1 FRACCIONES Y DECIMALES

Página 11

Resuelve

1 **Expresa $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{5}{8}$ al estilo egipcio, como suma de fracciones unitarias.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

2 **Comprueba que $\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$ y $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}$ son dos formas de poner, al estilo egipcio, un mismo número fraccionario. ¿Cuál es?**

Operamos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{77 + 21 + 1}{231} = \frac{99}{231} = \frac{3}{7}$$

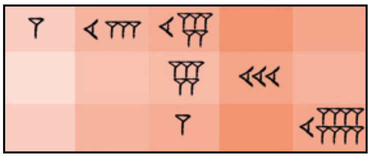
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{7 + 4 + 1}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

3 **El número 3;8,29,44 está puesto en forma sexagesimal. Exprésalo como suma de fracciones cuyos denominadores sean potencias de base 60 (3 + + 8/60 + …) y pásalo a forma decimal. ¿Reconoces este número?**

$$3;\ 8,\ 29,\ 44 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3,14159259259$$

Esta es una aproximación del número π.

4 **¿Qué números ves en esta tablilla? Los colores de las columnas corresponden a las mismas unidades que las de la tabla de la página anterior.**



$$1 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 + 15 = 3\,600 + 780 + 15 = 4\,395$$

$$5 + \frac{30}{60} = 5 + 0,5 = 5,5$$

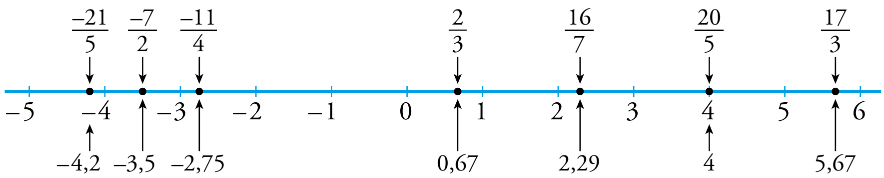
$$1 + \frac{18}{60^2} = 1 + 0,005\ldots = 1,005\ldots$$

1 FRACCIONES

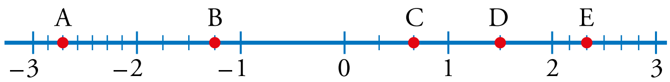
Página 12

1 **Dibuja en tu cuaderno una recta como esta y sitúa sobre ella, de forma aproximada, los siguientes números:**

$$\frac{17}{3},\ -\frac{11}{4},\ \frac{20}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{16}{7},\ -\frac{21}{5},\ -\frac{7}{2}$$



2 **¿A qué fracciones corresponden estos puntos de la recta?**



$$A = \frac{-19}{7};\ B = \frac{-5}{4};\ C = \frac{2}{3};\ D = \frac{3}{2};\ E = \frac{14}{6};$$

3 **Simplifica estas fracciones:**

$$\frac{2}{4},\ \frac{2}{6},\ \frac{5}{10},\ \frac{10}{15},\ \frac{-20}{30},\ \frac{30}{40},\ \frac{-30}{-45},\ \frac{40}{-60}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2};\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3};\ \frac{5}{10} = \frac{1}{2};\ \frac{10}{15} = \frac{1}{3};\ \frac{-20}{30} = \frac{-2}{3};\ \frac{30}{40} = \frac{3}{4};\ \frac{-30}{-45} = \frac{2}{3};\ \frac{40}{-60} = \frac{2}{-3}$$

4 **Relaciona cada fracción con su correspondiente fracción irreducible:**

a) $\frac{6}{18}$ **b)** $\frac{15}{20}$ **I)** $\frac{3}{4}$ **II)** $\frac{-2}{5}$

c) $\frac{-15}{40}$ **d)** $\frac{14}{-35}$ **III)** $\frac{1}{3}$ **IV)** $\frac{-3}{8}$

a) → III); b) → I); c) → IV); d) → II)

Página 13

5 ¿Verdadero o falso?

a) $\frac{2}{5} > -\frac{7}{4}$ **porque el primero es positivo y el segundo, negativo.**

b) $\frac{7}{3} > \frac{2}{5}$ **porque el primero es mayor que 1 y el segundo, menor que 1.**

c) $\frac{8}{3} > \frac{7}{4}$ **porque el primero es mayor que 2 y el segundo, menor que 2.**

d) $-\frac{8}{3} > -\frac{7}{4}$ **porque el primero es mayor que –2 y el segundo, menor que –2.**

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Falso. $-\frac{8}{3} < -2$ y $-\frac{7}{4} > -2$. Es decir, $-\frac{8}{3} < -\frac{7}{4}$.

6 Indica si estas fracciones son o no equivalentes simplificando y mediante productos cruzados:

a) $\frac{12}{20}$ **y** $\frac{21}{35}$ **b)** $\frac{36}{102}$ **y** $\frac{78}{221}$

a) Primero vamos a verlo simplificando. Para ello buscamos sus fracciones irreducibles y comprobamos si coinciden.

$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$; $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$

Coinciden, luego son equivalentes.

Ahora lo comprobamos mediante los productos cruzados.

$13 \cdot 35 \overset{?}{=} 20 \cdot 21$

$420 = 420$

Coinciden, luego son equivalentes.

b) Primero vamos a verlo simplificando. Para ello buscamos sus fracciones irreducibles y comprobamos si coinciden.

$\frac{36}{102} = \frac{6}{17}$; $\frac{78}{221} = \frac{6}{17}$

Coinciden, luego son equivalentes.

Ahora lo comprobamos mediante los productos cruzados.

$36 \cdot 221 \overset{?}{=} 102 \cdot 78$

$7956 = 7956$

Coinciden, luego son equivalentes.

