 7,22 m en el momento en que un poste de 1,60 m da una sombra de 67 cm.

2 Halla los lados del triángulo *ABC*.



3 En el mismo instante y lugar de la actividad 4, ¿qué longitud tendrá la sombra de un edificio que mide 32 m de altura?

4 Si la altura de Rita es 1,65 m, ¿cuál es la altura de la farola?

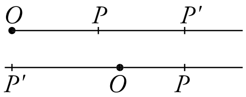


4 Homotecia y semejanza

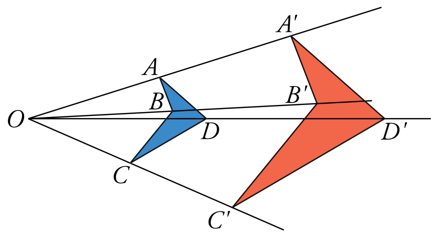
Definición

Se llama homotecia de centro O y razón k a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro P' tal que:

- O, P y P' están alineados.
- $\overline{OP'} : \overline{OP} = k$
- $\begin{cases} \text{Si } k > 0, \\ \text{Si } k < 0, \end{cases}$



Dos figuras homotéticas son semejantes de razón $|k|$.



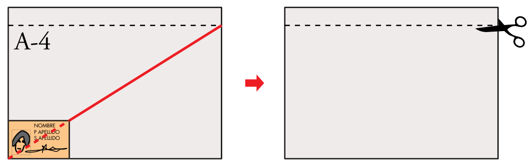
Cada punto de la figura azul (por ejemplo, el A) se ha transformado en un punto de la roja (A') que cumple las condiciones:

- O, A y A' están alineados.
- $\overline{OA'} = 2 \cdot \overline{OA}$

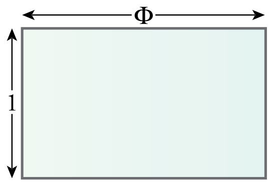
Es una **homotecia** de centro O y razón 2.

La homotecia es una transformación que produce figuras semejantes. La razón de semejanza es igual a la razón de homotecia. Si dos figuras son homotéticas, sus segmentos correspondientes son paralelos.

Observa cómo se aplica la homotecia para construir un rectángulo áureo a partir de una hoja A-4, teniendo en cuenta que el D.N.I. es un rectángulo áureo.

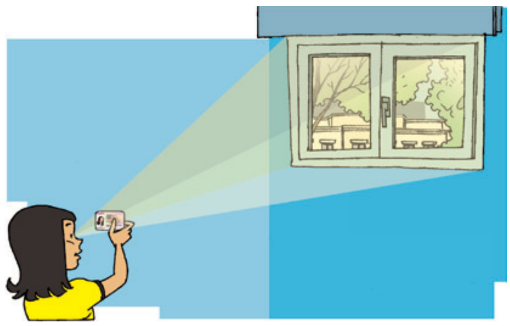


Recuerda que un rectángulo se llama áureo si su lado mayor se obtiene multiplicando el menor por Φ. El número $\Phi = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$ se llama número áureo.



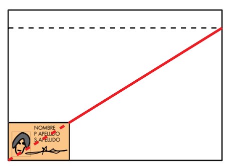
En el dibujo de la izquierda se ve cómo un chico ayuda a una chica a "tapar" la luna con una moneda. En esa situación, la moneda y el disco de la Luna son figuras homotéticas. Es una homotecia en el espacio, pues los discos están en planos distintos. El centro de la homotecia es el ojo de la chica.

Observa cómo utiliza la chica de la derecha este mismo procedimiento para comprobar si "aquella ventana que ve allí enfrente" es un rectángulo áureo: la compara con su D.N.I., mediante una homotecia con centro en su ojo.



Actividades

1 En el procedimiento descrito arriba para obtener una hoja de papel con dimensiones áureas a partir de una A-4 y con la ayuda del D.N.I., se aplica una homotecia. ¿Cuál es su centro? ¿Y su razón?



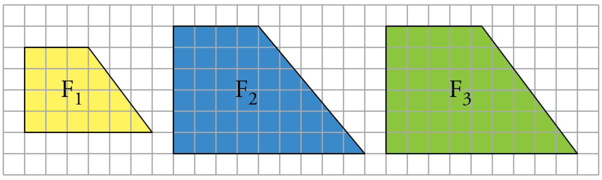
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

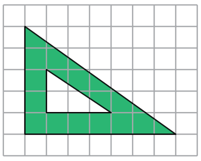
Practica

Figuras semejantes

1 ▼▽▽ ¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?



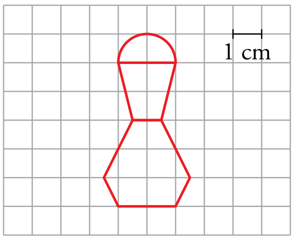
2 ▼▽▽ a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?



b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?

3 ▼▽▽ Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.

4 ▼▽▽ Un joyero quiere reproducir un broche como el de la figura duplicando su tamaño.



a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

b) Calcula su superficie.

5 ▼▽▽ Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?

6 ▼▼▽ Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm^2.

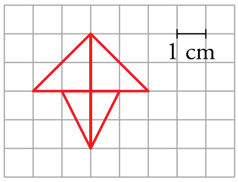
c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm^3 de agua.

7 ▼▽▽ En un mapa de escala 1:1 500 000, la distancia entre dos poblaciones es de 2 cm.

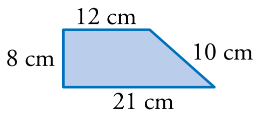
a) ¿Cuál es la distancia real?

b) ¿Qué distancia habrá en el plano entre dos ciudades que distan 180 km?

8 ▼▼▽ Esta figura es el logotipo de una empresa automovilística. Quieren reproducirlo de forma que ocupe 54 cm^2 de superficie. ¿Cuáles serán sus dimensiones? Dibújalo.

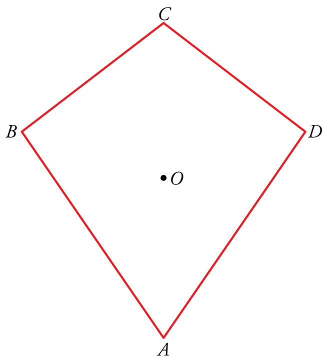


9 ▼▼▽ ¿Cuánto medirán los lados de un trapecio semejante al de la figura, cuyo perímetro sea 163,2 cm?

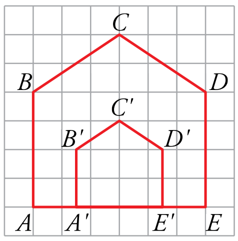


10 ▼▼▽ a) Copia esta figura en tu cuaderno y amplíala al doble tomando O como centro de homotecia.

b) Redúcela a 1/3 tomando A como centro de homotecia.



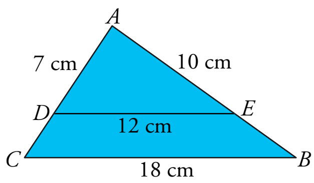
11 ▼▼▽ Halla el centro y la razón de homotecia que transforma la figura $ABCDE$ en $A'B'C'D'E'$.



Semejanza de triángulos

12 ▼▽▽ El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre el triángulo mayor y el menor?

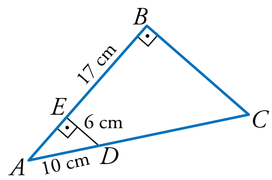
13 ▼▽▽ En el triángulo *ABC* hemos trazado *DE* paralelo a *CB*.



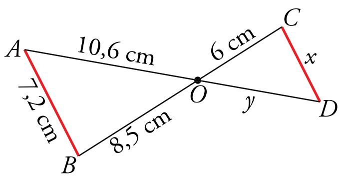
¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *ADE*? Calcula $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

14 ▼▽▽ ¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *AED*?

Halla el perímetro del trapecio *EBCD*.



15 ▼▽▽ Observa esta figura, en la que el segmento *AB* es paralelo a *CD*.



a) Di por qué son semejantes los triángulos *OAB* y *ODC*.

b) Calcula x e y.

16 ▼▽▽ En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm.

17 ▼▽▽ La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm^2, ¿cuál es el área del menor?

18 ▼▽▽ El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m. Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

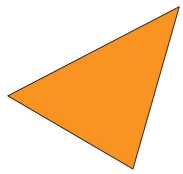
Aplica lo aprendido

19 ▼▽▽ En una carretera de montaña, nos encontramos una señal que nos advierte que la pendiente es del 8%; es decir, por cada 100 m que recorremos, el desnivel es de 8 m.

a) ¿Cuál es el desnivel que se produce cuando recorremos 3 km?

b) Para que el desnivel sea de 500 m, ¿cuántos kilómetros tendremos que recorrer?

20 ▼▼▽ Esta figura representa, a escala 1:2 000, una parcela de terreno. Calcula su perímetro y su área, tomando las medidas necesarias.

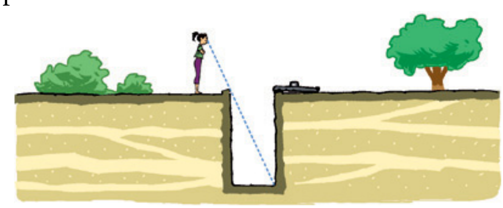


21 ▼▼▽ Dos triángulos *ABC* y *PQR* son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

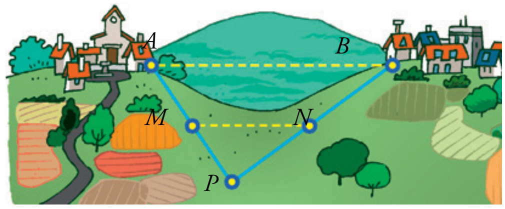
22 ▼▼▽ Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del menor es 26 cm^2, ¿cuál es el área del mayor?

Resuelve problemas

23 ▼▼▼ ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



24 ▼▼▽ Entre dos pueblos *A* y *B* hay una colina. Para medir la distancia $\overline{AB}$, fijamos un punto *P* desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas:

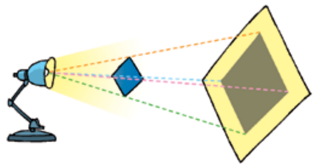


$\overline{AP}$ = 15 km, $\overline{PM}$ = 7,2 km y $\overline{MN}$ = 12 km. (*MN* es paralela a *AB*). Calcula la distancia $\overline{AB}$.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

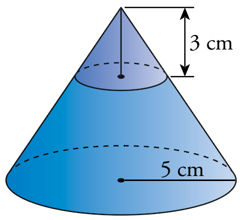
25 ▼▼▽ Una lámpara situada a 25 cm de una lámina cuadrada de 20 cm de lado, proyecta una sombra sobre una pantalla paralela que está a 1,5 m de la lámpara.



¿Cuánto mide el lado del cuadrado proyectado?

26 ▼▽▽ Queremos construir un ortoedro de volumen 36 015 cm^3 que sea semejante a otro de dimensiones 25 × 15 × 35 cm. ¿Cuánto medirán sus aristas?

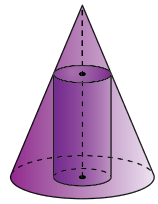
27 ▼▼▽ Para hacer un embudo de boca ancha, hemos cortado un cono de 5 cm de radio a 3 cm del vértice.



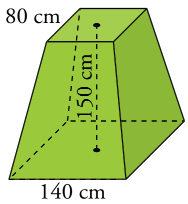
La circunferencia obtenida tiene 2 cm de radio.

Halla el volumen del embudo.

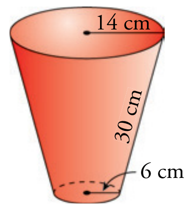
28 ▼▼▽ Hemos recubierto con un tejado cónico un depósito cilíndrico de 4 m de radio y 14,4 m de altura. Si el radio del cono es 10 m, ¿cuál es el volumen de la zona comprendida entre el cono y el cilindro?



29 ▼▼▽ La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su volumen.



30 ▼▼▽ Halla el volumen de una maceta como la de la figura, en la que los radios de las bases miden 6 cm y 14 cm, y la generatriz, 30 cm.



Autoevaluación

¿Manejas la semejanza de figuras para obtener medidas de una a partir de la otra?

1 Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m^2. ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

¿Conoces las condiciones que se deben comprobar para asegurar que dos triángulos son semejantes?

2 Comprueba si son semejantes dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* que cumplen las condiciones siguientes:

a) $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 18$; $\overline{CA} = 12$

$\overline{A'B'} = 25$; $\overline{B'C'} = 45$; $\overline{C'A'} = 30$

b) $\overline{AB} = 20$; $\overline{BC} = 30$; $\overline{CA} = 40$

$\overline{A'B'} = 40$; $\overline{B'C'} = 50$; $\overline{C'A'} = 60$

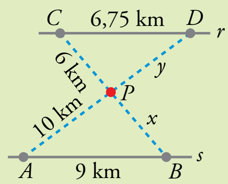
c) $\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97°$

$\hat{A}' = 58°$; $\hat{C}' = 35°$

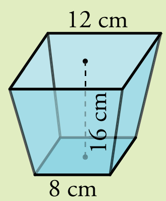
¿Utilizas con soltura la semejanza para resolver problemas?

3 Álvaro debe situarse a 3 m de un charco para ver la copa de un árbol reflejada en él. Si la distancia del charco al árbol es de 10,5 m y la estatura de Álvaro es de 1,72 m, ¿cuál es la altura del árbol?

4 Un centro comercial *P* está situado entre dos vías paralelas *r* y *s*. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones *A*, *B*, *C* y *D*. Con los datos de la figura, calcula *x* e *y*.



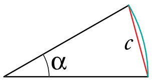
5 Un florero tiene forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de 8 cm y 12 cm de lado, y altura 16 cm. Calcula su volumen.



7 Trigonometría

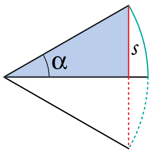
Hace más de 3 000 años, babilonios y egipcios utilizaron la semejanza y rudimentos de trigonometría para medir campos, realizar construcciones, e incluso para la astronomía y la navegación… Estos conocimientos pasaron a Grecia, donde cabe destacar a dos grandes astrónomos (pues trigonometría y astronomía van de la mano):

Hiparco de Nicea (180-125 a.C.), considerado el "padre de la astronomía", consolidó el sistema sexagesimal para la medida de ángulos. Teniendo en cuenta que la esencia de la trigonometría es sustituir medidas angulares por medidas lineales, elaboró unas tablas en las que asociaba la medida de cada ángulo con la longitud de la cuerda correspondiente.



Ptolomeo de Alejandría (85-165) amplió y mejoró la obra de Hiparco y escribió un enorme tratado de astronomía de trece libros, al que se acabó llamando el *Almagesto, (el más grande)*.

Los indios, durante los siglos IV y V, desarrollaron una trigonometría con un enfoque distinto al de los griegos: asociaron a cada ángulo la longitud de la semicuerda del ángulo doble (lo que posteriormente se llamaría *seno* del ángulo), consiguiendo así trabajar con triángulos rectángulos, más fáciles de manejar.



Los árabes (siglos IX-X) se inspiraron en el *Almagesto* de Ptolomeo pero utilizaron las tablas de los senos de los indios, las ampliaron con otras medidas y las mejoraron. Su trigonometría, bien fundamentada y muy práctica, se extendió por Europa a partir del siglo XII.

DEBERÁS RECORDAR

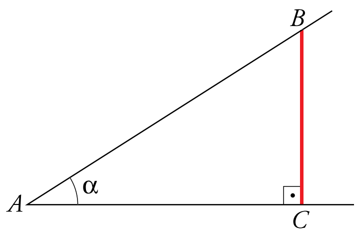
- Cuándo son semejantes dos triángulos rectángulos.
- Cómo utilizar las sombras para medir ciertas longitudes inaccesibles.

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Vamos a estudiar todas las posibles razones entre dos de los lados de un triángulo rectángulo.

Recuerda

Razón. Se llama razón entre dos números a su cociente.



Para designar ángulos, se suelen utilizar letras griegas como:

α	alfa
β	beta
γ	gamma
ϕ	fi

Definiciones

Sobre un ángulo agudo, α, construimos un triángulo rectángulo, ABC. Damos las siguientes definiciones con sus correspondientes abreviaturas:

seno de $\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$ $\qquad$ $sen\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

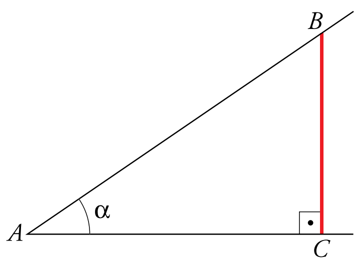
coseno de $\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$ $\qquad$ $cos\ \alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

tangente de $\alpha = \dfrac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}$ $\qquad$ $tg\ \alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

Estas relaciones se llaman **razones trigonométricas** del ángulo α.