7 A partir de $\frac{60}{126}$**, busca su fracción equivalente…**

a) … con numerador 20. b) … con denominador 42.

a) $\frac{60}{126} = \frac{20}{42}$ b) $\frac{60}{126} = \frac{20}{42}$

8 **Ordena de menor a mayor estas fracciones:**

$$\frac{7}{12} \quad -\frac{6}{4} \quad \frac{4}{6} \quad -\frac{3}{15} \quad \frac{5}{9} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{13}{18}$$

min.c.m. (12, 4, 6, 15, 9, 2, 4, 18) = 180

$$\frac{7}{12} = \frac{105}{180}; \ \frac{-6}{4} = \frac{-270}{180}; \ \frac{4}{6} = \frac{120}{180}; \ \frac{-3}{15} = \frac{-36}{180};$$

$$\frac{5}{9} = \frac{100}{180}; \ \frac{-1}{2} = \frac{-90}{180}; \ \frac{3}{4} = \frac{135}{180}; \ \frac{13}{18} = \frac{130}{180};$$

Por tanto: $\frac{-6}{4} < \frac{-1}{2} < \frac{-3}{15} < \frac{5}{9} < \frac{7}{12} < \frac{4}{6} < \frac{13}{18} < \frac{3}{4}$

2 OPERACIONES CON FRACCIONES

Página 14

Cálculo mental

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$ **b)** $1-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{7}{5}-1$ **e)** $\frac{17}{5}-3$ **f)** $\frac{17}{3}-5$

a) $\frac{3}{3}=1$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{2}{5}$ f) $\frac{2}{3}$

Cálculo mental

a) $3\cdot\frac{7}{9}$ **b)** $\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$ **c)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{13}$ **d)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$

e) $\frac{6}{5}:\frac{3}{5}$ **f)** $\frac{6}{5}:6$ **g)** $\frac{6}{5}:\frac{1}{2}$ **h)** $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}$

a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{13}$ d) $\frac{1}{5}$

e) 2 f) $\frac{1}{5}$ g) $\frac{12}{5}$ h) 2

Efectúa las siguientes operaciones y simplifica los resultados:

1 **a)** $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}$ **b)** $6-\frac{11}{4}$ **c)** $3\cdot\frac{4}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}$ **e)** $\frac{4}{5}:6$ **f)** $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}$

a) $\frac{7}{9}+\frac{11}{12}=\frac{28}{36}+\frac{33}{36}=\frac{61}{36}$

b) $6-\frac{11}{4}=\frac{24}{4}-\frac{11}{4}=\frac{13}{4}$

c) $3\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$

d) $6:\frac{4}{5}=6\cdot\frac{5}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$

e) $\frac{4}{5}:6=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

f) $\frac{4}{5}:\frac{1}{6}=\frac{4}{5}\cdot 6=\frac{24}{5}$

2 **a)** $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}$ **b)** $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)$

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}-\frac{7}{8}\right):\frac{25}{12}=\left(\frac{18}{24}+\frac{28}{24}-\frac{21}{24}\right):\frac{25}{12}=\frac{25}{24}:\frac{25}{12}=\frac{25}{24}\cdot\frac{12}{25}=\frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{13}{15}-\frac{7}{25}\right)\cdot\left(\frac{9}{22}+\frac{-13}{33}\right)=\left(\frac{65}{75}-\frac{21}{75}\right)\cdot\left(\frac{27}{66}+\frac{-26}{66}\right)=\frac{44}{75}\cdot\frac{1}{66}=\frac{2}{225}$

3 **a)** $\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}$ **b)** $\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}$

a) $$\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}=\dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{4}\right)}{\frac{7}{4}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{3}{4}:\frac{7}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$

b) $$\dfrac{(-3)\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)}{(-2)\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{6}{5}\right)}=\dfrac{(-3)\left(\frac{9}{15}-\frac{5}{15}\right)}{(-2)\left(\frac{20}{15}-\frac{18}{15}\right)}=\dfrac{(-3)\cdot\frac{4}{15}}{(-2)\cdot\frac{2}{15}}=\dfrac{\frac{-4}{5}}{\frac{-4}{15}}=\left(\frac{-4}{5}\right):\left(\frac{-4}{15}\right)=\left(\frac{-4}{5}\right)\cdot\left(\frac{-15}{4}\right)=3$$

4 **a)** $\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}$ **b)** $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}$

a) $$\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9}{15}-\frac{2}{15}\right)}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{15}}{6+\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)}=\dfrac{3-\frac{7}{60}}{6+\left(\frac{-1}{25}\right)}=$$

$$=\dfrac{\frac{180}{60}-\frac{7}{60}}{\frac{150}{25}-\frac{1}{25}}=\dfrac{\frac{173}{60}}{\frac{149}{25}}=\frac{173}{60}:\frac{149}{25}=\frac{173}{60}\cdot\frac{25}{149}=\frac{4\,325}{8\,940}=\frac{865}{1\,788}$$

b) $$\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\left(\frac{6}{9}-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{12}-\frac{10}{12}\right)}{\left(\frac{7}{12}-\frac{10}{12}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{-1}{12}\right)}{\left(\frac{-3}{12}\right)\cdot\frac{4}{3}+1}=\dfrac{\frac{-1}{108}}{\frac{-1}{3}+1}=\dfrac{\frac{-1}{108}}{\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{-1}{108}:\frac{2}{3}=\frac{-1}{108}\cdot\frac{3}{2}=\frac{-3}{216}=\frac{-1}{72}$$

Página 15

Cálculo mental

1 **Halla la parte del total que corresponde a cada fracción:**

a) $\frac{1}{2}$ **de 520 000 €.**

b) $\frac{3}{5}$ **de 1 000 000 de personas.**

c) $\frac{7}{10}$ **de 500 edificios.**

a) 260 000 € b) 600 000 personas c) 350 edificios

2 **Di, en cada caso, la cantidad total:**

a) $\frac{1}{2}$ **del total es 350.**

b) $\frac{2}{3}$ **del total es 400.**

c) $\frac{7}{10}$ **del total es 350.**

a) 700 b) 600 c) 500

Observa

1 **Di en cada caso qué fracción falta para completar la unidad:**

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ y $\frac{?}{?}$ **b)** $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ **c)** $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ y $\frac{?}{?}$ **d)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ y $\frac{?}{?}$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{1}{8}$

5 **Un ciclista ha recorrido los 5/9 de la etapa de hoy, de 216 km. ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos?**

$\frac{5}{9} \cdot 216 = 120$

Lleva recorridos 120 km.

6 **He sacado del banco 3 900 €, que son los 3/11 de mis ahorros. ¿A cuánto ascienden mis ahorros?**

$3\,900 \cdot \frac{11}{3} = 14\,300$ € son la totalidad de mis ahorros.