Cálculo gráfico (aproximado) de las razones trigonométricas de un ángulo

La propia definición nos proporciona un método para calcular las razones trigonométricas de un ángulo agudo:



Se dibuja el ángulo. Desde un punto, B, de uno de los lados se traza una perpendicular al otro lado. De este modo se forma un triángulo rectángulo ABC. Se miden los lados:

$$\overline{AC} = 41 \text{ mm}, \quad \overline{BC} = 28 \text{ mm}, \quad \overline{AB} = 50 \text{ mm}$$

Ahora, con estos datos, calculamos las razones trigonométricas:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{28}{50} = 0{,}56 \qquad cos\ \alpha = \frac{41}{50} = 0{,}82 \qquad tg\ \alpha = \frac{28}{41} = 0{,}68$$

Podríamos medir el ángulo con el transportador. Obtendríamos $\alpha = 34°$. Por tanto:

$$sen\ 34° = 0{,}56 \qquad cos\ 34° = 0{,}82 \qquad tg\ 34° = 0{,}68$$

Las medidas efectuadas son aproximadas. Por tanto, las relaciones finales también lo son.

No lo olvides

Las razones trigonométricas dependen del ángulo pero no del triángulo.

Actividades

1 Dibuja sobre un ángulo como el anterior, 34°, un triánguo rectángulo mucho más grande. Halla sus razones trigonométricas y observa que obtienes, aproximadamente, los mismos valores.

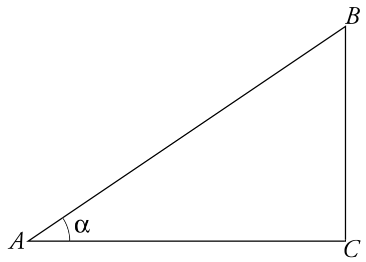
2 Relaciones trigonométricas fundamentales

Notación

En lugar de $(sen\ \alpha)^2$ se suele poner $sen^2\ \alpha$. Del mismo modo:

$(cos\ \alpha)^2 = cos^2\ \alpha$ y $(tg\ \alpha)^2 = tg^2\ \alpha$

A pesar de la costumbre, y para evitar confusiones, utilizaremos durante este curso la expresión con paréntesis.



Los valores de *sen*, *cos* y *tg* de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionados, de tal modo que *conociendo uno de ellos, podemos calcular los otros dos*. Las relaciones que los ligan son las siguientes (se las suele llamar **relaciones fundamentales**):

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1 \quad [I] \qquad \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha \quad [II]$$

Estas igualdades son fáciles de demostrar:

[I] $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = 1$

pues por el teorema de Pitágoras se cumple que $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$.

[II] $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = tg\ \alpha$

En los siguientes ejercicios resueltos vemos cómo, conocida una razón trigonométrica de un ángulo, se pueden calcular las otras dos.

Ejercicios resueltos

1. Sabiendo que $cos\ \alpha = 0{,}63$, calcular $s = sen\ \alpha$ y $t = tg\ \alpha$.

Mediante la igualdad I, conocido $sen\ \alpha$ obtenemos $cos\ \alpha$, y viceversa.

$$s^2 + 0{,}63^2 = 1 \rightarrow s^2 = 1 - 0{,}63^2 = 0{,}6031 \rightarrow s = \sqrt{0{,}6031} = 0{,}777$$

(Solo tomamos la raíz positiva, porque $sen\ \alpha$ ha de ser positivo).

$t = \frac{0{,}777}{0{,}63} = 1{,}23$ *Solución:* $sen\ \alpha = 0{,}777$ $tg\ \alpha = 1{,}23$

2. Sabiendo que $tg\ \alpha = 2$, calcular $s = sen\ \alpha$ y $c = cos\ \alpha$.

Mediante las igualdades I y II, conocida $tg\ \alpha$ se obtienen, resolviendo un sistema de ecuaciones, los valores de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{s}{c} = 2 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 2c \\ (2c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 4c^2 + c^2 = 1 \rightarrow 5c^2 = 1 \end{array}$$

$$c^2 = \frac{1}{5} \xrightarrow[\text{la raíz positiva}]{\text{solo tomamos}} c = \frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{racionalizando}} c = \frac{\sqrt{5}}{5};\ s = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

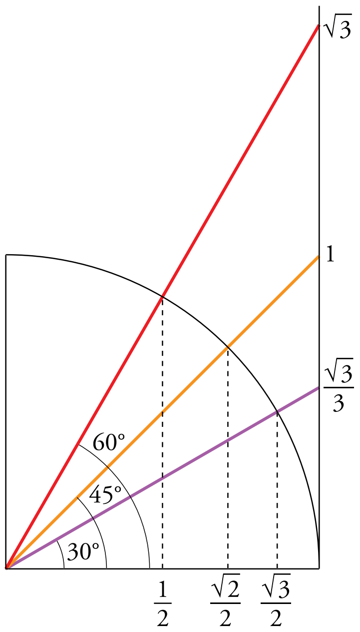
Solución: $sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}894$ $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}447$

Actividades

1 $sen\ 37° = 0{,}6$. Calcula $cos\ 37°$ y $tg\ 37°$.

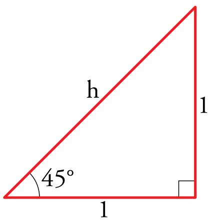
2 $tg\ 28° = 0{,}53$. Calcula $sen\ 28°$ y $cos\ 28°$.

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°



Los triángulos rectángulos cuyos ángulos agudos son 45°, 30° o 60° aparecen con mucha frecuencia, por lo que resultan especialmente interesantes en geometría. Vamos a hallar las razones trigonométricas de estos ángulos.

Razones trigonométricas de 45°

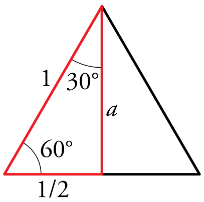


La hipotenusa de este triángulo rectángulo isósceles mide:

$h = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por tanto:

$$sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad tg\ 45° = 1$$

Razones trigonométricas de 30° y de 60°



Calculamos la altura de este triángulo equilátero:

$$a = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

	sen	*cos*	*tg*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Por tanto:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}\qquad cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\qquad tg\ 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\qquad cos\ 60° = \frac{1}{2}\qquad tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Actividades

3 Teniendo en cuenta que $tg\ 45° = 1$, deduce el valor de $sen\ 45°$ y de $cos\ 45°$ mediante las relaciones fundamentales.

4 Teniendo en cuenta que $sen\ 30° = 1/2$, halla el valor de $cos\ 30°$ y de $tg\ 30°$ mediante las relaciones fundamentales.

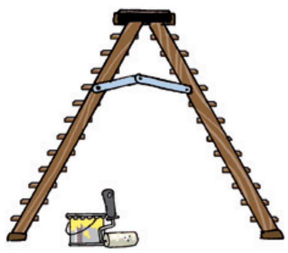
5 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

sen α	0,94		4/5			
cos α		0,82			$\sqrt{3}/2$	
tg α				3,5		1

En las operaciones donde aparezcan radicales, trabaja con ellos; no utilices su expresión decimal.

6 Un carpintero quiere construir una escalera de tijera, cuyos brazos, una vez abiertos, formen un ángulo de 60°.

Para que la altura de la escalera, estando abierta, sea de 2 metros, ¿qué longitud deberá tener cada brazo?



7 Calcula el seno y la tangente de un ángulo cuyo coseno vale 0,8.

8 Calcula el seno y el coseno de un ángulo cuya tangente vale 0,7.

3 Utilización de la calculadora en trigonometría

Teclas trigonométricas

Para el cálculo y el manejo de las razones trigonométricas, hasta ahora solo hemos utilizado las operaciones aritméticas de la calculadora: [+] [−] [×] [÷] y [√].

En este apartado vamos a aprender a manejar las teclas específicamente trigonométricas.

Las calculadoras científicas nos dan directamente el valor del seno, del coseno o de la tangente de cualquier ángulo. También nos dicen cuál es el ángulo del que conocemos el valor de una de sus razones trigonométricas.

Veamos, paso a paso, cómo se recurre a la calculadora para trabajar en trigonometría.

Selección del modo DEG (grados sexagesimales)

Las calculadoras manejan tres unidades de medida de ángulos:

- Grados sexagesimales (DEG). Son los que utilizamos normalmente.
- Grados centesimales (GRA). Un ángulo recto tiene 100 grados centesimales. Nunca usaremos esta unidad de medida.
- Radianes (RAD). Esta unidad de medida de ángulos está relacionada con el estudio funcional de las razones trigonométricas (funciones trigonométricas). A partir del curso próximo se usará con frecuencia.

En este curso utilizaremos, exclusivamente, los grados sexagesimales. Por tanto, selecciona en la calculadora el modo DEG, a partir de la tecla [MODE] o [SETUP], según el modelo de calculadora.

Anotar un ángulo. Tecla [° ' "]

Para escribir el ángulo 38° 25' 36'', se procede así:

38 [° ' "] 25 [° ' "] 36 [° ' "] {38.42666667}   [SHIFT] [° ' "] {38°25°36}

Se anota el ángulo en forma decimal   Se expresa el ángulo en forma sexagesimal

En las CALCULADORAS DE PANTALLA DESCRIPTIVA se procede del mismo modo:

38 [° ' "] 25 [° ' "] 36 [° ' "] [=] {38°25°36° / 38°25'36''}

Cálculo de una razón trigonométrica. Teclas [sin] [cos] [tan]

Para calcular *sen* (47° 25'), se procede así:

[sin] 47 [° ' "] 25 [° ' "] {47.41666667} [=] {0.736293951 21}

Es decir, *sen* 47° 25' = 0,736

Análogamente, se procede con coseno, [cos], y tangente, [tan].

Funciones inversas: [sin⁻¹] ([SHIFT] [sin]), [cos⁻¹] ([SHIFT] [cos]), [tan⁻¹] ([SHIFT] [tan])

¿Cuál es el ángulo cuyo seno vale 0,5? Sabemos que es 30°. La forma de preguntárselo a la calculadora es esta:

[SHIFT] [sin] 0,5 [=] {30}

Análogamente:

cos α = 0,56 → ¿α? → [SHIFT] [cos] 0,56 [=] [SHIFT] [° ' "] {55°55°39.13}

tg α = 3 → ¿α? → [SHIFT] [tan] 3 [=] [SHIFT] [° ' "] {71°33°54.18}

Entrénate

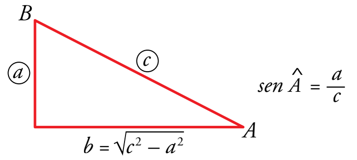
Obtén las siguientes razones trigonométricas y escribe en tu cuaderno los resultados redondeando a las milésimas.

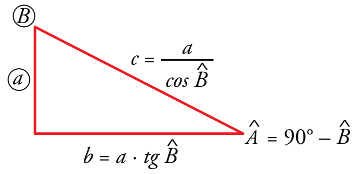
a) *sen* 86°   b) *cos* 59°
c) *tg* 22°   d) *sen* 15° 25' 43''
e) *cos* 59° 27'   f) *tg* 86° 52'
g) *sen* 10° 30'' (atención, 10° 0' 30'')

4 Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos (lados o ángulos) a partir de algunos elementos conocidos.

Las razones trigonométricas nos permiten resolver cualquier tipo de triángulo rectángulo.





Conocidos dos lados

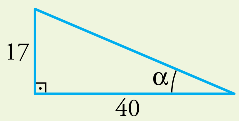
- El tercer lado se obtiene mediante el teorema de Pitágoras.
- Cada uno de los ángulos agudos se halla a partir de la razón trigonométrica que lo relaciona con los dos lados conocidos.

Conocidos un lado y un ángulo

- Otro lado se halla mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos.
- El otro ángulo agudo es complementario del que conocemos.

Ejercicios resueltos

1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 17 cm y 40 cm. Hallar los ángulos del triángulo.

1.


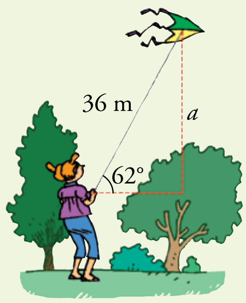
El ángulo α se relaciona con los dos catetos mediante su tangente: $tg\,\alpha = \frac{17}{40} = 0{,}425$

Hallamos con la calculadora el ángulo cuya tangente es 0,425:

SHIFT tan 0,425 = SHIFT °'" 23°1°31.77. Es decir, $\alpha = 23°\ 1'\ 32''$.

El otro ángulo es su complementario: $90° - 23°\ 1'\ 32'' = 66°\ 58'\ 28''$

2. Iris está haciendo volar su cometa. Ha soltado 36 m de hilo y mide el ángulo que forma la cuerda con la horizontal: 62°. ¿A qué altura se encuentra la cometa sabiendo que la mano de Iris que sostiene la cuerda está a 83 cm del suelo?

2.


a es la altura de la cometa por encima de la mano de Iris.

a es el cateto opuesto al ángulo de 62°. El seno es la razón trigonométrica que la relaciona con la hipotenusa:

$$sen\ 62° = \frac{a}{36} \rightarrow a = 36 \cdot sen\ 62° = 31{,}79 \text{ m}$$

La cometa está a una altura de $31{,}79 + 0{,}83 = 32{,}62$ m.

Actividades

1 En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 27° y la hipotenusa 46 m. Halla los dos catetos.

2 ¿Cuánto mide la apotema de un pentágono regular de lado $l = 10$ cm?

3 Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 48 cm y 71 cm. Calcula, en grados y minutos, los dos ángulos agudos.

4 En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 37°, y el cateto opuesto, 87 m. Halla el otro cateto y la hipotenusa.

Ejercicios y problemas

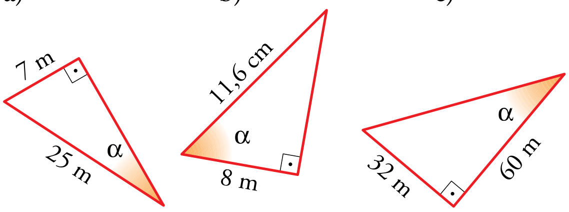
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

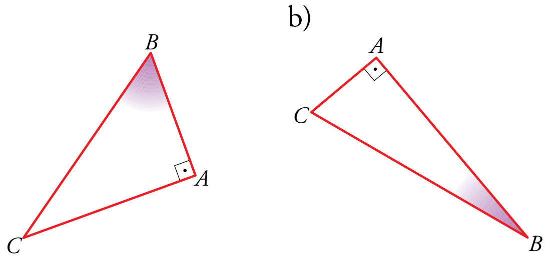
1 ▼▽▽ Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de estos triángulos:

a) b) c)



2 ▼▽▽ Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de $\hat{B}$ en cada caso:

a) b)



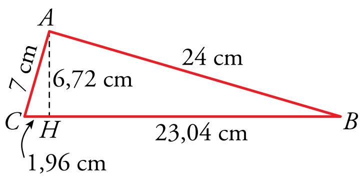
3 ▼▽▽ Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{A}$ = 90°):

a) b = 56 cm; a = 62,3 cm

b) b = 33,6 cm; c = 4,5 cm

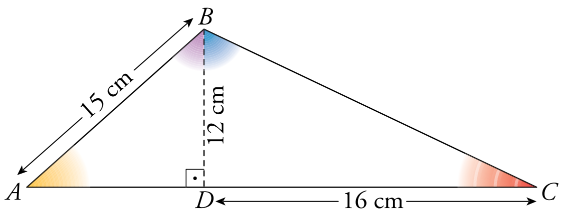
c) c = 16 cm; a = 36 cm

4 ▼▽▽ Comprueba, con el teorema de Pitágoras, que los triángulos ABC y AHB son rectángulos.



Halla en cada uno las razones trigonométricas de $\hat{B}$ y compara los resultados. ¿Qué observas?

5 ▼▼▽ Calcula las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$, $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$.



Relaciones fundamentales

6 ▼▽▽ Si $sen\ \alpha$ = 0,28, calcula $cos\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ utilizando las relaciones fundamentales ($\alpha < 90°$).

7 ▼▽▽ Halla el valor exacto (con radicales) de $sen\ \alpha$ y $tg\ \alpha$ sabiendo que $cos\ \alpha = 2/3$ ($\alpha < 90°$).

8 ▼▼▽ Si $tg\ \alpha = \sqrt{5}$, calcula $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ ($\alpha < 90°$).

9 ▼▼▽ Calcula y completa esta tabla en tu cuaderno, con valores aproximados:

sen α	0,92		
cos α			0,12
tg α		0,75	

10 ▼▼▽ Calcula el valor exacto (utilizando radicales) de las razones trigonométricas que faltan en la tabla siguiente ($\alpha < 90°$). Hazlo en tu cuaderno.

sen α	2/3		
cos α		$\sqrt{2}/3$	
tg α			2

Calculadora

11 ▼▽▽ Completa en tu cuaderno la tabla siguiente, utilizando la calculadora:

α	15°	55° 20'	72° 25' 40''	85,5°
sen α				
cos α				
tg α				

12 ▼▽▽ Halla el ángulo α en cada caso. Exprésalo en grados, minutos y segundos.

a) $sen\ \alpha = 0{,}58$ b) $cos\ \alpha = 0{,}75$ c) $tg\ \alpha = 2{,}5$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ e) $cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $tg\ \alpha = 3\sqrt{2}$

13 ▼▽▽ Halla, con la calculadora, las otras razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los casos siguientes:

a) $sen\ \alpha = 0{,}23$ b) $cos\ \alpha = 0{,}74$ c) $tg\ \alpha = 1{,}75$

d) $sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e) $tg\ \alpha = \sqrt{3}$ f) $cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Aplica lo aprendido

14 ▼▽▽ Halla la medida de los lados y los ángulos desconocidos en los siguientes triángulos rectángulos $(\hat{A} = 90°)$:

a) $b = 7$ cm $\quad c = 18$ cm

b) $a = 25$ cm $\quad b = 7$ cm

c) $b = 18$ cm $\quad \hat{B} = 40°$

d) $c = 12{,}7$ cm $\quad \hat{B} = 65°$

e) $a = 35$ cm $\quad \hat{C} = 36°$

15 ▼▽▽ Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 m. ¿Cuál es su altura?

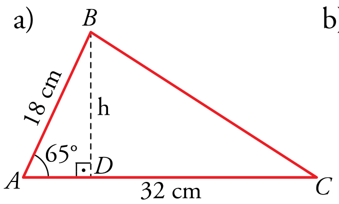
16 ▼▽▽ En un triángulo isósceles, su lado desigual mide 18 m, y su altura, 10 m. Calcula sus ángulos.

17 ▼▼▽ Calcula el perímetro y el área de un triángulo isósceles en el que el ángulo desigual mide 72° y la medida del lado opuesto a ese ángulo es de 16 m.

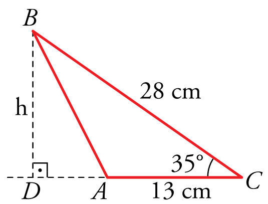
18 ▼▼▽ Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

19 ▼▼▽ Calcula la altura, h, y el área de los siguientes triángulos:

a)

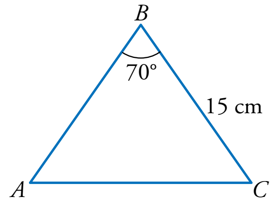


b)

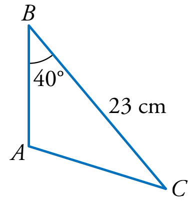


20 ▼▼▽ Calcula la altura sobre el lado AB en los siguientes triángulos:

a)

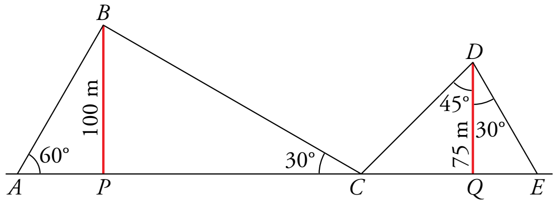


b)



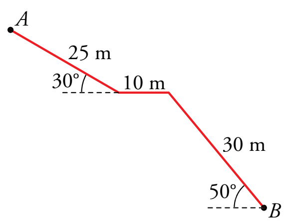
21 ▼▼▽ Para medir la altura de un árbol, nos situamos a 20 m de su base y observamos, desde el suelo, su parte más alta bajo un ángulo de 50°. ¿Cuánto mide el árbol?

22 ▼▼▽ Dos antenas de radio están sujetas al suelo por cables tal como indica la figura.



Calcula la longitud de cada uno de los tramos de cable y la distancia AE.

23 ▼▼▽ Una escalera, por la que se accede a un túnel, tiene la forma y las dimensiones de la figura.



Calcula la profundidad del punto B.

Autoevaluación

¿Dominas las razones trigonométricas de un ángulo agudo y sabes utilizarlas para calcular lados y ángulos? ¿Conoces las relaciones entre ellas?

1 a) Si $\cos\alpha = 0{,}52$, calcula $\text{sen}\,\alpha$ y $\text{tg}\,\alpha$.

b) Si $\text{tg}\,\beta = \dfrac{12}{5}$, calcula $\text{sen}\,\beta$ y $\cos\beta$.

La calculadora científica es un instrumento básico en trigonometría. ¿Sabes manejarla con eficacia?

2 Si $\text{sen}\,\alpha = 0{,}35$, ¿cuánto mide α? Halla las otras razones trigonométricas de α con ayuda de la calculadora.

¿Sabes resolver triángulos rectángulos a partir de un lado y un ángulo o de dos lados?

3 En un triángulo rectángulo, un ángulo agudo mide 50°, y la hipotenusa, 16 cm. Resuelve el triángulo.

4 Una escalera de 3 m está apoyada en una pared. ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?

5 En un triángulo isósceles, cada uno de los ángulos iguales mide 70° y su altura es de 12 cm. Halla la medida de los lados del triángulo.

8 Geometría analítica

Con la invención de la Geometría Analítica se pone de manifiesto, una vez más, que las grandes creaciones humanas son fruto de una época, de un momento histórico cuyas circunstancias lo propician. Solo falta el personaje genial que lo lleve a efecto. En este caso fueron dos franceses, Descartes y Fermat, quienes la desarrollaron independiente y casi simultáneamente.

René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático, en su obra *El discurso del Método* incluyó una parte final llamada “Geometría” en la que se detalla cómo se aplica el álgebra a la resolución de algunos problemas geométricos con la ayuda de un sistema de coordenadas. *Coordenadas cartesianas* se llamaron, pues en aquella época los textos científicos se escribían en latín y Descartes latinizó su nombre: *Cartesius*.

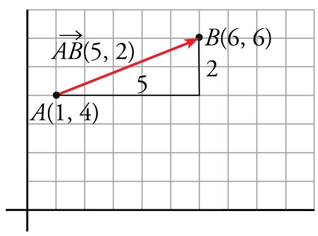
Pierre de Fermat (1601-1655), abogado, político y matemático por afición, desarrolló un sistema similar al de Descartes: aplicó los métodos algebraicos al tratamiento de figuras geométricas representadas en unos ejes de coordenadas rectangulares. Esto lo describió en 1636, un año antes que Descartes, pero no fue publicado hasta después de su muerte, por lo que su obra no ejerció tanta influencia como la de aquel. Por eso es frecuente atribuir solo a Descartes la invención de la Geometría Analítica, olvidando la contribución de Fermat que, incluso, llegó un poco antes.

La utilización de los vectores en la geometría (los físicos ya los usaban hacía tiempo) llegó en el siglo XIX por medio de **Gauss, Möbius** y **Bellavilis.**

DEBERÁS RECORDAR

- Algunas propiedades de los paralelogramos.
- Algunas formas de la ecuación de una recta.
- Sistemas de ecuaciones lineales con y sin solución.

1 Vectores en el plano



En un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante sus coordenadas: $A(1, 4)$, $B(6, 6)$.

La flecha que va de A a B se llama **vector** y se representa por $\vec{AB}$. Es el vector de **origen** A y **extremo** B.

Al vector $\vec{AB}$ podríamos describirlo así: desde A avanzamos 5 unidades en el sentido de las X y subimos dos unidades en el sentido de las Y.

Eso se dice más brevemente así: las **coordenadas** de $\vec{AB}$ son (5, 2).

O, mejor, así .... $\vec{AB} = (5, 2)$.

O, simplemente, así .... $\vec{AB}(5, 2)$.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo:

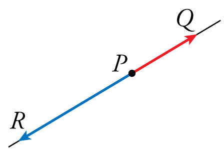
$$B(6, 6),\ A(1, 4) \quad \vec{AB} = (6, 6) - (1, 4) = (5, 2)$$

Módulo de un vector, $\vec{AB}$, es la distancia de A a B. Se designa así: $|\vec{AB}|$. Si las coordenadas de $\vec{AB}$ son (x, y), entonces $|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección de un vector es la de la recta en la que se encuentra y la de todas sus paralelas.

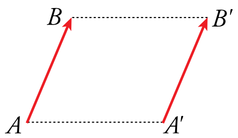
Cada dirección admite dos **sentidos** opuestos.

Por ejemplo, $\vec{PQ}$ y $\vec{PR}$ son vectores de sentidos opuestos.



Igualdad de vectores

Dos vectores iguales $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ situados en rectas distintas (y, por tanto, paralelas) determinan un paralelogramo $ABB'A'$.



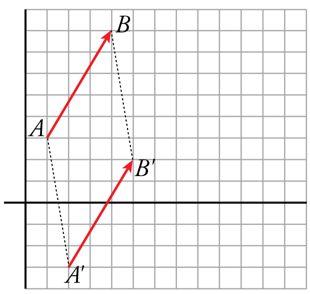
Dos **vectores** son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. En tal caso, tienen las mismas coordenadas.

Ejercicio resuelto

***A*(1, 3), *B*(4, 8), *A'*(2, –3), *B'*(5, 2). Comprobar que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{A'B'}$ son iguales.**

Representándolos, observamos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Pero también podemos comprobarlo mediante sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Coordenadas de } \vec{AB}: (4, 8) - (1, 3) = (3, 5) & \vec{AB}(3, 5) \\ \text{Coordenadas de } \vec{A'B'}: (5, 2) - (2, -3) = (3, 5) & \vec{A'B'}(3, 5) \end{array}\right\} \vec{AB} = \vec{A'B'}$$



Actividades

1 Representa los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales. Comprueba que $\vec{AB} = \vec{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.

2 Tenemos tres puntos de coordenadas:

$$A(3, -1),\ B(4, 6),\ C(0, 0)$$

Halla las coordenadas del punto D para que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ sean iguales.

2 Operaciones con vectores

Notación

Los vectores se designan también mediante una letra minúscula con una flechita encima. Para ello, se suelen utilizar las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, y, si se necesitan más, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

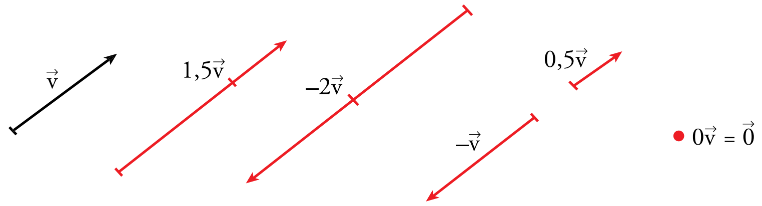
Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k:

$$|k\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$$

- Dirección: la misma que $\vec{v}$.
- Sentido: el mismo que el de $\vec{v}$ o su opuesto, según k sea positivo o negativo, respectivamente.



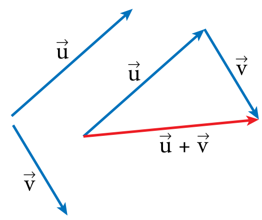
El producto $0\vec{v}$ es igual al **vector cero,** $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección.

El vector $-1\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$.

Las **coordenadas** del vector $k\vec{v}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{v}$. Las coordenadas de $\vec{0}$ son $(0, 0)$. Las coordenadas de $-\vec{v}$ son las opuestas de las coordenadas de $\vec{v}$.

Suma de vectores

Para **sumar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede del siguiente modo: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$. La suma $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y extremo el de $\vec{v}$.



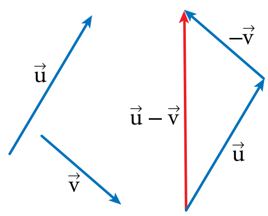
Las **coordenadas** del vector $\vec{u}+\vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

$$\vec{u}(7, -3)\ ,\ \vec{v}(4, 5) \ \rightarrow\ \vec{u}+\vec{v} = (7+4, -3+5) = (11, 2)$$

Resta de vectores

Para **restar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$:

$$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$$



Las **coordenadas** del vector $\vec{u}-\vec{v}$ se obtienen restándole a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

$$\vec{u}(7, -3),\ \vec{v}(4, 5) \ \rightarrow\ \vec{u}-\vec{v} = (7-4, -3-5) = (3, -8)$$

Entrénate

1 a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u}+\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector $3\vec{u}-4\vec{v}$.

2 Representa y halla las coordenadas de los vectores:

$\vec{w} = 2\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{p} = \vec{u}-\vec{v}$ y

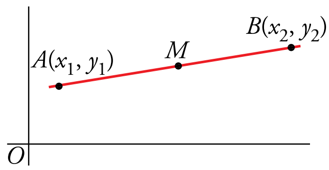
$\vec{q} = -\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$,

siendo $\vec{u}(3, -1)$ y $\vec{v}(-4, 2)$.

3 Punto medio de un segmento y puntos alineados

Punto simétrico

Si M es el punto medio de AB, se dice que B es el **simétrico** de A respecto de M.



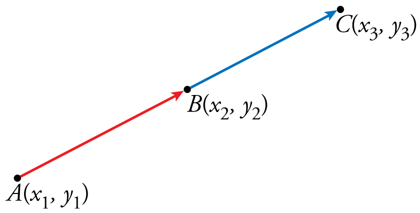
Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 1)$ y $B(4, 3)$ es $M = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (1, 2)$.

Comprobación de que tres puntos están alineados



Los puntos A, B y C están alineados siempre que los vectores

$$\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{BC}$$

tengan la misma dirección, y esto ocurre si sus coordenadas son proporcionales.

Notación

El símbolo // puesto entre dos vectores denota que son paralelos; es decir, que tienen la misma dirección.

A, B y C están alineados si $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BC}$; es decir, si las coordenadas del vector $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ son proporcionales a las de $(x_3 - x_2,\ y_3 - y_2)$.

Ejercicio resuelto

Comprobar si los puntos $A(2, -1)$, $B(6, 1)$, $C(8, 2)$ están alineados.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6-2, 1-(-1)) = (4, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (8-6, 2-1) = (2, 1) \end{array} \right\} \text{Las coordenadas son proporcionales, pues } 2 \cdot (2, 1) = (4, 2).$$

Por tanto, $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{BC}$ y los puntos están alineados.

Actividades

1 Halla las coordenadas del punto medio de los siguientes segmentos:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$ b) $P(7, -3)$, $Q(-5, 1)$

c) $R(1, 4)$, $S(7, 2)$ d) $A(-3, 5)$, $B(4, 0)$

2 Si conocemos el punto medio del segmento AB, $M(4, 4)$, y uno de los extremos es $A(7, 2)$, ¿cuáles son las coordenadas de B?

3 Halla las coordenadas del punto simétrico de A respecto de P en los siguientes casos:

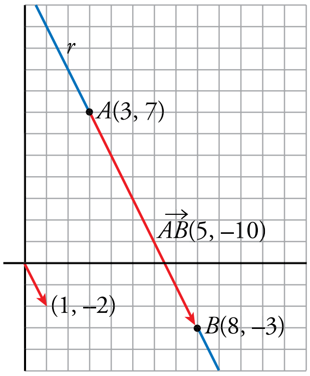
a) $A(4, -1)$, $P(-7, 2)$

b) $A(2, 4)$, $P(5, -1)$

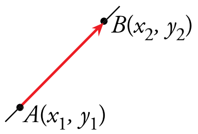
4 Comprueba si $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $T(15, -25)$ están alineados.

5 Averigua el valor de a para que los puntos $R(2, 7)$, $S(5, -1)$ y $Q(a, -25)$ estén alineados.

4 Ecuaciones de rectas. Paralelismo y perpendicularidad



Una recta queda determinada por dos puntos. A partir de ellos, como ya sabemos, se obtiene la pendiente, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y, con ellos, la ecuación de la recta: $y = y_1 + m(x - x_1)$



El vector $\vec{AB}$ que une los dos puntos se llama **vector dirección** de la recta.

Por ejemplo, la recta r que pasa por $A(3, 7)$ y $B(8, -3)$ tiene como vector dirección a $\vec{AB}(5, -10)$ o cualquier otro vector paralelo a él, como el $(1, -2)$. La pendiente de esta recta es: $m = \dfrac{-3 - 7}{8 - 3} = \dfrac{-10}{5} = -2$

Su ecuación es: $y = 7 - 2(x - 3)$; es decir, $y = -2x + 13$

Recuerda

La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando la y está despejada.

Vector dirección de una recta es cualquier vector paralelo a ella. Si A y B son puntos de la recta, $\vec{AB}$ es un vector dirección de ella.

Si $\vec{d}(a, b)$ es un vector dirección de r, su pendiente es: $m = \dfrac{b}{a}$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 3)$ y $B(6, 7)$.

1. Un vector dirección es $\vec{AB}(8, 4)$. Otro vector dirección: $\vec{d}(2, 1)$

Pendiente: $m = \dfrac{1}{2}$. Ecuación: $y = 3 + \dfrac{1}{2}(x + 2) \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 4$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (5, –3) y tiene por vector dirección $\vec{d}(3, 2)$.