7 **De una balsa con 5 250 litros de agua, corresponden 4/15 a Braulia; 2/5, a Enrique, y el resto, a Ruperta. Ruperta dedica 3/10 de su parte a regar tomates, y el resto, a los frutales. ¿Cuánta agua dedica Ruperta a los frutales?**

$1 - \frac{4}{15} - \frac{2}{5} = \frac{15 - 4 - 6}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ de la balsa le corresponde a Ruperta.

Ruperta dedica $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ a los frutales.

$\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5\,250 = 1\,225$ L de agua dedica a regar frutales.

3 ▶ NÚMEROS DECIMALES

Página 16

1 Indica qué tipo de número decimal es cada uno de los siguientes:

$3{,}52$ $\quad 2{,}\overset{\frown}{8}$ $\quad 1{,}\overset{\frown}{54}$ $\quad \sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$

$2{,}7$ $\quad 3{,}5222\ldots$ $\quad \pi - 2 = 1{,}1415926\ldots$

$3{,}52$	Decimal exacto.
$2{,}\overset{\frown}{8}$	Decimal periódico puro.
$1{,}\overset{\frown}{54}$	Decimal periódico puro.
$\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$	Decimal no exacto ni periódico.
$2{,}7$	Decimal exacto.
$3{,}5222\ldots$	Decimal periódico mixto.
$\pi - 2 = 1{,}1415926\ldots$	Decimal no exacto ni periódico.

2 Ordena de menor a mayor estos números:

$2{,}\overset{\frown}{5}$ $\quad 2{,}5$ $\quad 2{,}3\overset{\frown}{5}$ $\quad 2{,}505005\ldots$

$2{,}3\overset{\frown}{5} < 2{,}5 < 2{,}505005\ldots < 2{,}\overset{\frown}{5}$

3 Escribe tres números comprendidos entre $2{,}5$ y $2{,}\overset{\frown}{5}$.

Respuesta abierta.

Por ejemplo: $2{,}5 < 2{,}51 < 2{,}52 < 2{,}5\overset{\frown}{2} < 2{,}\overset{\frown}{5}$

Página 17

4 **¿Verdadero o falso?**

a) $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\widehat{3}$

$\frac{3}{3} = 3 \cdot 0{,}333\ldots = 0{,}999\ldots = 0{,}\widehat{9}$

Como $\frac{3}{3} = 1$**, resulta que** $0{,}\widehat{9} = 1$**.**

b) $5{,}\widehat{4} = 5{,}\widehat{44}$

c) $3{,}\widehat{72} = 3{,}7272727\ldots = 3{,}7\widehat{27}$

d) $0{,}\widehat{3} + 0{,}\widehat{6} = 1$

a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

d) Verdadero.

5 **Sin efectuar la división, y atendiendo solo al denominador de la fracción simplificada, di si las siguientes fracciones darán lugar a decimales exactos o decimales periódicos:**

a) $\frac{44}{150}$ **b)** $\frac{42}{150}$ **c)** $\frac{101}{1\,024}$ **d)** $\frac{1\,001}{500}$

a) $\frac{44}{150} = \frac{22}{75} \rightarrow 75 = 5^2 \cdot 3 \rightarrow$ Decimal periódico, pues en el denominador de la fracción simplificada hay algún factor (el 3) distinto de 2 y 5.

b) $\frac{42}{150} = \frac{7}{25} \rightarrow 25 = 5^2 \rightarrow$ Decimal exacto.

c) $\frac{101}{1\,024} \rightarrow 1\,024 = 2^{16} \rightarrow$ Decimal exacto.

d) $\frac{101}{500} \rightarrow 500 = 2^2 \cdot 5^3 \rightarrow$ Decimal exacto.

6 **Escribe un valor de** k **para que la fracción** $\frac{84}{k}$ **sea:**

a) Un número entero.

b) Un decimal exacto.

c) Un decimal periódico.

Respuesta abierta.

Por ejemplo:

a) $k = 2$

b) $k = 168$

c) $k = 11$

Página 18

7 **Expresa en forma de fracción.**

a) $6,2$ **b)** $0,63$ **c)** $1,0004$ **d)** $3,\overset{\frown}{5}$

e) $0,\overset{\frown}{1}$ **f)** $2,\overset{\frown}{7}$ **g)** $0,\overset{\frown}{23}$ **h)** $41,\overset{\frown}{041}$

i) $40,\overset{\frown}{028}$ **j)** $5,\overset{\frown}{9}$ **k)** $7,\overset{\frown}{009}$ **l)** $0,\overset{\frown}{99}$

a) $\frac{62}{10} = \frac{31}{5}$

b) $0,63 = \frac{63}{100}$

c) $1,0004 = \frac{10\,004}{10\,000}$

d) $10N - N = 35 - 3 \rightarrow 9N = 32 \rightarrow N = \frac{32}{9}$

e) $10N - N = 1 \rightarrow 9N = 1 \rightarrow N = \frac{1}{9}$

f) $10N - N = 25 \rightarrow 9N = 25 \rightarrow N = \frac{25}{9}$

g) $100N - N = 23 - 0 \rightarrow 99N = 23 \rightarrow N = \frac{23}{99}$

h) $1\,000N - N = 41\,041 - 41 \rightarrow 999N = 41\,000 \rightarrow N = \frac{41\,000}{999}$

i) $1\,000N - N = 40\,028 - 40 \rightarrow 999N = 39\,988 \rightarrow N = \frac{39\,988}{999}$

j) $10N - N = 59 - 5 \rightarrow 9N = 54 \rightarrow N = \frac{54}{9}$

k) $1\,000N - N = 7\,002 \rightarrow N = \frac{7\,002}{999}$

l) $100N - N = 99 \rightarrow 99N = 99 \rightarrow N = \frac{99}{99} = 1$

8 **Observamos que $0,\overset{\frown}{208} + 0,\overset{\frown}{791} = 0,\overset{\frown}{999} = 1$.**

Compruébalo expresando en forma de fracción cada sumando y efectuando la suma de fracciones.