2. Su pendiente es: $m = \dfrac{2}{3}$ Su ecuación es: $y = -3 + \dfrac{2}{3}(x - 5)$

3. Hallar la ecuación de la recta paralela a r: $2x + 5y - 4 = 0$ que pasa por:

a) (0, 0) b) (4, –3)

3. Puesto que la rectas que nos piden son paralelas a r (tienen su misma pendiente), empezamos hallando la pendiente de r. Para ello, despejamos la y y nos fijamos en el coeficiente de la x:

$2x + 5y - 4 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{4}{5}$ Pendiente: $m = -\dfrac{2}{5}$

a) Pasa por (0, 0) y su pendiente es $-\dfrac{2}{5} \rightarrow y = -\dfrac{2}{5}x$

b) Pasa por (4, –3) y su pendiente es $-\dfrac{2}{5} \rightarrow y = -3 - \dfrac{2}{5}(x - 4)$

Actividades

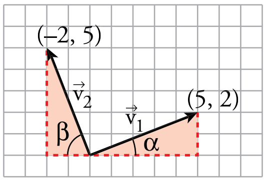
1 Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$ b) $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

2 Halla la ecuación de la recta que pasa por (7, –5) y tiene por vector dirección (7, –4).

3 Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por (0, –3).

4 Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por (2, 4).



Vector perpendicular a otro

Los vectores $\vec{v}_1(5, 2)$ y $\vec{v}_2(-2, 5)$ son perpendiculares. Se justifica observando, en la gráfica del margen, que los dos triángulos sombreados son iguales y, por tanto, $\alpha + \beta = 90°$. En general:

Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares.

Recta perpendicular a otra

Un vector dirección de una recta r_1 es $\vec{d}_1 = (a, b)$.

Si r_2 es perpendicular a r_1, un vector dirección de r_2 es $\vec{d}_2 = (-b, a)$.

Las pendientes de r_1 y r_2 son, respectivamente, $m_1 = \frac{b}{a}$ y $m_2 = \frac{-a}{b}$.

El producto de sus pendientes es -1: $m_1 \cdot m_2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{-a}{b} = -1$

Las pendientes, m_1 y m_2, de dos rectas perpendiculares se relacionan así:

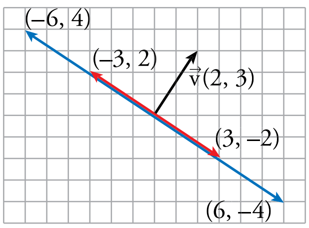
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $A(4, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(3, -5)$.

El vector $\vec{d}(5, 3)$ es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de r. La pendiente de r es $m = \frac{3}{5}$. Su ecuación es:

$$y = 7 + \frac{3}{5}(x - 4) \;\rightarrow\; y = \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}$$



2. Obtener varios vectores perpendiculares a $\vec{v}(2, 3)$.

(–3, 2) es perpendicular a $\vec{v}$. También lo son (3, –2), (–6, 4), (6, –4)…

3. Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a s: $5x - 3y + 15 = 0$, que pasa por (–7, 2).

Pendiente de s: $y = \frac{5}{3}x + 5 \;\rightarrow\; m_1 = \frac{5}{3}$

Pendiente de r: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{3}{5}$

Ecuación de r: $y = 2 - \frac{3}{5}(x + 7) \;\rightarrow\; y = -\frac{3}{5}x - \frac{11}{5}$

Actividades

5 Da tres vectores perpendiculares a (–6, 1).

6 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

7 La recta r pasa por (3, 0), y la recta s, por (–5, 3). Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.

Halla sus ecuaciones.

5 Rectas paralelas a los ejes coordenados

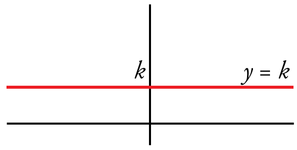
No lo olvides

Vector dirección de la recta $y = k$ es $(a, 0)$.

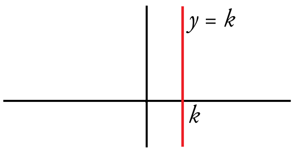
Vector dirección de la recta $x = k$ es $(0, a)$.

Rectas paralelas al eje *X*

Como sabes, la función constante, $y = k$, se representa mediante una recta paralela al eje X y, por tanto, de pendiente 0. Vectores dirección de estas rectas son $(a, 0)$ para cualquier valor de a distinto de 0.



Rectas paralelas al eje *Y*

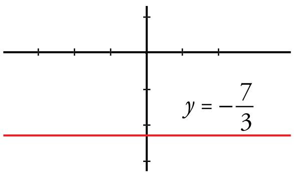


Análogamente, las ecuaciones $x = k$ se representan mediante rectas paralelas al eje Y. (Sin embargo, estas rectas no son la representación de funciones, porque a un valor de x, el k, le corresponden más de uno –¡todos!– los valores de Y).

Vectores dirección de las rectas $x = k$ son $(0, a)$ para $a \neq 0$.

Ejercicios resueltos

1. Dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a la recta de ecuación $3y + 7 = 0$. Representarla.

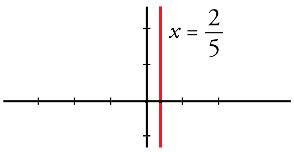


$3y + 7 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{7}{3}$

Vectores paralelos: (1, 0), (2, 0), (–1, 0), ...

Vectores perpendiculares: (0, 1), (0, 2), (0, –1), ...

2. Representar la recta $5x - 2 = 0$ y dar varios vectores paralelos y varios perpendiculares a ella.

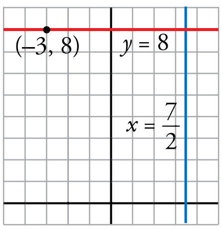


$5x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

Vectores paralelos: (0, 1), (0, 2), (0, –1), ...

Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0), (–1, 0), ...

3. Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a $2x - 7 = 0$, que pasa por $(-3, 8)$.



$2x - 7 = 0 \rightarrow x = \dfrac{7}{2}$ es paralela al eje Y.

Por tanto, la recta r es paralela al eje X: $y = k$.

Como r pasa por $(-3, 8)$, su ecuación es $y = 8$.

Actividades

1 Representa r y s y da tres vectores paralelos y tres perpendiculares a ellas:

r: $5x - 7 = 0$ s: $3 + 4y = 0$

2 Las rectas r y s pasan por el punto $(5, -3)$. r es paralela a $5y + 17 = 0$, y s es perpendicular a ella. Representa r y s y da sus ecuaciones.

6 Posiciones relativas de dos rectas

Gráficamente, dos rectas pueden cortarse o no. Si no se cortan, son paralelas.

Pero si las rectas vienen dadas por sus ecuaciones, es posible que se dé un tercer caso: que sean la misma recta y, al mostrar distinto aspecto algebraico, no se aprecie a simple vista.

Para averiguar la posición relativa de dos rectas dadas por sus ecuaciones, se resuelve el sistema formado por ellas.

Ejercicio resuelto

Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) r**:** $\mathbf{5x - 4y + 10 = 0}$

s**:** $\mathbf{y = 2x + 1}$

b) r **pasa por (2, –1) y (8, 2).**

s **pasa por (2, 5) y su pendiente es –1.**

c) r **pasa por (3, 8) y (8, 3).**

s**:** $\mathbf{x + y = 11}$

d) r **pasa por (2, 4) y (4, 7).**

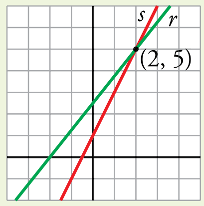
s**:** $\mathbf{y = \frac{3}{2}x - 2}$

a) $\begin{cases} 5x - 4y + 10 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \rightarrow 5x - 4(2x + 1) + 10 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 8x - 4 + 10 = 0 \rightarrow -3x + 6 = 0 \rightarrow x = 2$

$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \rightarrow y = 5$

Las rectas se cortan en el punto (2, 5).

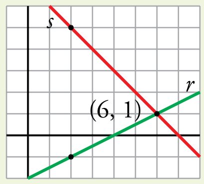


b) Un vector dirección de r es $(8, 2) - (2, -1) = (6, 3) \,//\, (2, 1)$. Su pendiente es, por tanto, $m = 1/2$.

$r: y = -1 + \frac{1}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$

$s: y = -(x - 2) + 5$

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ Resolviendo el sistema se obtiene el punto de corte, (6, 1).



c) Un vector dirección de r es $(8, 3) - (3, 8) = (5, -5) \,//\, (1, -1)$. Su pendiente es, por tanto, $m = -1$.

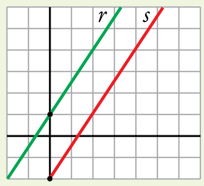
$r: y = 8 - (x - 3) \rightarrow y = -x + 11 \rightarrow x + y = 11$

r y s son la misma recta.

d) Un vector dirección de r es $(4, 7) - (2, 4) = (2, 3)$. Pendiente, $m = 3/2$.

$r: y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$

r es paralela a s porque tienen la misma pendiente, 3/2, pero distintas ordenadas en el origen: 1 y –2, respectivamente.



Actividades

1 Di la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $r: 8x + 2y - 14 = 0$, $s: 5x - y - 20 = 0$

b) $r: 3x - 2y - 14 = 0$

s: pasa por (1, –2) y por (10, 1).

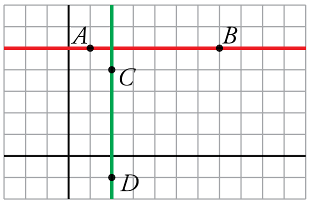
c) r: pasa por (–1, 4) y (7, –2).

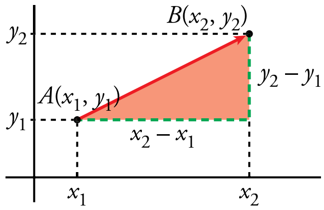
$s: 3x + 4y = 0$

d) r: pasa por (2, –1) y (8, 2).

s: su pendiente es $\frac{1}{2}$ y pasa por (0, –2).

7 Distancia entre dos puntos





Si dos puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada, hallar su distancia es muy fácil. Por ejemplo, en el gráfico:

$dist(A, B) = 6; \quad dist(C, D) = 5$ (basta con contar cuadritos)

O bien, mediante sus coordenadas: $dist[(3, -1), (3, 11)] = 11 - (-1) = 12$

$dist[(4, 7), (1, 7)] = 4 - 1 = 3$

Para dos puntos cualesquiera, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, su distancia se obtiene hallando el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula también es válida si los puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada.

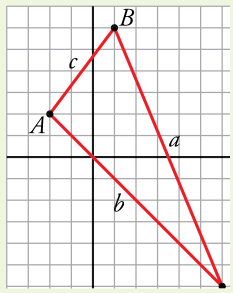
Ejercicios resueltos

1. Calcular los lados del triángulo de vértices $A(-2, 2)$, $B(1, 6)$, $C(6, -6)$.

1. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 + 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-6 - 6)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-6 - 2)^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 11{,}31$



2. a) Hallar las longitudes de los lados del cuadrilatero cuyos vértices son $A(2, 1)$, $B(4, 6)$, $C(-1, 4)$ y $D(-3, -1)$.

b) Probar que es un rombo.

c) Calcular su área.

2. a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4 - 2)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

b) Comparamos las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB} = (4, 6) - (2, 1) = (2, 5) \qquad \overrightarrow{DC} = (-1, 4) - (-3, -1) = (2, 5)$

El cuadrilátero tiene los lados iguales y paralelos dos a dos. Es un rombo.

c) Calculamos su diagonales:

$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{18}$; $\quad d' = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{(4 + 3)^2 + (6 + 1)^2} = \sqrt{98}$

$$\text{Área} = \frac{d \cdot d'}{2} = \frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{98}}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ u}^2$$

Actividades

1 Halla la distancia entre A y B.

a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

2 Aplica el teorema de Pitágoras para comprobar que el triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(3, 1)$ y $C(5, 6)$ es rectángulo. ¿Es también isósceles?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

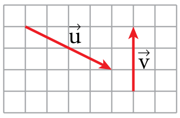
Practica

Vectores y puntos

1 ▼▽▽ Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

2 ▼▽▽ Con origen en el punto $A(3, -3)$, dibuja los vectores $\overrightarrow{AB}(-3, 2)$, $\overrightarrow{AC}(5, 1)$ y $\overrightarrow{AD}(1/2, -4)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de los puntos B, C y D?

3 ▼▽▽ a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

4 ▼▽▽ Dados los vectores $\vec{u}(4, -2)$ y $\vec{v}(-2, -1)$:

a) Representa los vectores $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\frac{1}{2}\vec{u}$ y $-3\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

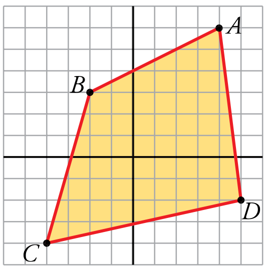
b) Calcula las coordenadas de este vector:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

5 ▼▽▽ a) Representa los puntos $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$, $C(4, 4)$ y $D(1, 0)$ y halla el punto medio de AC y de BD.

b) Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ y comprueba que son las mismas.

6 ▼▽▽ Calcula las coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.



7 ▼▽▽ Si $M(-3, 5)$ es el punto medio del segmento AB, halla el punto B en cada uno de los siguientes casos:

a) $A(-1, 5)$ b) $A(6, -4)$ c) $A(-4, -7)$

8 ▼▽▽ Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A(-3, -5)$ respecto de:

a) $P(-2, 0)$ b) $Q(2, -3)$ c) $O(0, 0)$

Rectas

9 ▼▽▽ Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(1, 3)$ y su pendiente es -2.

c) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

10 ▼▽▽ Da, en cada caso, un vector dirección, la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(0, -2)$, $B(5, -2)$

c) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

11 ▼▽▽ Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(-4, 3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}$:

a) $\vec{d}(2, -1)$ b) $\vec{d}(-1, -3)$ c) $\vec{d}(2, 0)$

12 ▼▽▽ Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

c) Paralela a $3x + 2y - 6 = 0$ y pasa por $(0, -3)$.

13 ▼▽▽ Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

a) $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{v}(-5, 4)$ c) $\vec{v}(-1, 0)$

14 ▼▽▽ Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) r: $y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) r: $3x - 2y + 1 = 0$; $P(4, -1)$

c) r: $x = 3$; $P(0, 4)$

15 ▼▽▽ Halla el punto de intersección de las rectas r y s en los casos siguientes:

a) $\begin{cases} r: 3x - 5y + 17 = 0 \\ s: 7x + 3y - 63 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 3x - 2y + 9 = 0 \\ s: x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

16 ▼▽▽ Representa las rectas $3x + 6 = 0$ y $2y - 5 = 0$ y halla su punto de intersección.

Distancias

17 ▼▽▽ Calcula la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

18 ▼▽▽ a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$.

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

19 ▼▽▽ Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

20 ▼▽▽ Comprueba, mediante el teorema de Pitágoras, que el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 6)$ es rectángulo.

Aplica lo aprendido

21 ▼▽▽ Averigua el valor de k para que se cumpla:

$$\left(\frac{6}{5}, -2\right) = k(-3, 5)$$

22 ▼▼▽ Dados los vectores $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(x, 5)$ y $\vec{w}(8, y)$, calcula x e y para que se verifique: $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$

23 ▼▼▽ Dados los vectores $\vec{u}(5, -3)$, $\vec{v}(1, 3)$ y $\vec{w}(2, 0)$, calcula el valor de m y n para que se verifique:

$$\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$$

24 ▼▽▽ Comprueba, en cada caso, que los puntos dados están alineados:

a) $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(19, 8)$

b) $P(-2, -3)$, $Q(2, 0)$, $R(-26, -21)$

25 ▼▽▽ Calcula m para que los puntos $R(5, -2)$, $S(-1, 1)$ y $T(2, m)$ estén alineados.

26 ▼▽▽ Comprueba si los puntos $A(18, 15)$ y $B(-43, -5)$ pertenecen a la recta $x - 3y + 27 = 0$.

27 ▼▽▽ Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en los siguientes casos:

a) r: $2x + 7 = 0$ b) r: $-y + 4 = 0$

28 ▼▽▽ Estudia si las rectas r y s son paralelas o perpendiculares:

r: $3x - 5y + 15 = 0$ s: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$.

29 ▼▽▽ Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} r: 2x - 5y + 3 = 0 \\ s: P(3, 1),\ Q(-2, 3) \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 8 = 0 \\ s: A(4, 7),\ B(0, 2) \end{cases}$

30 ▼▼▽ Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

31 ▼▽▽ Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

Autoevaluación

¿Sabes hallar el punto medio de un segmento y el simétrico de un punto respecto de otro? ¿Y comprobar si tres puntos están alineados?

1 Representa los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 7)$ y $D(-2, 5)$ y comprueba analíticamente que el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD.

2 Halla el simétrico de $P(-7, -15)$ respecto de $M(2, 0)$.

3 Comprueba si los puntos $A(1, -5)$, $B(3, 0)$ y $C(6, 6)$ están alineados.

¿Sabes calcular la distancia entre dos puntos?

4 Calcula la longitud de los lados del triángulo de vértices $A(-4, 1)$, $B(6, 3)$ y $C(-2, -3)$.

¿Obtienes con soltura la ecuación de una recta dada de diferentes formas?

5 Obtén la ecuación de las rectas r y s tales que:

r pasa por $(-3, 2)$ y es perpendicular a $8x - 3y + 6 = 0$.

s pasa por $(9, -5/2)$ y es paralela a $2x + y - 7 = 0$.

¿Reconoces, sin representarlas, si dos rectas son paralelas o perpendiculares?

6 Estudia la posición relativa de estas rectas:

r: $2x + y - 2 = 0$ s: $x + \frac{1}{2}y = 1$

¿Obtienes con agilidad el punto de corte de dos rectas?