$0,\overset{\frown}{208} + 0,\overset{\frown}{791} = \frac{208}{999} + \frac{791}{999} = \frac{999}{999} = 1$

9 **Calcula pasando previamente los decimales a fracciones y operando con ellas.**

a) $3,\overset{\frown}{5} + 1,\overset{\frown}{76} - 2,\overset{\frown}{103}$ **b)** $1,\overset{\frown}{3} : 2,\overset{\frown}{16}$

a) $3,\overset{\frown}{5} + 1,\overset{\frown}{76} - 2,\overset{\frown}{103} = \frac{32}{9} + \frac{175}{99} - \frac{2101}{999} = \frac{35\,375}{10\,989}$

b) $1,\overset{\frown}{3} : 2,\overset{\frown}{16} = \frac{12}{9} : \frac{214}{99} = \frac{66}{107}$

Página 19

10 **Completa el proceso para expresar como fracción el número dado en cada caso:**

a) $6{,}21\overset{\frown}{7}\begin{cases} N = 6{,}21777\ldots \\ 100N = 621{,}77777\ldots \\ 1\,000N = 6\,217{,}7777\ldots \end{cases}$

b) $0{,}031\overset{\frown}{62}\begin{cases} N = 0{,}0316262\ldots \\ 1\,000N = 31{,}626262\ldots \\ 100\,000N = 3162{,}626262\ldots \end{cases}$

a) $1\,000N - 100N = 6\,217 - 621 \rightarrow 900\text{N} = 5\,526 \rightarrow N = \dfrac{5\,526}{900} = \dfrac{1\,399}{225}$

b) $100\,000N - 1\,000N = 3\,162 - 31 \rightarrow 99\,000N = 3\,131 \rightarrow N = \dfrac{3\,131}{99\,000}$

11 **Expresa como fracción los decimales siguientes:**

a) $6{,}2\overset{\frown}{5}$ **b)** $0{,}00\overset{\frown}{1}$ **c)** $5{,}0\overset{\frown}{18}$

a) $100N - 10N = 625 - 62 \rightarrow 90N = 563 \rightarrow N = \dfrac{563}{90}$

b) $1\,000N - 100N = 1 - 0 \rightarrow 900N = 1 \rightarrow N = \dfrac{1}{900}$

c) $1\,000N - 10N = 5\,018 - 50 \rightarrow 990N = 4\,968 \rightarrow N = \dfrac{4\,968}{990} = \dfrac{276}{55}$

12 **¿Cuáles de los siguientes números son racionales? Ponlos en forma de fracción:**

a) **3,51** **b)** **5,202002000…** **c)** $5{,}\overset{\frown}{03}$

d) **0,3212121…** **e)** $\pi = 3{,}141592\ldots$ **f)** $7{,}4\overset{\frown}{331}$

a) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{351}{100}$

b) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

c) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{498}{99} = \dfrac{166}{33}$

d) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{318}{990} = \dfrac{53}{165}$

e) No es un número racional, porque no es decimal periódico ni exacto.

f) Sí es un número racional.

Fracción: $\dfrac{74\,257}{9\,990}$

13 **Comprueba, obteniendo las fracciones correspondientes, que** $5{,}\overset{\frown}{48} = 5{,}4\overset{\frown}{84}$**.**

$$\left.\begin{array}{l} 5{,}\overset{\frown}{48} \rightarrow 100N - N = 543 \rightarrow N = \dfrac{543}{99} \\ 5{,}4\overset{\frown}{84} \rightarrow 1\,000M = 10M = 5\,430 \rightarrow M = \dfrac{5\,430}{990} = \dfrac{543}{99} \end{array}\right\} 5{,}\overset{\frown}{48} = 5{,}4\overset{\frown}{84}$$

4 ▶ FRACCIONES Y DECIMALES CON LA CALCULADORA

Página 20

1 **Introduce en la calculadora las expresiones de la derecha y comprueba que, al pulsar ⊜, se simplifican las fracciones o se obtienen las fracciones correspondientes.**

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{8}{12}$ **c)** $\frac{27}{15}$

d) 3,25 **e)** 0,27 **f)** 0,321

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{9}{5}$

d) $\frac{13}{4}$ e) $\frac{27}{100}$ f) $\frac{321}{1\,000}$

Página 21

2 Obtén, con la calculadora, las fracciones generatrices de los siguientes números decimales:

a) $2{,}354$ **b)** $3{,}0\overset{\frown}{02}$ **c)** $0{,}02\overset{\frown}{43}$ **d)** $3{,}7\overset{\frown}{01}$

e) $0{,}1\overset{\frown}{25}$ **f)** $2{,}0\overset{\frown}{9}$ **g)** $0{,}12\overset{\frown}{33}$ **h)** $1{,}\overset{\frown}{1}$

a) $\dfrac{1177}{500}$ b) $\dfrac{1486}{495}$ c) $\dfrac{241}{9900}$ d) $\dfrac{1832}{495}$

e) $\dfrac{62}{495}$ f) $\dfrac{21}{10}$ g) $\dfrac{21}{300}$ h) $\dfrac{10}{9}$

3 Calcula con ayuda de la calculadora. Pon el resultado como fracción y como número decimal.

$$\frac{\left(\dfrac{4}{5}+1\right):\dfrac{2}{5}}{\left(\dfrac{4}{9}-\dfrac{5}{3}\right)\cdot\dfrac{7}{\dfrac{8}{3}-1}}$$

$$-\frac{135}{154}=-0{,}8\overset{\frown}{766233}$$

4 Haz con la calculadora estas operaciones con fracciones y números decimales. Obtén los resultados en forma de fracción y de número decimal (exacto o periódico).

a) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{2}{7}$ **b)** $\left(\dfrac{4}{9}+2\right)\cdot\dfrac{-3}{5}$ **c)** $\left(-3+\dfrac{1}{3}\right):\dfrac{2}{5}$ **d)** $\left(\dfrac{-2}{5}-\dfrac{3}{7}\right)-2$

e) $\dfrac{2}{7}-\left(\dfrac{1}{8}+3\right):\dfrac{1}{3}$ **f)** $0{,}\overset{\frown}{218}:\left(2-\dfrac{5}{3}\right)$ **g)** $\dfrac{-5}{2}-3{,}2\overset{\frown}{5}$ **h)** $\left(\dfrac{2}{7}-3{,}\overset{\frown}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{8}$

a) $\dfrac{35-8}{28}=\dfrac{27}{28}=0{,}96\overset{\frown}{428571}$

b) $\dfrac{22}{9}\cdot\dfrac{-3}{5}=-\dfrac{22}{15}=-1{,}4\overset{\frown}{6}$

c) $\dfrac{-8}{3}:\dfrac{2}{5}=\dfrac{-40}{6}=\dfrac{-20}{3}=-6{,}\overset{\frown}{6}$

d) $\left(\dfrac{-29}{35}\right)-2=\dfrac{-99}{35}=-2{,}8\overset{\frown}{285714}$

e) $\dfrac{2}{7}-\dfrac{25}{8}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{7}-\dfrac{75}{8}=\dfrac{-509}{56}=-9{,}089\overset{\frown}{285714}$

f) $0{,}\overset{\frown}{218}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{218}{999}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{218}{333}=0{,}\overset{\frown}{654}$

g) $\dfrac{-5}{2}-\dfrac{293}{90}=\dfrac{-518}{90}=\dfrac{-259}{45}=-5{,}7\overset{\frown}{5}$

h) $\left(\dfrac{2}{7}-\dfrac{30}{9}\right)\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{-192}{63}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{-64}{21}\cdot\dfrac{1}{8}=-\dfrac{8}{21}=0{,}\overset{\frown}{380952}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 22

1. Operaciones con fracciones

Hazlo tú

- **Calcula:** $\dfrac{1}{3+\dfrac{5}{3+\dfrac{1}{2}}}$

$$\frac{1}{3+\dfrac{5}{3+\dfrac{1}{2}}}=\frac{1}{3+\dfrac{5}{\dfrac{6+1}{2}}}=\frac{1}{3+\left(5:\dfrac{7}{2}\right)}=\frac{1}{3+\dfrac{10}{7}}=\frac{1}{\dfrac{21+10}{7}}=1:\frac{31}{7}=\frac{7}{31}$$

2. Operaciones con fracciones y decimales

Hazlo tú

- **Calcula.**

$$(4,2\widehat{8}-0,1\widehat{2})\,0,\widehat{3}:1,\widehat{6}+\frac{7}{3}\cdot 0,4$$

$N=4,2\widehat{8} \to 10N=42,\widehat{8} \to 100N=428,\widehat{8}$

$100N-10N=428,\widehat{8}-42,\widehat{8}=386 \to 90N=386 \to N=\dfrac{386}{90}=\dfrac{193}{45}$

$N=0,1\widehat{2} \to 10N=1,\widehat{2} \to 100N=12,\widehat{2}$

$100N-10N=12,\widehat{2}-1,\widehat{2}=11 \to 90N=11 \to N=\dfrac{11}{90}$

$0,\widehat{3}=\dfrac{1}{3}$

$N=1,\widehat{6} \to 10N=16,\widehat{6}$

$10N-N=16,\widehat{6}-1,\widehat{6}=15 \to 9N=15 \to N=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3}$

Ahora operamos:

$$\left(\frac{193}{45}-\frac{11}{90}\right)\cdot\frac{1}{3}:\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{375}{90}\cdot\frac{1}{3}:\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{25}{18}:\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{5}{6}+\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{5}=$$

$$\frac{5}{6}+\frac{14}{15}=\frac{53}{30}$$

3. Calcular el total

Hazlo tú

- **De un bidón de aceite se saca primero la mitad, y después, la quinta parte de lo que queda. Si en el bidón aún hay 3 L, ¿cuál es su capacidad?**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{5}\text{ de } x=3 \;\rightarrow\; x=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}$$

La capacidad del bidón de aceite es de 7,5 litros.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 23

Practica

Fracciones y decimales

1 **Simplifica las siguientes fracciones y agrupa las que sean equivalentes:**

$$\mathbf{\frac{24}{36} \quad \frac{26}{65} \quad \frac{225}{400} \quad \frac{26}{39} \quad \frac{66}{165} \quad \frac{343}{539}}$$

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}; \ \frac{26}{65} = \frac{2}{5}; \ \frac{225}{400} = \frac{9}{16}; \ \frac{26}{39} = \frac{2}{3}; \ \frac{66}{165} = \frac{2}{5}; \ \frac{343}{539} = \frac{7}{11}$$

Son equivalentes:

$$\frac{24}{60}; \ \frac{26}{65}; \ \frac{66}{165}$$

2 **Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor.**

$$\mathbf{\frac{11}{24} \quad -\frac{7}{4} \quad \frac{3}{8} \quad -\frac{1}{6} \quad \frac{5}{12} \quad -\frac{5}{3}}$$

$$\frac{11}{24}, \ \frac{-42}{24}, \ \frac{9}{24}, \ \frac{-4}{24}, \ \frac{10}{24}, \ \frac{-40}{24} \ \rightarrow \ -\frac{7}{4} < -\frac{5}{3} < -\frac{1}{6} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24}$$

4 **Halla, en cada caso, el valor de x:**

a) $\mathbf{\frac{x}{18} = \frac{35}{42}}$ **b)** $\mathbf{\frac{32}{x} = \frac{12}{15}}$

a) $x = 15$ b) $x = 40$

5 **Expresa como suma de un número entero y una fracción, igual que se hace en el ejemplo:**

$$\mathbf{\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}}$$

a) $\mathbf{\frac{8}{5}}$ **b)** $\mathbf{\frac{15}{8}}$ **c)** $\mathbf{\frac{16}{7}}$ **d)** $\mathbf{-\frac{3}{2}}$ **e)** $\mathbf{-\frac{7}{3}}$

a) $\frac{8}{5} = \frac{5+3}{5} = 1 + \frac{3}{5}$ b) $\frac{15}{8} = \frac{8+7}{8} = 1 + \frac{7}{8}$

c) $\frac{16}{7} = \frac{14+2}{7} = 2 + \frac{2}{7}$ d) $-\frac{3}{2} = \frac{-2-1}{2} = -1 - \frac{1}{2}$

e) $-\frac{7}{3} = \frac{-6-1}{3} = -2 - \frac{1}{3}$

6 **Expresa como número decimal cada una de las siguientes fracciones:**

$$\mathbf{\frac{9}{25} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{23}{6} \quad \frac{17}{200} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{233}{990} \quad \frac{13}{22}}$$

$$\frac{9}{25} = 0{,}36; \ \frac{13}{9} = 1{,}\widehat{4}: \ \frac{23}{6} = 3{,}8\widehat{3}; \ \frac{17}{200} = 0{,}085$$

$$\frac{5}{7} = 0{,}\widehat{714285}; \ \frac{233}{990} = 0{,}2\widehat{35}; \ \frac{13}{22} = 0{,}5\widehat{90}$$