7 Halla el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$3x + 8y - 7 = 0 \quad \text{y} \quad 4x + 2y - 31 = 0$$

9 Estadística

En el desarrollo histórico de la Estadística se pueden distinguir tres grandes etapas.

Censos. Desde la Antigüedad y hasta el siglo XVI. Solo se realizan recogidas de datos y, a lo sumo, una exposición ordenada y clara de estos.

Análisis de datos. Abarca los siglos XVII, XVIII y XIX. Se supera lo meramente descriptivo y los datos pasan a ser analizados científicamente con el fin de extraer conclusiones.

Se suele considerar que esta etapa comienza con los trabajos de **John Graunt** (s. XVII), quien utilizó archivos parroquiales para realizar un profundo estudio de los nacimientos y las defunciones en Londres durante 30 años: anotó el sexo de cada nacido, las enfermedades de los fallecidos y otras muchas variables. Con ello pudo extraer conclusiones válidas para el futuro e inauguró, así, la Estadística Demográfica.

Algo más tarde, el profesor **Neumann** (s. XVII) comenzó a utilizar métodos con los que elaboró estadísticas muy minuciosas y así, por ejemplo, consiguió demostrar la falsedad de la creencia popular de que en los años terminados en 7 morían más personas. Sus métodos sirvieron de base para elaborar las tablas de mortalidad utilizadas por las compañías de seguros.

También es destacable el trabajo de **Quételet** (s. XIX), el primero en aplicar la estadística a las Ciencias Sociales, para lo que se valió de la probabilidad.

Estadística inferencial. Se inicia a finales del XIX. La esencia de esta rama de la Estadística es que a partir de una muestra se extraen conclusiones válidas para toda una población. Para ello, se echa mano de la alta matemática. Son figuras destacadas en este campo **Ronald Fisher** y **Karl Pearson.**

DEBERÁS RECORDAR

- Algunos conceptos básicos de estadística: población, muestra, variable, ...

1 Dos ramas de la estadística

Recuerda

Población. Es el conjunto de todos los elementos cuyo conocimiento nos interesa y que serán objeto de nuestro estudio.

Muestra es un subconjunto extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

Individuo es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

Caracteres son los aspectos que deseamos estudiar en los individuos de una población. Cada carácter puede tomar distintos valores o modalidades.

Una **variable estadística** recorre todos los valores de un cierto carácter.

Las variables estadísticas pueden ser:

Cuantitativas si toman valores numéricos.

- **discretas:** solo toman valores aislados.
- **continuas:** pueden tomar cualquier valor de un intervalo.

Cualitativas si toman valores no numéricos.

La estadística tiene por objeto el desarrollo de técnicas para el conocimiento numérico de un conjunto de datos empíricos (recogidos mediante experimentos o encuestas). Según el colectivo a partir del cual se obtenga la información y el objetivo que se persiga a la hora de analizar esos datos, la estadística se llama descriptiva o inferencial.

Estadística descriptiva

La **estadística descriptiva** trata de describir y analizar algunos caracteres de los individuos de un grupo dado (población) sin extraer conclusiones para un grupo mayor.

Para este estudio, se dan los siguientes pasos:

1. Selección de los caracteres que interesa estudiar.
2. Análisis de cada carácter: diseño y realización de una encuesta o de un experimento y recogida de datos.
3. Clasificación y organización de los resultados en tablas de frecuencias.
4. Elaboración de gráficos, si conviene para divulgarlos a un público amplio (no expertos).
5. Obtención de **parámetros:** valores numéricos que resumen la información obtenida.

EJEMPLO

Supongamos que por orden del rector, un funcionario de una universidad organiza, tabula, representa gráficamente y obtiene parámetros de algunos caracteres de todos los alumnos (por ejemplo: edades, resultados académicos) para compararlos con estudios similares hechos en años anteriores. Este estudio es **estadística descriptiva,** pues se realiza sobre la totalidad de la población.

Estadística inferencial

La **estadística inferencial** trabaja con muestras y pretende, a partir de ellas, "inferir" características de toda la población. Es decir, se pretende tomar como generales propiedades que solo se han verificado para casos particulares. En ese proceso hay que operar con mucha cautela: ¿Cómo se elige la muestra? ¿Qué grado de confianza se puede tener en el resultado obtenido?

Se estudia el corportamiento de una variable en una MUESTRA.

↓

Se INFIERE el comportamiento de esa variable en la POBLACIÓN.

EJEMPLO

Una editorial realiza una encuesta a 387 alumnos de una universidad sobre sus preferencias en la lectura, con el fin de extraer consecuencias válidas para todos los universitarios. Esto es **estadística inferencial,** pues, a partir de una muestra, se desea obtener información sobre algún aspecto de la población.

2 Tablas de frecuencias

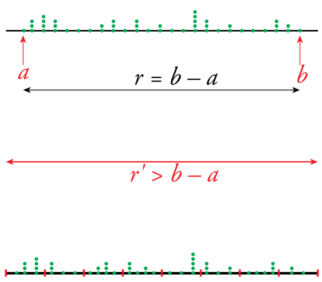
Tras la recogida de datos, la elaboración de una tabla de frecuencias es el siguiente paso. Cuando la variable toma pocos valores, la elaboración de la tabla es sumamente sencilla. No hay más que hacer el recuento de los resultados.

Tabla con datos agrupados

Cuando en una distribución estadística el número de valores que toma la variable es muy grande, conviene elaborar una tabla de frecuencias agrupándolos en intervalos. Para ello:

1. Se localizan los valores extremos, a y b, y se halla su diferencia, $r = b - a$ (recorrido).
2. Se decide el número de intervalos que se quiere formar, teniendo en cuenta la cantidad de datos que se poseen. El número de intervalos no debe ser inferior a 6 ni superior a 15.
3. Se toma un intervalo, r', de longitud algo mayor que el recorrido r y que sea múltiplo del número de intervalos, con objeto de que estos tengan una longitud entera.
4. Se forman los intervalos, de modo que el extremo inferior del primero sea algo menor que a y el extremo superior del último sea algo mayor que b. Es deseable que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos. Para ello, conviene que los extremos de los intervalos tengan una cifra decimal más que los datos.

El punto medio de cada intervalo se llama **marca de clase.** Es el valor que representa a todo el intervalo para el cálculo de algunos parámetros.



No lo olvides

Cuando se elabora una tabla con datos agrupados, se pierde algo de información (pues en ella se ignora cada valor concreto, que se difumina dentro de un intervalo). A cambio, se gana en claridad y eficacia.

Ejercicio resuelto

Elaborar una tabla de frecuencias con las estaturas de 40 adolescentes:

168	160	167	175	175
167	168	158	149	160
178	166	158	163	171
162	165	163	156	174
160	165	154	163	165
161	162	166	163	159
170	165	150	167	164
165	173	164	169	170

1. Valores extremos: $a = 149$, $b = 178$. Recorrido: $r = 178 - 149 = 29$.
2. Tomaremos solo 6 intervalos. Un múltiplo de 6 mayor que 29 y próximo a él es 30. Longitud de cada intervalo: 5.
3. Formamos los intervalos comenzando por un número algo menor que $a = 149$ y terminando en un número algo mayor que $b = 178$.
4. Repartimos los datos en los intervalos:

INTERVALOS	148,5-153,5	153,5-158,5	158,5-163,5	163,5-168,5	168,5-173,5	173,5-178,5
M. DE CLASE	151	156	161	166	171	176
FRECUENCIAS	2	4	11	14	5	4

Actividades

1 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 10 intervalos con el mismo recorrido total.

2 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 8 intervalos. Para ello, toma $r' = 32$.

3 Parámetros estadísticos: $\bar{x}$ y σ

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n

La tabla de frecuencias de la izquierda **puede corresponder** a:

- Una distribución de datos aislados que toma los valores $x_1, x_2, \dots x_n$.
- Una distribución de datos agrupados en intervalos, de los cuales $x_1, x_2, \dots x_n$ son las marcas de clase.

En el primer caso, la tabla refleja exactamente la distribución real. En el segundo, la tabla es una buena aproximación a la realidad.

Recordemos cómo se obtienen los **parámetros** a partir de una tabla:

PUNTUACIONES EN UN TEST

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	12	0
1	31	31
2	86	172
3	92	276
4	48	192
5	19	95
	288	766

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$\Sigma f_i x_i \to$ suma de todos los datos

$\Sigma f_i = N \to$ n.° total de individuos

Por ejemplo, en la distribución que tenemos en el margen:

$\Sigma f_i = 288$. Hay 288 individuos (que han realizado el test).

$\Sigma f_i x_i = 766$. Es la suma de las puntuaciones de todos los individuos.

La media es $\bar{x} = 766/288 = 2{,}66$.

Varianza: $Var = \dfrac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ o bien $Var = \dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

Las dos expresiones coinciden.

— En la primera de ellas, se ve claro el significado de la varianza: promedio de los cuadrados de las desviaciones a la media.

— La segunda es más cómoda para los cálculos, como se puede apreciar en el ejemplo (tabla del margen):

$$Var = \frac{2\,446}{288} - 2{,}66^2 = 1{,}42$$

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	31	31	31
2	86	172	344
3	92	276	828
4	48	192	768
5	19	95	475
	288	766	2 446

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{varianza}$

La desviación típica es un parámetro más razonable que la varianza, pues se expresa en la misma magnitud que los datos y que la media (por ejemplo, si los datos vienen en centímetros, la desviación típica viene en centímetros; sin embargo, la varianza se daría en centímetros cuadrados).

En el ejemplo: $\sigma = \sqrt{1{,}42} = 1{,}19$

Coeficiente de variación: C.V. = $\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

El coeficiente de variación sirve para comparar las dispersiones de población heterogéneas, pues indica la *variación relativa*.

En el ejemplo: C.V. $= \dfrac{1{,}19}{2{,}66} = 0{,}447$. O bien 44,7%.

Ejercicio resuelto

Calcular $\bar{x}$, σ y C.V. en la siguiente distribución:

DISTRIBUCIÓN DE PESOS (EN kg)	
INTERVALOS	FRECUENCIAS
42,5-53,5	4
53,5-64,5	19
64,5-75,5	86
75,5-86,5	72
86,5-97,5	41
97,5-108,5	7

Empezamos sustituyendo los intervalos por sus marcas de clase:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
48	4	192	9 216
59	19	1 121	66 139
70	86	6 020	421 400
81	72	5 832	472 392
92	41	3 772	347 024
103	7	721	74 263
	229	17 658	1 390 434

$N = \Sigma f_i = 229$

$\Sigma f_i x_i = 17\,658$

$\Sigma f_i x_i^2 = 1\,390\,434$

Los números de la 3.ª columna, $f_i x_i$, se obtienen multiplicando los números de las columnas anteriores $(x_i \cdot f_i = f_i x_i)$. Por ejemplo, $59 \cdot 19 = 1\,121$.

Análogamente, los de la 4.ª columna se obtienen multiplicando los de la 1.ª por los de la 3.ª $(x_i \cdot f_i x_i = f_i x_i^2)$. Por ejemplo, $59 \cdot 1\,121 = 66\,139$.

Con las sumas de las columnas de la tabla, obtenemos los parámetros:

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{17\,658}{229} = 77{,}1$ kg

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{1\,390\,434}{229} - 77{,}1^2} = 11{,}2$ kg

COEF. DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11{,}2}{77{,}1} = 0{,}145 = 14{,}5\%$

CON CALCULADORA

1. Preparamos la calculadora para que trabaje en el **MODO SD.**
2. Borramos los datos que pudiera haber acumulados de otras ocasiones: INV AC
3. Introducimos los datos:
   48 × 4 DATA
   59 × 19 DATA
   …
   103 × 7 DATA
4. Resultados obtenidos:

N.º DE INDIVIDUOS Σf_i	n	→	229
SUMA DE VALORES $\Sigma f_i x_i$	Σx	→	17658
SUMA DE CUADRADOS $\Sigma f_i x_i^2$	Σx^2	→	1390434
MEDIA $\bar{x}$	$\bar{x}$	→	77.10917031
DESV. TÍPICA σ	σ_n	→	11.22230132

Actividades

1 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la tabla obtenida en el ejercicio resuelto de la página 97:

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	4	11	14	5	4

2 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la distribución de los ejercicios 1 y 2 de la página 97.

Compara los resultados entre sí y con los del ejercicio 1 de esta página.

4 Medidas de posición

Mediana

↑
Me

Si los individuos de una población están colocados en orden creciente según la variable que estudiamos, el que ocupa el valor central se llama individuo mediano, y su valor, la **mediana.** La mediana, Me, está situada de modo que antes de ella está el 50% de la población, y detrás, el otro 50%.

Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, 9, 10, 12, 15 → mediana: $Me = 8$

Si el número de individuos es par, la mediana es el valor medio de los dos centrales. Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, **9**, 10, 12, 15, 16 → $Me = 8{,}5$

Cuartiles

↑ Q_1 ↑ Me ↑ Q_3

Si en lugar de partir la totalidad de los individuos en dos mitades, lo hacemos en cuatro partes iguales (todas ellas con el mismo número de individuos), los dos nuevos puntos de separación se llaman **cuartiles.**

Cuartil inferior, Q_1, es un valor de la variable que deja por debajo de él al 25% de la población, y por encima, al 75%.

El **cuartil superior,** Q_3, deja debajo al 75% y encima al 25%.

Se designan por Q_1 y Q_3, porque la mediana sería el Q_2.

Por ejemplo, en la distribución

$$\underbrace{1, 2, 2}_{25\%} \underset{Q_1}{\overset{,}{\uparrow}} \underbrace{3, 4, 5}_{25\%} \underset{Me}{\overset{,}{\uparrow}} \underbrace{5, 5, 6}_{25\%} \underset{Q_3}{\overset{,}{\uparrow}} \underbrace{8, 9, 10}_{25\%}$$

estos parámetros toman los valores siguientes: $Q_1 = 2{,}5$; $Me = 5$; $Q_3 = 7$

Mediana y cuartiles se llaman **medidas de posición.**

Ten en cuenta

En general, las cosas no son tan fáciles como en este ejemplo. Obsérvalo en el ejercicio resuelto.

Ejercicio resuelto

Calcular Me, Q_1 y Q_3 en la distribución:

1 1 2 3 4 4 5 5 5

5 6 7 7 7 8 9 10

Hay 17 individuos. 17/2 = 8,5 → La Me es el valor del individuo 9.°, $Me = 5$.

17/4 = 4,25 → (5.° lugar) $Q_1 = 4$

17 · (3/4) = 12,75 → (13.° lugar) $Q_3 = 7$

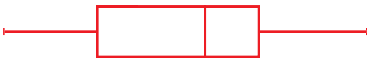
Actividades

1 Calcula Me, Q_1 y Q_3 en la siguiente distribución, cuyos datos están dados ordenadamente:

0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5

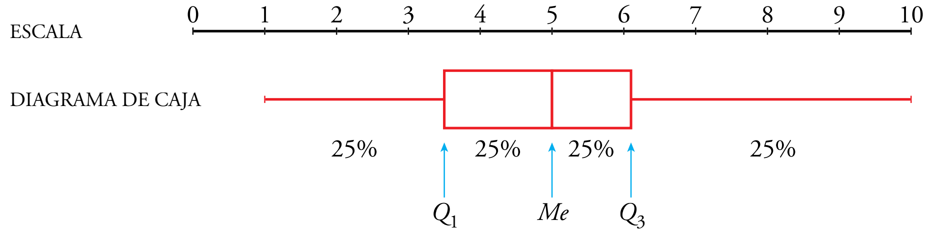
5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 10 10

5 Diagramas de caja



Este diagrama se llama también de **caja y bigotes.**

Observa la siguiente forma de representar distribuciones estadísticas.



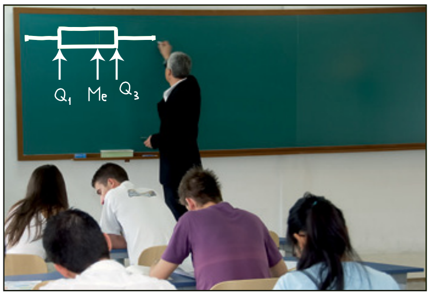
La gráfica corresponde a la distribución de notas en un cierto examen. En la parte alta se ha puesto la escala sobre la que se mueve la variable. Debajo se pone el diagrama propiamente dicho, que consiste en lo siguiente:

— La población total se parte en cuatro trozos, cada uno de ellos con el 25% de los individuos, previamente ordenados de menor a mayor.

— El 50% de los valores centrales se destacan mediante un rectángulo **(caja).**

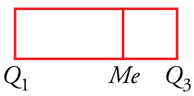
— Los valores extremos (el 25% de los menores y el 25% de los mayores) se representan mediante sendos segmentos **(bigotes).**

Los puntos que separan los cuatro trozos son, obviamente, los cuartiles y la mediana (Q_1, Me, Q_3).

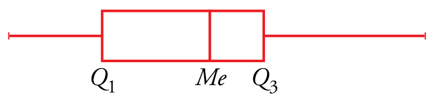


Los **diagramas de caja** (o caja y bigotes) se construyen del siguiente modo:

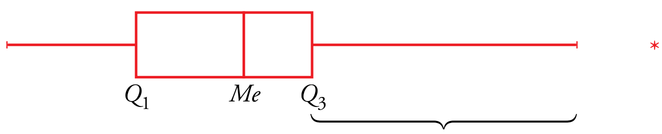
- La caja abarca el intervalo Q_1, Q_3 (llamado recorrido intercuartílico) y en ella se señala expresamente el valor de la mediana, Me.



- Los bigotes se trazan hasta abarcar la totalidad de los individuos, con la condición de que cada lado no se alargue más de una vez y media la longitud de la caja.



- Si uno (o más) de los individuos quedara por debajo o por arriba de esa longitud, el correspondiente lado del bigote se dibujaría con esa limitación y se añadiría, mediante asterisco, el individuo en el lugar que le corresponda. Por ejemplo:



La longitud de este lado del bigote es 1,5 veces la de la caja. En este lado no está incluido el individuo extremo que se representa mediante un asterisco.

Problemas resueltos

1. Representar, mediante un diagrama de caja, la siguiente distribución.

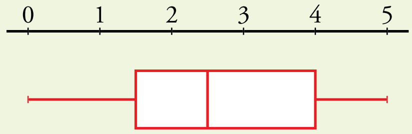
0 0 0 1 1	**1 1 1 1 1**
2 2 2 2 2	**2 2 2 2 2**
3 3 3 3 3	**3 3 3 3 4**
4 4 4 4 4	**4 4 5 5 5**

1. Tenemos 40 individuos.

$40 : 2 = 20 \longrightarrow$ La mediana será el valor intermedio entre los individuos 20.° y 21.°. Esto es: $Me = 2,5$.

$40 : 4 = 10 \longrightarrow$ El cuartil inferior será el valor intermedio entre los individuos 10.° y 11.°: $Q_1 = 1,5$.

Y, de la misma manera: $Q_3 = 4$.



La longitud de la caja es $4 - 1,5 = 2,5$. Los bigotes recogen al resto de la distribución. No hay individuo excepcionales.

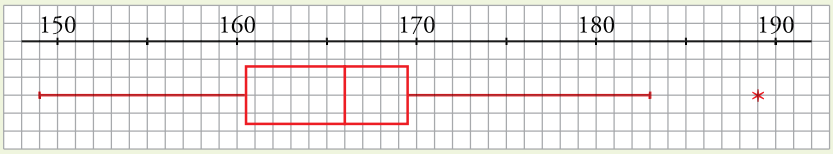
2. Las estaturas de los 40 alumnos y alumnas de una clase son, dadas ordenadamente:

149	**150**	**154**	**156**	**157**
158	**159**	**160**	**160**	**160**
161	**162**	**162**	**163**	**163**
163	**163**	**164**	**165**	**166**
166	**166**	**167**	**167**	**167**
168	**168**	**168**	**169**	**169**
170	**170**	**170**	**171**	**172**
173	**174**	**175**	**175**	**189**

Representar la distribución mediante un diagrama de caja.

2. Puesto que el número de individuos es múltiplo de cuatro, Q_1, Me y Q_3 serán los valores que hay entre los individuos 10.° y 11.°, entre 20.° y 21.°, entre 30.° y 31.°, respectivamente. Es decir,

$Q_1 = 160,5$ $\qquad Me = 166$ $\qquad Q_3 = 169,5$



La longitud de la caja es $169,5 - 160,5 = 9$.

Una vez y media esta longitud es $1,5 \cdot 9 = 13,5$.

El altísimo estudiante que mide 189 cm se separa del extremo superior de la caja $189 - 169,5 = 19,5$. Esa distancia es mayor que una vez y media la longitud de la caja. Por eso, hemos puesto a la derecha un bigote de longitud 13,5 y hemos añadido un asterisco que señala la situación del individuo excepcional.

Actividades

1 Representa mediante diagramas de caja y bigotes las siguientes distribuciones:

a) 1 1 2 3 4 4 5 5
5 6 7 7 7 8 9 10

b) 1 2 2 3 3   3 4 4 4 4   4 5 5 5 5
5 5 5 5 5   6 6 6 6 6   6 6 6 7 7
7 7 7 7 7   7 7 8 8 8   8 9 9 10 10

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Tablas de frecuencias

1 ▼▽▽ En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3,0	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3,0	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3,0	2,9
2,4	3,4	2,0	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3,0	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3,0	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de 1,65 a 4,05.

c) Representa gráficamente esta distribución.

2 ▼▽▽ A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:

87	85	61	51	64	75	80	70	69	82
80	79	82	74	92	76	72	73	63	65
67	71	88	76	68	73	70	76	71	86

Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos (desde 50,5 a 92,5).

Media, desviación típica y C.V.

Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en las siguientes distribuciones:

3 ▼▽▽

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3

4 ▼▽▽

x_i	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

5 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	4
2,05-2,45	5
2,45-2,85	13
2,85-3,25	17
3,25-3,65	8
3,65-4,05	3

6 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
50,5-57,5	1
57,5-64,5	3
64,5-71,5	8
71,5-78,5	8
78,5-85,5	6
85,5-92,5	4

7 ▼▽▽ Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa B, la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.

Medidas de posición

8 ▼▽▽ La mediana y los cuartiles de la distribución de “Aptitud para la música” (escala 1-100) en un colectivo de personas son $Q_1 = 31$, $Me = 46$ y $Q_3 = 67$.

Copia y completa las siguientes afirmaciones:

a) El 75% tiene una aptitud superior o igual a ____.

b) El 25% tiene una aptitud superior o igual a ____.

c) El ____% tiene una aptitud igual o menor a 46 puntos.

d) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 46 e inferior o igual a 67.

e) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 31 e inferior o igual a 67.

9 ▼▽▽ La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:

150169 171 172 172 175 181

182183 177 179 176 184 158

Calcula la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

10 ▼▽▽ Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

11 ▼▽▽ Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18

24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21

29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Diagramas de caja

Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

12 ▼▽▽ La del ejercicio 8.

13 ▼▽▽ La del ejercicio 9.

14 ▼▽▽ La A y la B del ejercicio 10.

Muestreo

15 ▼▽▽ Se quieren realizar los siguientes estudios:

I. Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a su trabajo.

II. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

III. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

IV. Número de horas diarias que ven la televisión los niños y las niñas de tu comunidad autónoma con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

b) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

16 ▼▽▽ Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 400 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos de seleccionarlos y explica por qué.

a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos le parecen más representativos.

b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.

c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.

d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

Aplica lo aprendido

17 ▼▽▽ En una urbanización de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:

0 1 2 3 1 0 1 2 3 1
0 1 1 1 4 0 1 1 1 4
3 2 2 1 1

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

d) Halla la mediana y los cuartiles.

e) Dibuja el diagrama de caja.

Autoevaluación

¿Conoces los parámetros estadísticos $\bar{x}$, σ y C.V.? ¿Los sabes calcular e interpetar?

1 La edad de los visitantes de una exposición está recogida en la siguiente tabla:

EDAD	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75]
N.° DE VIS.	63	95	189	243	175	105

a) Representa los datos en un gráfico adecuado.

b) Halla $\bar{x}$, σ y C.V.

2 Los beneficios, en millones de euros, de dos empresas en seis años consecutivos han sido los siguientes:

A	5,9	2,5	7,4	8,1	4,8	3,7
B	4,5	3,8	5,7	3,5	5,5	4,6

¿Cuál de las dos empresas tiene mayor variación?

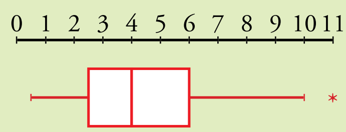
¿Conoces las medidas de posición, mediana, cuartiles y percentiles? ¿Los sabes calcular e interpretar? ¿Sabes utilizarlos para construir o interpretar un diagrama de caja?

3 Halla la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 6 8

Haz el correspondiente diagrama de caja.

4 Indica por qué el diagrama de caja siguiente es incorrecto:



10 Cálculo de probabilidades

Históricamente, el interés por la probabilidad comienza con los juegos de azar. **Cardano,** algebrista italiano del siglo XVI, fue un jugador empedernido en algunas épocas de su vida. Esta pasión le hizo ser conocedor de trucos y fullerías. Acabó escribiendo un libro sobre el juego, en el que, por primera vez, se teoriza sobre las probabilidades.

Fue otro jugador en el siglo XVII, el caballero de Meré, quien indujo, sin saberlo, a que los matemáticos **Pascal** y **Fermat** mantuvieran una fructífera correspondencia: en sus cartas, proponían soluciones a algunos problemas sobre juegos planteados por Meré (al tirar cuatro dados, ¿qué es más ventajoso, apostar por "algún 6" o por "ningún 6"?), y elucubraban sobre otras situaciones probabilísticas. Así nació, con estos dos genios, la base de la teoría de las probabilidades.

Ni Pascal ni Fermat publicaron sus conclusiones, pero sí lo hizo **Huygens** en 1657, en un breve libro titulado *Sobre los razonamientos en los juegos de azar.*

En 1713, **Jacques Bernouilli** recogió lo escrito por Huygens, lo amplió y completó, construyendo así el primer libro importante sobre la teoría de las probabilidades: *Arte de la conjetura.*

Laplace, en 1812, publicó *Teoría analítica de las probabilidades,* donde recogió y organizó multitud de resultados que había ido obteniendo y difundiendo desde hacía 40 años. Se trata de la mayor aportación de la historia a esta teoría. Pocos años después publicó *Ensayo filosófico de las probabilidades,* destinado a los no expertos. De este libro es la siguiente frase:

La teoría de las probabilidades es solo sentido común expresado con números.

DEBERÁS RECORDAR

- Qué son los sucesos.
- Qué experiencias son regulares y cuáles son irregulares.

1 Probabilidades en experiencias simples

Experiencias irregulares

Para calcular la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, o un dado cargado, o extraer una bola de una bolsa cuya composición ignoramos…) no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces hagamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

Por ejemplo, si en una bolsa hay bolas de cinco colores (🔴, 🟢, 🔵, ⚪ y ⚫) y realizamos 100 veces la experiencia de extraer, mirar, anotar y devolver a la bolsa, obteniendo los siguientes resultados:

f(🔴) = 34, f(🟢) = 23, f(🔵) = 21, f(⚪) = 8, f(⚫) = 14

les asignaríamos los siguientes valores a las probabilidades:

P[🔴] ≈ fr(🔴) = 0,34; P[🟢] ≈ fr(🟢) = 0,23; P[🔵] ≈ fr(🔵) = 0,21;

P[⚪] ≈ fr(⚪) = 0,08; P[⚫] ≈ fr(⚫) = 0,14

Experiencias regulares. Ley de Laplace

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa…), entra en juego la ley de Laplace. Recordémosla:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene k casos, entonces su probabilidad es k/n.

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una bolsa hay 40 bolas idénticas salvo en el color. De ellas, 15 son rojas. Entonces, al extraer una bola al azar:

$$P[\text{Roja}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Problemas resueltos

1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro perfecto, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:

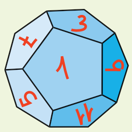
a) P[8]

b) P[menor que 3]

c) P[impar]

d) P[número primo]

e) P[mayor que 4 pero menor que 8]



1. a) $P[8] = \frac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el "8" es uno de ellos.

b) Solo 1 y 2 son menores que 3 → $P[\text{menor que } 3] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) Hay 6 números impares menores que 12 → $P[\text{impar}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos → $P[\text{número primo}] = \frac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

2. Con un molde se han fabricado varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿cómo evaluaremos la probabilidad de cada cara?

2. Podemos suponer que todos los dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamientos. Estos son los resultados:

	1	2	3	4	5	6
f	154	123	236	105	201	181
fr	0,154	0,123	0,236	0,105	0,201	0,181

Observamos que algunas de las frecuencias relativas se diferencian demasiado del valor 1/6 = 0,166…

Puesto que el número de experimentaciones (1 000) es suficientemente grande, podemos concluir que el dado es defectuoso. Tomaremos las frecuencias relativas de las distintas caras como valores aproximados de sus respectivas probabilidades.

3. Lanzamos dos dados correctos y anotamos las diferencias de las puntuaciones.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Qué probabilidad tiene cada caso?

c) Hallar la probabilidad del suceso “la diferencia es mayor que 3”.

3.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

A partir de la tabla de la izquierda, construimos la distribución siguiente:

DIFERENCIAS	0	1	2	3	4	5
N.° DE VECES	6	10	8	6	4	2
PROBABILIDAD	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

a) y b) En la tabla anterior aparece el espacio muestral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con las probabilidades asociadas a cada caso.

c) P[Diferencia mayor que 3] = $P[\{4, 5\}] = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6$

4. Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades:

FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAYOR QUE 5 (6, 7).

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Di la probabilidad en cada caso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de “no FIGURA”?

4. Hay 40 cartas. La probabilidad de cada una es 1/40.

a) En este juego, el espacio muestral es E = {“FIGURA”, “AS”, “< 6”, “> 5”}.

b) Hay 3 figuras en cada palo ⟶ P[FIGURA] = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hay 4 ases en la baraja ⟶ P[AS] = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hay 4 números < 6 en cada palo → P[< 6] = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hay 2 números > 5 en cada palo → P[> 5] = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) P[no FIGURA] = 1 – P[FIGURA] = 1 – 0,3 = 0,7

Actividades

1 Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P[múltiplo de 3]

b) P[menor que 5]

c) P[número primo]

d) P[no múltiplo de 3]

2 Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones*.

a) Escribe el espacio muestral y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) Halla la probabilidad del suceso “la menor puntuación es menor que 4” = “< 4”.

c) Halla P[no < 4].

2 Probabilidades en experiencias compuestas

Recuerda

Las siguientes experiencias:

a) *extraer tres cartas de una baraja,*

b) *lanzar cinco dados,*

se pueden considerar como experiencias compuestas de otras simples:

a) *Extraer una carta de una baraja, después otra, y después otra.*

b) *Lanzar un dado, y otro… y otro.*

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser **dependientes** o **independientes.**

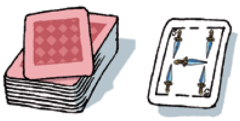
Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas (un dado y otro dado) independientes, pues el resultado de cada dado no influye en el otro.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

La 1.ª es as. Quedan 3 ases en 39 cartas.

La 1.ª no es as. Quedan 4 ases en 39 cartas.



Por ejemplo, extraer dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra carta) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda:

1.ª extracción	quedan	2.ª extracción
as	39 cartas, 3 ases	P[as] = 3/39
no as	39 cartas, 4 ases	P[as] = 4/39

Como vemos, las probabilidades de los sucesos en la 2.ª extracción *dependen* de lo que ocurrió en la 1.ª.

Extracciones con o sin reemplazamiento

"Extraemos una bola de esta bolsa y, después, otra". Falta un dato: ¿la que hemos extraído la echamos de nuevo a la bolsa antes de la 2.ª extracción o no?

— "Sacamos una bola, la miramos, la devolvemos a la bolsa, removemos y volvemos a sacar", lo resumimos así: "sacamos dos bolas **con reemplazamiento**".

— "Sacamos una bola, la miramos y sacamos otra" se resume así: "sacamos dos bolas **sin reemplazamiento**".

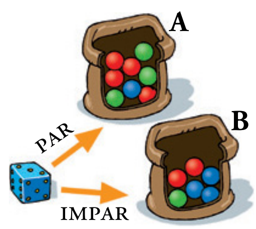
En el primer caso, las experiencias son independientes. En el segundo, dependientes.

Actividades

1

Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

2



Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?

3 Composición de experiencias independientes

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Experiencias independientes

El resultado de cada experiencia **no influye** en el resultado de la siguiente.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, etc., es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y} \ldots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \ldots$$

Problemas resueltos

1. Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V). Hallar estas probabilidades:

a) 3 en R y 5 en V

b) 5 en R y 3 en V

c) un 3 y un 5

d) PAR en R y > 2 en V

"PAR" = {2, 4, 6}

"> 2" = {3, 4, 5, 6}

1. a) $P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] = P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) $P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] = P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) $P[\text{un } 3 \text{ y un } 5] = P[3 \text{ en R y } 5 \text{ en V}] + P[5 \text{ en R y } 3 \text{ en V}] =$

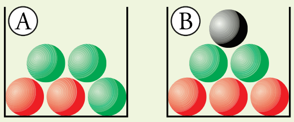
$$= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) $P[\text{PAR en R y} > 2 \text{ en V}] = P[\text{PAR}] \cdot P[> 2] =$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
⚁	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
⚂	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
⚃	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
⚄	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
⚅	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

2. Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:



a) P[🔴 y 🔴]

b) P[🔴 y 🟢]

c) P[🟢 y 🔴]

d) P[una de ellas 🔴 y otra 🟢]

e) P[la segunda ⚫]

2. a) P[🔴 y 🔴] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🔴] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) P[🔴 y 🟢] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🟢] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) P[🟢 y 🔴] = P[1.ª 🟢] · P[2.ª 🔴] = $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) P[una de ellas 🔴 y otra 🟢] = P[🔴 y 🟢] + P[🟢 y 🔴] = $\frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) P[la 2.ª ⚫] = P[cualquier cosa la 1.ª] · P[la 2.ª ⚫] = $1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Actividades

1 Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] b) P[3 ASES]

c) P[un AS y dos FIGURAS] d) P[ningún AS]

2 Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras b) alguna cruz

3 Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) P[tres caras] b) P[ninguna cara] c) P[alguna cara]

4 Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

4 Composición de experiencias dependientes

Experiencias dependientes

El resultado de cada experiencia influye en las probabilidades de las siguientes.

Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la 1.ª y S_2 en la 2.ª es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la 2.ª} / S_1 \text{ en la 1.ª}] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1]$$

La expresión $P[S_2 / S_1]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de S_2 **condicionada** a que ocurra S_1.

Para tres sucesos dependientes:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$$

La probabilidad condicionada $P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$ significa "probabilidad de que ocurra S_3 supuesto que ocurrieron S_1 y S_2".

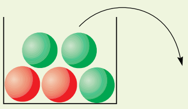
Problema resuelto

De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambas sean verdes.

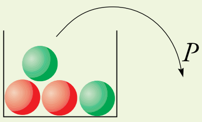
b) La 1.ª sea roja y la 2.ª verde.

c) Las dos sean rojas.

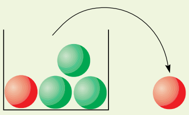


$P[\text{🟢}] = \dfrac{3}{5}$

Si la 1.ª es 🟢



$P[\text{🟢 en este caso}] = \dfrac{2}{4}$



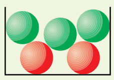
Si la 1.ª es 🔴, quedan cuatro: 1 🔴 y 3 🟢

a) Imaginemos una gran cantidad de gente. Cada uno de ellos tiene una urna con 3 bolas verdes y 2 bolas rojas. Son sometidos a dos pruebas:

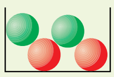
1.ª prueba: Han de extraer bola verde. (La dejan fuera).

2.ª prueba: Han de volver a extraer verde.

Averigüemos qué proporción de gente supera cada prueba y, en consecuencia, qué proporción supera las dos.

PRIMERA EXTRACCIÓN  $P[\text{🟢}] = 3/5$. Por término medio, 3 de cada 5 individuos extraen bola verde y superan la 1.ª prueba.

Ahora, la composición de la urna se modifica dependiendo del resultado de la primera prueba. Como estamos siguiendo la pista a los que extraen bola verde, estos tienen ahora una urna con 2 bolas verdes y 2 bolas rojas. Veamos *qué proporción de ellos* supera la 2.ª prueba.

SEGUNDA EXTRACCIÓN  $P[\text{🟢}] = 2/4$. Por término medio, 2 de cada 4 de los que superan la 1.ª prueba superan también la 2.ª.

Proporción de individuos que superan ambas pruebas: $\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{4} = \dfrac{6}{20}$. Es decir:

$$P[\text{🟢 y 🟢}] = P[\text{🟢 la 1.ª}] \cdot P[\text{🟢 la 2.ª} / \text{🟢 la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

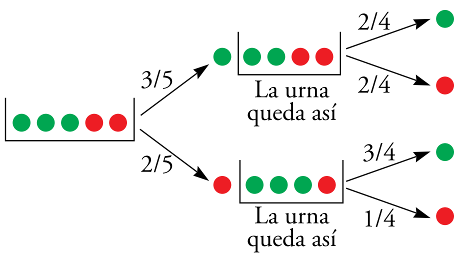
Estas pruebas son **dependientes,** porque el resultado de la primera influye en la segunda.

b) $P[\text{🔴 y 🟢}] = P[\text{🔴 la 1.ª}] \cdot P[\text{🟢 la 2.ª} / \text{🔴 la 1.ª}] = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$

c) $P[\text{🔴 y 🔴}] = P[\text{🔴 la 1.ª}] \cdot P[\text{🔴 la 2.ª} / \text{🔴 la 1.ª}] = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$

Descripción de la experiencia mediante un diagrama en árbol

La experiencia de la página anterior se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**



$P[$🟢 y 🟢$] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🟢 y 🔴$] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🔴 y 🟢$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🔴 y 🔴$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Recuerda

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[$🔴 en la 1.ª$]$

$\frac{3}{4} = P[$🟢 en 2.ª / 🔴 en 1.ª$]$

Problema resuelto

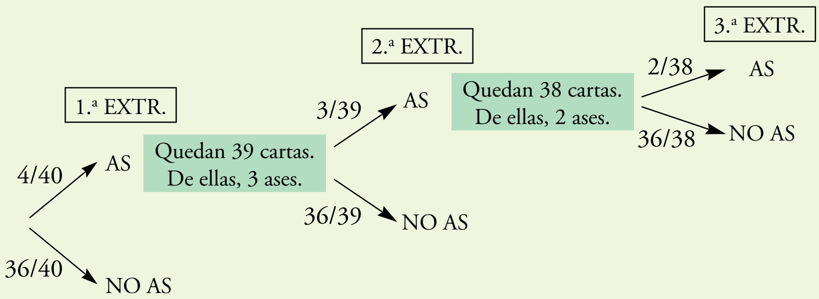
Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.

$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS en 1.ª y AS en 2.ª y AS en 3.ª}] =$

$= P[\text{AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] =$

$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

Lo describimos en un diagrama en árbol:



$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot$

$\cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

Observa

Si en la 1.ª sale AS, quedan 3 ASES en 39 cartas. Por tanto:

$P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] = \frac{3}{39}$

Análogamente:

$P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{2}{38}$

Actividades

1 Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?

2 Copia y completa el diagrama en árbol del problema resuelto de esta página y sobre él halla P[NINGÚN AS].

3 Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

4 Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

5 Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Experiencias simples

1 ▼▽▽ En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída sea un número…:

a) … de una sola cifra. b) … múltiplo de 7.

c) … mayor que 25.

2 ▼▽▽ Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:

a) REY O AS. b) FIGURA Y OROS. c) NO SEA ESPADAS.

3 ▼▽▽ Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación mayor (si coinciden, la de uno de ellos).

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a) Completa en tu cuaderno la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

A: n.° par, B: n.° menor que 4.

Experiencias compuestas

4 ▼▽▽ a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

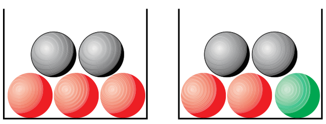
5 ▼▽▽ Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

6 ▼▽▽ Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.



7 ▼▽▽ Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula $P[2 \text{ rojas}]$ y $P[2 \text{ verdes}]$.

Aplica lo aprendido

8 ▼▼▽ Una urna contiene 100 bolas numeradas así:

00, 01, 02, …, 99

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$ b) $y = 3$ c) $x \neq 7$ d) $x > 5$

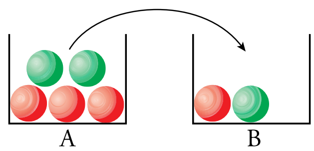
e) $x + y = 9$ f) $x < 3$ g) $y > 7$ h) $y < 7$

9 ▼▽▽ Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

10 ▼▽▽ En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89, la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?

11 ▼▼▽ Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:

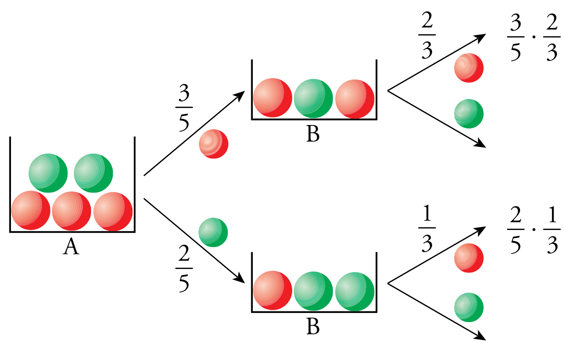


a) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ roja}]$ b) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ verde}]$

c) $P[2.^a \text{ roja} / 1.^a \text{ verde}]$ d) $P[2.^a \text{ roja} / 1.^a \text{ roja}]$

e) $P[2.^a \text{ roja}]$ f) $P[2.^a \text{ verde}]$

☞ *e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el siguiente diagrama:*



12 ▼▼▽ En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.

13 ▼▼▽ Tiramos dos dados correctos. Di cuál es la probabilidad de obtener:

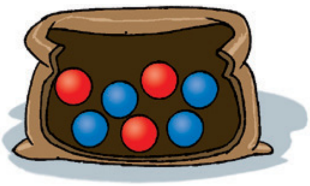
a) En los dos la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

c) En uno de ellos, mayor puntuación que en el otro.

14 ▼▼▽ Se extraen dos bolas de esta bolsa.

Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.



Resuelve problemas

15 ▼▼▽ En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que la experiencia sea:

a) Con reemplazamiento.

b) Sin reemplazamiento.

16 ▼▼▽ Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.

Autoevaluación

¿Resuelves problemas de probabilidad de experiencias simples y compuestas?

1 Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:

– Cinco de copas. – As de oros.

– Cuatro de bastos. – Dos de oros.

Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

2 Lanzamos una moneda y un dado y observamos los resultados obtenidos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener CRUZ y CINCO?

b) ¿Y la de obtener CARA y NÚMERO PAR?

3 Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:

a) Sea 5. b) Sea 6. c) Sea 4.

☞ *Haz una tabla con todos los casos posibles.*

4 Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

A: 7 blancas y 3 negras

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer bola roja.

5 La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.

11 Combinatoria

"¿De cuántas formas distintas se pueden repartir las tres medallas (oro, plata, bronce) los ocho finalistas de una carrera?" Propuestas como esta son propias de la combinatoria: a partir de una colección finita de objetos, averiguar cuántas agrupaciones hay que cumplan ciertas condiciones.

Problemas de este tipo aparecen en todas las culturas y, en muchos casos, relacionadas con situaciones místicas o cabalísticas, como el *I Ching* chino o la *Cábala* judía.

Summa (1914), de **Luca Paccioli,** es la primera obra impresa donde aparecen problemas de combinatoria.

La combinatoria empezó a fraguarse como ciencia paralelamente a la probabilidad y, por tanto, estuvo ligada a los juegos. Aunque fue **Tartaglia** (algebrista italiano del s. XVI) uno de los pioneros, esta ciencia recibió el mayor impulso a partir de la correspondencia mantenida por los franceses **Pascal** y **Fermat** (s. XVII) sobre situaciones de azar inspiradas en las mesas de juego. Los problemas probabilísticos que de ahí surgen se resuelven mediante un enfoque combinatorio.

Bernouilli (s. XVIII) dedicó, en su *Arte de la conjetura,* algunos capítulos a asentar la teoría de la combinatoria, básica para el cálculo de probabilidades.

El término *combinatoria*, tal como lo usamos actualmente, fue introducido por el alemán Leibniz.

Euler (s. XVIII) enriqueció la combinatoria con nuevas líneas de trabajo. Una de ellas, *los grafos,* comenzó su andadura con la resolución del reto de *los puentes de Königsberg.*

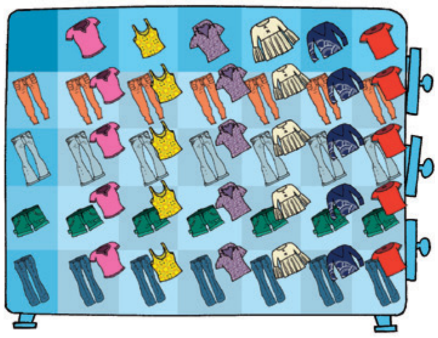
DEBERÁS RECORDAR

- La utilidad del diagrama en árbol.

1 En qué consiste la combinatoria

La combinatoria se ocupa de contar agrupaciones realizadas con un determinado criterio. Veamos algunos ejemplos:

1. *Irene tiene 4 pantalones y 6 camisetas. ¿Cuántas indumentarias distintas puede elegir?*



Cada *camiseta* puede ponerse con cada *pantalón.* Por tanto, el número de *indumentarias* es $4 \times 6 = 24$.

2. *Cuatro amigos,* A, B, C, D, *diseñan un campeonato de pimpón, todos contra todos, a un vuelta. ¿Cuántos partidos se han de jugar?*

A - B   B - C   C - D   En total, 6 partidos.

A - C   B - D

A - D

3. *¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado de color rojo y otro de color verde?*

Cada resultado del dado rojo se puede emparejar con cada uno de los del dado verde. Por tanto, habrá $6 \times 6 = 36$ resultados.

4. *¿De cuántas formas se pueden sentar 3 amigos* P, Q, R, *en un banco que tiene tres lugares __ __ __?*

Hagámoslas:

P Q R   P R Q   Q P R   Q R P   R P Q   R Q P

Hay seis formas distintas.

Actividades

1 Irene, además de 4 pantalones y 6 camisetas, tiene 3 gorras. ¿Cuántas indumentarias de pantalón-camiseta-gorra puede llevar?

2 ¿Cuántos partidos han de jugar 5 amigos, A, B, C, D, E, para completar un campeonato de pimpón, todos contra todos, a una vuelta?

3 Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

4 En una carrera compiten 4 corredores, P, Q, R, S, y se entregan dos copas: una grande al campeón y otra pequeña al segundo. ¿De cuántas formas se puede hacer el reparto?

2 El diagrama en árbol

Como has podido ver en el apartado anterior, para resolver un problema de combinatoria es fundamental tener muy claro cuáles son las condiciones de las agrupaciones buscadas y proceder con orden y sistema a su formación o a su recuento. Para esta forma de proceder, es sumamente útil el diagrama en árbol. Veamos en qué consiste mediante algunos ejemplos:

QUINIELA	
Mallorca – Deportivo	❑
Betis – Albacete	❑

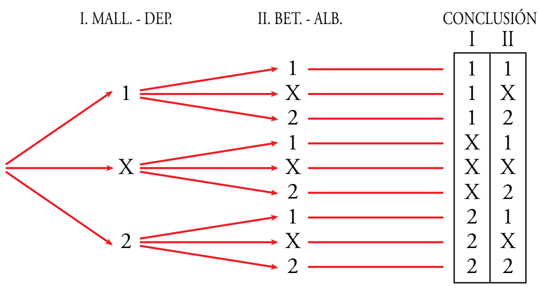
- **Ejemplo 1.** *Se juegan los partidos de ida de las semifinales de la Copa del Rey de fútbol. Son Mallorca-Deportivo y Betis-Albacete. Se confecciona una quiniela con los dos partidos.*

  En cada casillero hay que poner 1, X o 2. Para ganar, hay que acertar los dos resultados.

  a) ¿Cuántas quinielas hay que rellenar para tener la seguridad de ganar?

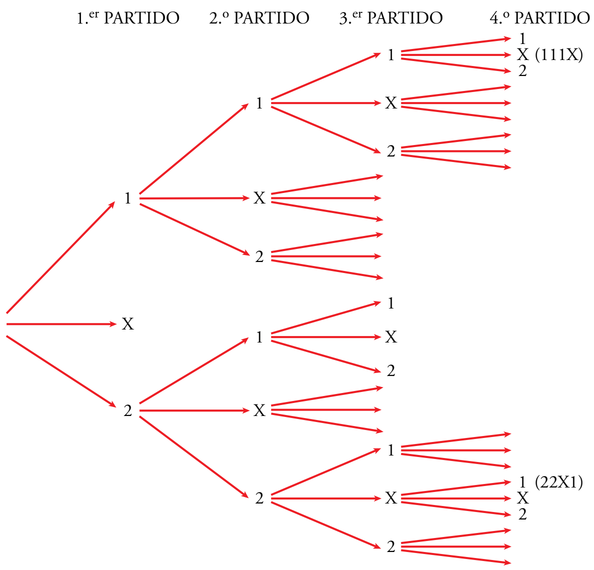
  b) ¿Cuántas quinielas habría que haber hecho la semana anterior para acertar los cuatro partidos de vuelta de los cuartos de final de la Copa del Rey?

  a): ¿Cuántas quinielas hay que hacer para acertar los dos partidos?



Tres posibilidades para acertar el primer partido. A cada una de esas tres posibilidades le corresponden las tres que se necesitan para acertar el otro partido.

$3 \cdot 3 = 9$ quinielas



El **diagrama en árbol** tiene la ventaja de que permite pensar, paso a paso, en este tipo de problemas en los que las distintas posibilidades se van multiplicando.

Antes de dar cada paso, nos cuestionaremos a cuántas ramas da lugar la nueva situación en la que nos encontramos.

Resolvamos el apartado **b).**

En cada paso, el número de posibilidades se multiplica por 3, pues el resultado de cada partido no depende de los anteriores.