7 **Determina, sin realizar la división, cuáles son decimales exactos y cuáles decimales periódicos.**

$$\frac{3}{2} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{13}{9} \quad \frac{7\cdot 11}{3\cdot 5^2} \quad \frac{19}{2^2\cdot 5} \quad \frac{3\cdot 7^2\cdot 23}{5\cdot 7}$$

Decimales exactos $\rightarrow \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{19}{2^2\cdot 5}, \frac{3\cdot 7^2\cdot 23}{5\cdot 7}$ Decimales periódicos $\rightarrow \frac{13}{9}, \frac{7\cdot 11}{3\cdot 5^2}$

8 **Clasifica los siguientes números racionales en decimales exactos o periódicos (intenta dar la respuesta antes de efectuar la división):**

$$\frac{4}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{13}{11} \quad \frac{17}{60} \quad \frac{81}{250}$$

Decimales exactos $\rightarrow \frac{2}{5}, \frac{1}{50}, \frac{81}{250}$ Decimales periódicos $\rightarrow \frac{4}{3}, \frac{13}{11}, \frac{17}{60}$

9 **Escribe tres números que estén comprendidos entre cada par de decimales:**

a) 0,345 y 0,346 **b) $2{,}\widehat{3}$ y 2,4** **c) –4,5 y –4,4**

a) 0,3451; 0,3452; 0,3456 b) 0,234; 0,235; 0,236 c) –4,45; –4,46; –4,47

10 **Ordena de menor a mayor en cada apartado:**

a) $3{,}56;\ 3{,}5\widehat{6};\ 3{,}\widehat{5};\ 3{,}\widehat{56}$

b) $-1{,}32;\ -1{,}3\widehat{2};\ -1{,}\widehat{32};\ -1{,}\widehat{3}$

c) $2{,}\widehat{3};\ \frac{8}{3};\ 2{,}34;\ \frac{32}{15};\ \frac{21}{10}$

a) $3{,}\widehat{5} < 3{,}56 < 3{,}\widehat{56} < 3{,}5\widehat{6}$

b) $-1{,}\widehat{3} < -1{,}\widehat{32} < -1{,}3\widehat{2} < -1{,}32$

c) $\frac{21}{10} < \frac{32}{15} < 2{,}\widehat{3} < 2{,}34 < \frac{8}{3}$

11 **Expresa en forma de fracción.**

a) $-1{,}03$ **b)** $14{,}\widehat{3}$ **c)** $-2{,}\widehat{5}$ **d)** $0{,}3\widehat{2}$

e) $0{,}0\widehat{12}$ **f)** $-3{,}\widehat{15}$ **g)** $5{,}34\widehat{5}$ **h)** $9{,}0\widehat{9}$

a) $-\frac{103}{100}$ b) $\frac{129}{9} = \frac{43}{3}$ c) $-\frac{23}{9}$ d) $\frac{29}{90}$

e) $\frac{12}{990} = \frac{2}{165}$ f) $\frac{-312}{99} = \frac{-104}{33}$ g) $\frac{4\,811}{900}$ h) $\frac{819}{90}$

Operaciones con fracciones

12 **Calcula mentalmente:**

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$

d) $\frac{2}{3}$ **de 60** **e)** $\frac{12}{7} : 3$ **f)** $\frac{8}{15} \cdot 5$

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{3}{2}$

d) 40 e) $\frac{4}{7}$ f) $\frac{8}{3}$

13 Calcula mentalmente:

a) La mitad de $\frac{2}{3}$.

b) La tercera parte de $\frac{12}{7}$.

c) Los dos tercios de un número valen 22. ¿Cuál es el número?

d) Los cinco cuartos de un número valen 35. ¿Cuál es el número?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{7}$ c) 33 d) 28

14 Reduce a una fracción.

a) $\dfrac{3+\frac{1}{2}}{7-\frac{3}{2}}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{7}{12}}$ **c)** $\dfrac{\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}$

a) $\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{11}{2}}=\dfrac{7}{11}$ b) $\dfrac{\frac{-5}{12}}{\frac{3}{12}}=-\dfrac{5}{3}$ c) $\dfrac{\frac{21}{40}}{\frac{-3}{10}}=-\dfrac{7}{4}$

15 Efectúa y simplifica descomponiendo en factores, como en el ejemplo:

$\dfrac{15}{21}\cdot\dfrac{7}{25}=\dfrac{15\cdot 7}{21\cdot 25}=\dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 5\cdot 5}=\dfrac{1}{5}$

a) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{20}{21}$ **b)** $\dfrac{6}{25}\cdot\dfrac{5}{18}$

c) $\dfrac{12}{7}\cdot\dfrac{35}{36}$ **d)** $\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{20}{27}$

e) $\dfrac{13}{12}\cdot\dfrac{84}{65}$ **f)** $\dfrac{90}{35}\cdot\dfrac{14}{36}$

a) $\dfrac{3\cdot 20}{5\cdot 21}=\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{5\cdot 3\cdot 7}=\dfrac{4}{7}$ b) $\dfrac{6\cdot 5}{25\cdot 18}=\dfrac{6\cdot 5}{5\cdot 5\cdot 6\cdot 3}=\dfrac{1}{15}$

c) $\dfrac{12\cdot 35}{7\cdot 36}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7\cdot 3\cdot 3\cdot 4}=\dfrac{5}{3}$ d) $\dfrac{9\cdot 20}{16\cdot 27}=\dfrac{9\cdot 4\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 9\cdot 3}=\dfrac{5}{12}$

e) $\dfrac{13\cdot 84}{12\cdot 65}=\dfrac{13\cdot 4\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 5\cdot 13}=\dfrac{7}{5}$ f) $\dfrac{90\cdot 14}{35\cdot 36}=\dfrac{9\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 7}{7\cdot 5\cdot 9\cdot 2\cdot 2}=1$

16 Calcula pasando previamente a fracción.

a) $3{,}5+2{,}\widehat{3}$ **b)** $0{,}1\widehat{2}-0{,}2$

c) $1{,}\widehat{6}-1{,}0\widehat{2}$ **d)** $3{,}\widehat{42}+7{,}\widehat{6}$

Comprueba que las soluciones, dadas en otro orden, son –7/90, 35/6, 122/11 y 29/45.

a) $3{,}5+2{,}\widehat{3}=\dfrac{35}{10}+\dfrac{21}{9}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{7}{3}=\dfrac{35}{6}$ b) $0{,}\widehat{12}-0{,}2=\dfrac{11}{90}-\dfrac{2}{10}=\dfrac{-7}{90}$

c) $1{,}\widehat{6}-1{,}0\widehat{2}=\dfrac{15}{9}-\dfrac{92}{90}=\dfrac{29}{45}$ d) $3{,}\widehat{42}+7{,}\widehat{6}=\dfrac{339}{99}+\dfrac{69}{9}=\dfrac{122}{11}$

Página 24

17 Opera y expresa cada resultado con una fracción irreducible.

a) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(-1+\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{15}:\left(\frac{4}{5}-1+\frac{2}{3}\right)$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{6}$

c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]$

d) $-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}:\frac{2}{3}\right)$

e) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right):\left[2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\right)\right]$

f) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

g) $-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$

Las soluciones son, dadas en otro orden, 11/4, –7/30, –1, –26/3, 17/24, –3/4 y –1/3.

a) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(-1+\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{15}:\left(\frac{4}{5}-1+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{-3+2}{3}\right)-\frac{7}{15}:\left(\frac{-1}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)-\frac{7}{15}:\left(\frac{-3+10}{15}\right)=$

$=\frac{3}{5}+\frac{1}{6}-\frac{7}{15}:\frac{7}{15}=\frac{3}{5}+\frac{1}{6}-1=\frac{18+5-30}{30}=\frac{-7}{30}$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{6}=\frac{3+1}{3}-\left(\frac{3+2}{4}\right)\left(\frac{4-3}{12}\right):\frac{1}{6}=\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{12}:\frac{1}{6}=\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{4}{3}-\frac{5}{8}=\frac{17}{24}$

c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]=\frac{9+5}{15}-\left[1-\left(\frac{3-2}{4}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]=\frac{14}{15}-\left(1-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right)=$

$=\frac{56-60+15-40+9}{60}=\frac{-20}{60}=\frac{-1}{3}$

d) $\frac{-4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}:\frac{2}{3}\right)=\frac{-4}{6}+\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{-16+18-8-18}{24}=\frac{-24}{24}=-1$

e) $\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right):\left[2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\right)\right]=\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{12}\right):\left[2-\frac{1}{2}\left(\frac{3+5}{3}\right)\right]=\left(\frac{30-10+2}{12}\right):\left(2-\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\right)=$

$=\frac{22}{12}:\left(2-\frac{8}{6}\right)=\frac{11}{6}:\left(\frac{12-8}{6}\right)=\frac{11}{6}:\frac{4}{6}=\frac{11}{4}$

f) $5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=5:\left(\frac{2+4}{4}\right)-3:\left(\frac{2-1}{4}\right)=5:\frac{6}{4}-3:\frac{1}{4}=\frac{20}{6}-12=\frac{20-72}{6}=\frac{-52}{6}=\frac{-26}{3}$

g) $-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17}{20}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]=-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{17-20}{20}\right)\cdot\left(\frac{1-9}{3}\right)\right]=-\frac{3}{8}\left[3-\frac{3}{5}-\left(\frac{-3}{20}\right)\cdot\left(\frac{-8}{3}\right)\right]=$

$=-\frac{3}{8}\left(3-\frac{3}{5}-\left(\frac{8}{20}\right)\right)=\frac{-3}{8}\left(\frac{60-12-8}{20}\right)=\frac{-3}{8}\cdot\frac{40}{20}=\frac{-12}{16}=\frac{-3}{4}$

18 **Si** $m = \frac{1}{3}$ **y** $n = \frac{-7}{2}$, **calcula:**

a) $\dfrac{4m + \frac{1}{2}n}{m \cdot n - \frac{m}{n}}$ **b)** $1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{m - \frac{1}{n}}}$

a) $$\dfrac{\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)}{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - \dfrac{\frac{1}{3}}{\left(-\frac{7}{2}\right)}} = \dfrac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{7}{4}\right)}{-\frac{7}{6} + \frac{2}{21}} = \dfrac{\frac{16-21}{12}}{\frac{-49+4}{42}} = \dfrac{\frac{-5}{12}}{\frac{-45}{42}} = \dfrac{(-5) \cdot 42}{12 \cdot (-45)} = \dfrac{7}{18}$$

b) $$1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\frac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{\left(-\frac{7}{2}\right)}\right)}} = 1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{7}}} = 1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\frac{7+6}{21}}} = 1 + \dfrac{1}{1 - \frac{21}{13}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{13-21}{13}} =$$

$$= 1 + \dfrac{1}{\frac{-8}{13}} = 1 - \dfrac{13}{8} = \dfrac{8-13}{8} = \dfrac{-5}{8}$$

19 **¿Verdadero o falso?**

a) $\dfrac{4}{3}-(0,75+0,\widehat{6})+\dfrac{13}{12}=1$

b) $\left(\dfrac{5}{6}+0,1\widehat{6}\right)\left(-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{65}{8}\left(0,\widehat{1}-0,2-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{17}{36}$

c) $\dfrac{1:\dfrac{3}{4}-1,\widehat{3}:1,1\widehat{3}}{15\cdot 0,0\widehat{2}+\dfrac{2}{3}-1,0\widehat{9}}=-\dfrac{80}{51}$

a) $0,75=\dfrac{75}{100}\quad 0,\widehat{6}=\dfrac{6}{9}$

$$\frac{4}{3}-\left(\frac{75}{100}+\frac{6}{9}\right)+\frac{13}{12}=1 \;\rightarrow\; \frac{4}{3}-\left(\frac{675+600}{900}\right)+\frac{13}{12}=1 \;\rightarrow\; \frac{4}{3}-\frac{1\,275}{900}+\frac{13}{12}=1 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{1\,200-1\,275}{900}+\frac{13}{12}=1 \;\rightarrow\; -\frac{75}{900}+\frac{13}{12}=1 \;\rightarrow\; -\frac{1}{12}+\frac{13}{12}=1 \;\rightarrow\; \frac{12}{12}=1$$