El número de quinielas posibles es:

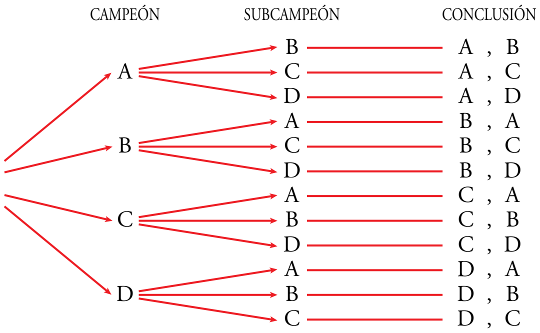
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$$

- **Ejemplo 2**. *Antonio, Beatriz, Carmen y Darío juegan la fase final de un campeonato de pimpón. Hay una copa para el campeón y una placa para el subcampeón.*

  a) ¿De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?

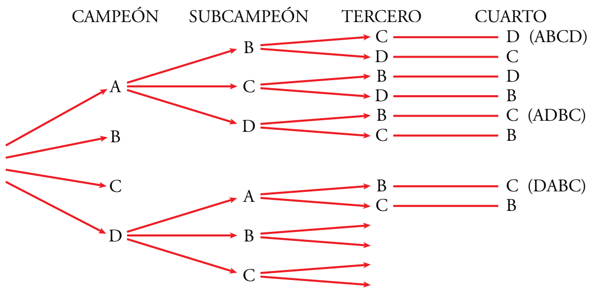
  b) ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

a): ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos trofeos?



Hay cuatro posibilidades para el puesto de campeón. Cada una de ellas se puede completar con 3 opciones para el subcampeón.

$4 \cdot 3 = 12$ posibilidades



b): ¿Cuántas posibles clasificaciones finales puede haber?

Hay 4 posibles campeones, pero, una vez fijado el campeón, solo puede haber 3 subcampeones. Y si fijamos al 1.° y al 2.°, solo quedan 2 aspirantes para el 3.^{er} lugar. Conocidos los 1.°, 2.° y 3.°, para el 4.° lugar solo queda un candidato.

El número de posibilidades es:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Con el **diagrama en árbol** se puede pensar paso a paso y permite ver cuáles son las distintas posibilidades que se dan en cada uno de esos pasos.

Si en lugar de pormenorizar todas las posibilidades solo queremos contarlas, podremos dejar el árbol incompleto o, incluso, simplemente imaginarlo:

¿Cuántas flechas hay que poner en primer lugar? ¿Cuántas salen de cada uno de esos resultados?…

Ejercicio resuelto

¿De cuántas formas se pueden repartir 3 medallas entre las 12 participantes de una carrera?

1.^{er} lugar: 12.
2.° lugar: Por cada una de las anteriores, 11.
3.^{er} lugar: Por cada una de las anteriores, 10.

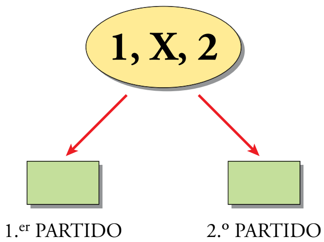
Total:
$12 \times 11 \times 10 =$
$= 1\,320$ posibilidades

Actividades

1 Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les dice: "Escoged cada uno el libro que queráis de estos", y les muestra 10 libros distintos. ¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

3 Variaciones y permutaciones

Algunos de los problemas que se han resuelto en los apartados anteriores tienen aspectos comunes. Los clasificaremos en modelos que podemos tratar teóricamente, es decir, de forma general.



Variaciones con repetición

Vamos a recuperar un problema, resuelto antes, para que nos sirva de modelo.

- *Se juegan dos partidos. ¿Cuántas quinielas hemos de hacer para acertar los dos?*

  Disponemos de tres signos, 1, X, 2. Con ellos hemos de llenar dos lugares. Podemos poner el mismo signo en los dos lugares (es decir, puede repetirse). El número de posibilidades es $3 \cdot 3 = 3^2$.

- *¿Y para acertar cuatro partidos?*

  Con los tres signos, 1, X, 2, hemos de llenar cuatro lugares, pudiendo repetirse una o más veces los signos utilizados.

  El número de posibilidades es $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$.

Variaciones con repetición

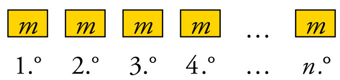
- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de esos elementos.
- Pueden estar repetidos.
- Importa el orden en que se ponen.

Disponemos de m elementos. Formamos agrupaciones ordenadas ("tiras") de n de ellos, repetidos o no.

A estas agrupaciones se las llama **variaciones con repetición** de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$. Al número de ellas se le designa por $VR_{m,\,n}$ (o bien VR_m^n).

$$VR_{m,\,n} = m^n$$

Justificación de la fórmula



En el primer lugar podemos situar cualquiera de los m elementos. En el 2.º lugar, también, sin importar cuál es el que ocupa el 1.º. Y así sucesivamente, cada lugar puede ser ocupado por cualquiera de los m elementos sin importar cuáles son los que ocupan los lugares anteriores. Por tanto, el número de posibilidades es $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$ (n factores) $= m^n$.

Actividades

Resuelve cada enunciado de dos formas:

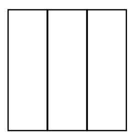
a) Realizando un diagrama en árbol o razonando como si lo realizaras.

b) Reconociendo el modelo de variaciones con repetición y aplicando la fórmula.

1 ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras impares?

2 Lanzamos un dado 4 veces. Importa el orden en que salen los números. ¿Cuántos resultados distintos pueden darse?

3 Disponemos de 7 colores con los que hemos de pintar las tres franjas adjuntas.



¿Cuántas banderas salen?

Notas: 1. Cada franja hay que llenarla con un solo color.

2. Dos o las tres franjas pueden ser del mismo color.

3. Dos banderas con los mismos colores colocados en distinto orden son distintas.

4 ¿Cuántas quinielas hemos de rellenar para acertar, con seguridad, los 15 resultados?

Variaciones ordinarias

- *¿De cuántas formas pueden obtener los puestos 1.° y 2.° los cuatro participantes en un torneo?*

  Disponemos de cuatro elementos, A, B, C, D. Para el 1.er lugar, hay 4 opciones. Una vez fijado el primero, para el 2.° lugar, quedan 3 opciones (no hay repetición, ya que el que queda 1.° no puede quedar 2.°).

  El número de posibilidades es $4 \cdot 3 = 12$.

- *¿De cuántas formas se pueden repartir las 3 medallas los 8 finalistas de una carrera?*

  Disponemos de 8 elementos. Hemos de clasificar, ordenadamente, a 3.

  Para el 1.er lugar, hay 8 posibilidades. Fijado el 1.°, hay 7 posibles segundos puestos. Fijados el 1.° y el 2.°, hay 6 posibles terceros puestos.

  Número de posibilidades: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Variaciones ordinarias

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de ellos. Obviamente, $n \le m$.
- No pueden repetirse.
- Importa el orden en que se ponen.

m	$m-1$	$m-2$	…	$m-n+1$
1.°	2.°	3.°	…	n.°

Disponemos de m elementos. Formamos agrupaciones ordenadas ("tiras") de n de ellos, sin que se repita ninguno. A estas agrupaciones se las llama **variaciones ordinarias,** o simplemente, **variaciones** de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$. Al número de ellas se le designa por $V_{m,\,n}$ (o bien V_m^n).

$$V_{m,\,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots}_{n \text{ factores decrecientes}}$$

Permutaciones

- *¿De cuántas formas pueden quedar clasificados los cuatro participantes en un torneo?*

  $$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ formas}$$

- *¿Y los ocho finalistas olímpicos en una carrera?*

  $$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

Permutaciones

- Hay m elementos de partida.
- Se toman los m.
- No pueden repetirse.
- Lo único que importa es el orden.

Las distintas formas en que se pueden ordenar los $\boldsymbol{m}$ elementos de un conjunto se llaman **permutaciones.** Su número se designa por P_m (se lee "permutaciones de m elementos") y es igual al número de variaciones de m elementos tomados m a m.

$$P_m = V_{m,\,m} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A este número se le llama $\boldsymbol{m}$ **factorial** y se escribe $\boldsymbol{m!}$

Por ejemplo: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

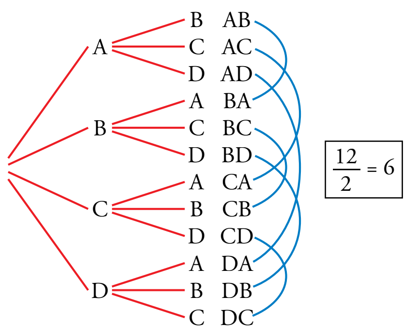
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Actividades

5 Enuncia un problema similar al de las banderas de la página anterior que se resuelva mediante variaciones ordinarias y resuélvelo razonadamente (diagrama en árbol) y aplicando la fórmula.

6 En los ejercicios propuestos y resueltos en los dos apartados anteriores, identifica cuáles responden al modelo de variaciones con repetición, de variaciones ordinarias o de permutaciones, y resuélvelos mediante las fórmulas.

4 Cuando no influye el orden



Cada partido está dos veces.

Empecemos poniendo algunos ejemplos que nos sirvan de referencia.

- *Cuatro amigos juegan un campeonato de pimpón por el sistema de liga (todos contra todos) a una sola vuelta. ¿Cuántos partidos jugaron?*

  Si utilizamos un diagrama en árbol para contar el número de partidos, obtendremos $4 \cdot 3 = 12$, pero nos encontraremos con que aparecerá cada partido dos veces: AB y BA, AC y CA, CD y DC…

  Por tanto, el número total de partidos reales se obtiene dividiendo por 2.

  La respuesta es $\frac{12}{2} = 6$.

- *Diez antiguos amigos se citan en un lugar a cierta hora. Al encontrarse, ¿cuántos apretones de manos se dan?*

  Si influyera el orden (A saluda a B, B saluda a A), entonces habría $10 \cdot 9 = 90$ saludos. Como no influye el orden, cada saludo se ha considerado dos veces.

  Por tanto, el número de apretones de mano es $90 : 2 = 45$.

- *En una carrera con 8 corredores se clasifican para la final los tres primeros. ¿De cuántas formas puede efectuarse la clasificación?*

  Si influyera el orden, ¿de cuántas formas distintas pueden asignarse los tres primeros puestos?

  La respuesta es $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

  Teniendo en cuenta que no influye el orden, ¿cuántas veces hemos contado la clasificación de los mismos individuos?

  ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

  Seis formas, tantas como permutaciones de 3 elementos: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

  Por tanto, el número de posibles clasificaciones es $336 : 6 = 56$.

La estrategia que se ha utilizado en estos tres problemas es la misma:

Hemos reinterpretado el enunciado como si el orden en que se seleccionan los elementos sí influyera. Después, hemos averiguado el número de veces que se ha contado cada uno de los casos que nos interesan, y hemos dividido por él.

Es importante que adquieras destreza con esta estrategia, porque te ayudará a resolver numerosos problemas.

Estrategia

Contar como si influyera el orden y dividir por el número de repeticiones.

Actividades

1 En un monte hay 7 puestos de vigilancia contra incendios y cada uno de ellos está unido a los demás por un camino. ¿Cuántos caminos habrá en total?

2 Vicente quiere regalar a su amigo Carlos 3 discos, y los quiere elegir entre los 10 que más le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

5 Combinaciones

La palabra "combinación"

La "combinatoria" es el arte de "combinar", es decir, de hacer y contar "combinaciones" entre objetos siguiendo ciertas reglas. En este contexto, la palabra *combinación* puede significar "agrupamiento", "selección con ciertos criterios"… Tiene un *significado amplio*.

Pero, a partir de ahora, la palabra **combinación** adquiere un significado muy preciso: el que le damos en esta página.

Por tanto, en adelante, cuando se hable de "combinaciones", deberás fijarte si se refiere a la expresión de siempre, en sentido amplio, o bien a esta otra tan concreta.

Vamos a recuperar algunos problemas resueltos en el apartado anterior que nos sirvan de modelo para el tratamiento teórico de un nuevo tipo de agrupamiento.

- *¿Cuántos partidos han de jugar 4 amigos si deciden enfrentarse cada uno contra todos los demás?*

  Disponemos de 4 elementos, A, B, C, D. Queremos agruparlos de dos en dos, sin que importe el orden. El número de posibilidades se obtiene contándolas como si importara el orden $(4 \cdot 3)$ y, después, dividiendo por el número de veces que está repetida cada opción.

  Resultado: $\dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$

- *¿Cuántos apretones de mano se darán 10 amigos que se encuentran?*

  Análogamente, contamos los saludos como si importara el orden (A saluda a B o B saluda a A). Serían $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9$. Después, dividimos por 2.

  Resultado: $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$

- *En un colectivo de 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden elegir los 3 representantes que acudirán a una cierta reunión?*

  Aunque no importa el orden en que salgan elegidos, empecemos contándolos como si importara: $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

  Pero como no influye el orden, cada una de las posibles elecciones la hemos contado 6 veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Tantas como formas en que se pueden ordenar estos 3 elementos, es decir:

  $$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ (permutaciones de 3 elementos)}$$

  Por tanto, el número de posibles elecciones es: $\dfrac{V_{10,\,3}}{P_3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Generalicemos estos resultados:

Combinaciones

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de ellos.
- No pueden estar repetidos.
- No importa el orden.

Disponemos de m elementos. Se llaman **combinaciones** a las distintas agrupaciones que podemos formar tomando n de ellos, sin que importe el orden en que aparezcan y sin que puedan repetirse. Su número se designa por $C_{m,\,n}$ (o bien C_m^n, y se lee "combinaciones de $\boldsymbol{m}$ elementos tomados $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{n}$").

$$C_{m,\,n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n} = \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Actividades

1 Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro coplanarios. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Cuántos planos que se apoyen en tres de ellos? (ALINEADOS: Sobre la misma línea recta. COPLANARIOS: Sobre el mismo plano).

2 ¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?

¿Cuántas mezclas de tres colores?

¿Y de cuatro colores?

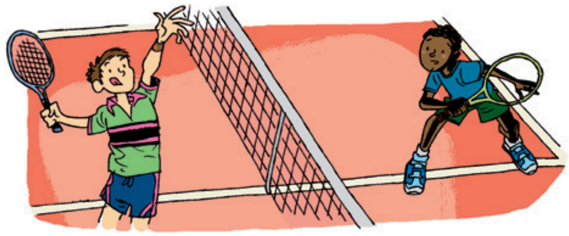
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Formar agrupaciones

1 ▼▽▽ Dos amigos juegan al tenis y acuerdan que será vencedor el primero que logre ganar dos sets. Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido.



2 ▼▽▽ a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?

b) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1?

Ten en cuenta que 01101 = 1 101 no es un número de cinco cifras.

3 ▼▽▽ Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos se pueden formar? Escríbelos todos.

4 ▼▽▽ Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.

Utilizar las fórmulas

5 ▼▽▽ Calcula:

a) $VR_{4,\,3}$ b) $VR_{3,\,4}$ c) $V_{7,\,3}$ d) P_7

e) $C_{6,\,4}$ f) $V_{9,\,5}$ g) $\dfrac{P_{10}}{P_8}$ h) $C_{10,\,8}$

6 ▼▽▽ Calcula:

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3}$ b) $\dfrac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}}$ c) $\dfrac{P_4}{V_{4,\,3}}$

d) $\dfrac{P_5}{P_3}$ e) $\dfrac{P_{10}}{P_9}$ f) $\dfrac{P_{12}}{P_9}$

7 ▼▽▽ Las expresiones $VR_{8,2}$; P_8; $V_{8,2}$; $C_{8,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:

a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario con 8 participantes.

8 ▼▽▽ **Ocho problemas muy parecidos.** En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es: *¿De cuántas formas se puede hacer?*

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3, P_6, VR_6^3, 1, VR_3^6, V_6^3. Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

9 ▼▼▽ ¿De cuántas formas pueden repartirse 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?

10 ▼▼▽ Para formar un equipo de baloncesto, hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si elige a dos jugadores y los mantiene fijos, ¿cuántos equipos distintos podrá hacer con los ocho que le quedan?

11 ▼▼▽ Se van a celebrar elecciones en una comunidad de vecinos y hay que elegir al presidente, al secretario y al tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

12 ▼▼▽ Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

13 ▼▼▽ Los participantes de un concurso tienen que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que está escrita cada una de las letras de la palabra PREMIO.

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Les ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener de esta forma?

14 ▼▼▽ ¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos?

¿Y si el banco es de 3 asientos?

15 ▼▽▽ Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes. ¿De cuántas formas las puedes seleccionar?

16 ▼▽▽ El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.

Por ejemplo: $\boxed{0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}$

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

Aplica lo aprendido

17 ▼▼▽ El número 75 775 está formado por dos cincos y tres sietes.

¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres sietes?

18 ▼▽▽ En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:

- La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.
- Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

19 ▼▼▽ Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?

Autoevaluación

¿Conoces los agrupamientos combinatorios clásicos (variaciones, permutaciones, combinaciones), las fórmulas para calcular su número y los aplicas a la resolución de problemas?

1 En un examen, el profesor ha puesto 7 problemas, de los que hay que elegir 5.

¿Cuántas elecciones se puede plantear un alumno?

2 ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 2 y 3?

3 ¿De cuántas formas podemos elegir al delegado y al subdelegado de un curso en el que hay siete candidatos?

¿Utilizas el diagrama en árbol y otras estrategias para formar o contar agrupaciones siguiendo ciertos criterios?

4 Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.