Verdadero.

b) $0,1\widehat{6}=\dfrac{15}{90}\qquad 0,\widehat{1}=\dfrac{1}{9}\qquad 0,\widehat{2}=\dfrac{2}{10}$

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{15}{90}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{65}{8}\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{10}-\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{36} \;\rightarrow\; \left(\frac{75+15}{90}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{65}{8}\left(\frac{10-18-30}{90}\right)=\frac{17}{36}$$

$$\rightarrow\; -\frac{4}{3}+\frac{65}{8}\left(-\frac{38}{90}\right)=\frac{17}{36} \;\rightarrow\; -\frac{4}{3}+\frac{247}{72}=\frac{17}{36} \;\rightarrow\; \frac{-96-247}{72}=\frac{17}{36} \;\rightarrow\; \frac{-343}{72}\neq\frac{17}{36}$$

Falso.

c) $1,\widehat{3}=\dfrac{12}{9}\quad 1,1\widehat{3}=\dfrac{102}{90}\quad 0,0\widehat{2}=\dfrac{2}{90}\quad 1,0\widehat{9}=\dfrac{99}{90}$

$$\frac{1:\dfrac{3}{4}-\dfrac{12}{9}:\dfrac{102}{90}}{15\cdot\dfrac{2}{90}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{99}{90}}=\frac{-80}{51} \;\rightarrow\; \frac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{20}{17}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{99}{90}}=\frac{-80}{51} \;\rightarrow\; \frac{\dfrac{68-60}{51}}{1-\dfrac{99}{90}}=\frac{-80}{51}$$

$$\rightarrow\; \frac{\dfrac{68-60}{51}}{1-\dfrac{99}{90}}=\frac{-80}{51} \;\rightarrow\; \frac{\dfrac{8}{51}}{-\dfrac{9}{90}}=\frac{-80}{51} \;\rightarrow\; \frac{-80}{51}=\frac{-80}{51}$$

Verdadero.

Resuelve problemas

20 **De un depósito, en el que había 1 500 L de agua, se gastan un día 5/12 del depósito, y otro día, 500 L. ¿Qué fracción queda?**

$\frac{5}{12}$ de $1500 = \frac{5}{12} \cdot 1500 = 5 \cdot \frac{1500}{12} = 5 \cdot 125 = 625$ L

Entonces en un día quedan 1 500 L – 625 L = 875 L.

Otro día quedan 875 L – 500 L = 375 L.

Para ver qué fracción es 375 L hacemos:

$\frac{375}{1500} = \frac{1}{4}$

Queda $\frac{1}{4}$ de depósito.

21 **A Julia le regalan 120 € por su cumpleaños. Si gasta 2/5 en ropa, 1/4 en libros y 3/20 en ocio, ¿cuánto gastó en cada cosa? ¿Qué fracción del dinero le queda?**

$\frac{2}{5}$ de 120 € = $\frac{2}{5} \cdot 120 = 2 \cdot \frac{120}{5} = 2 \cdot 24$ = 48 € en ropa.

$\frac{1}{4}$ de 120 € = $\frac{1}{4} \cdot 120 = 1 \cdot \frac{120}{4} = 1 \cdot 30$ = 30 € en libros.

$\frac{3}{20}$ de 120 € = $\frac{3}{20} \cdot 120 = 3 \cdot \frac{120}{20} = 3 \cdot 6$ = 18 € en ocio.

En total ha gastado 48 + 30 + 18 = 96 €.

Veamos ahora a qué fracciones corresponde:

$\frac{96}{120} = \frac{4}{5}$ ha gastado.

Luego le queda $\frac{1}{5}$ del dinero.

22 **Con un barril de vino se han llenado 480 botellas de 2/5 de litro. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se podrán llenar con un barril igual al anterior?**

Caculamos cuantos litros de vino contiene el barril.

$480 \cdot \frac{2}{5} = \frac{480 \cdot 2}{5} = 96 \cdot 2 = 192$ litros.

Repartimos esos 192 litros entre las botellas de 3/4.

$192 : \frac{3}{4} = \frac{192 \cdot 4}{3} = 64 \cdot 4 = 256$ botellas de 3/4 litros.

23 **La información nutricional de una marca de leche dice que hay 120 mg de calcio por cada 100 mL de leche. Esa cantidad de calcio es 3/20 de lo que es recomendable que tome diariamente una persona. Calcula la cantidad de calcio diaria recomendada.**

120 mg son 3/20 $\rightarrow$ 120 mg : 3 = 40 mg $\rightarrow$ 1/20.

Necesitamos saber $\frac{20}{20}$ $\rightarrow$ 40 mg · 20 = 800 mg.

Conclusión: la cantidad diaria de calcio recomendada es 800 mg.

24 **Los 3/5 de las entradas de un teatro corresponden al patio de butacas; 1/4 son del primer anfiteatro, y el resto, las del segundo anfiteatro, son 90. ¿Cuántas plazas tiene el teatro?**

$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12+5}{20} = \frac{17}{20}$ patio de butacas + primer anfiteatro.

$\frac{20}{20} - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$ son las del segundo anfiteatro.

$\frac{3}{20} \rightarrow$ 90 entradas luego 90 : 3 = 30 entradas es $\frac{1}{20}$.

Buscamos $\frac{20}{20} \rightarrow 20 \cdot 30 = 600$ plazas tiene el teatro.

25 **De los 28 estudiantes de una clase, 4/7 aprobaron todas las asignaturas, y de ellos, 1/4 obtuvieron sobresaliente de nota media. ¿Cuántos sacaron sobresaliente? ¿Qué parte de la clase suspendió alguna asignatura?**

$\frac{4}{7}$ de 28 han aprobado todo $\rightarrow \frac{4 \cdot 28}{7} = 16 \rightarrow$ 16 alumnos han aprobado todo.

$\frac{1}{4}$ de 16 tiene sobresaliente de media $\rightarrow \frac{1 \cdot 16}{8} = 4 \rightarrow$ 4 alumnos tiene sobresaliente de media.

$28 - 16 = 12 \rightarrow$ 12 alumnos han suspendido alguna asignatura.

26 **Ana utiliza parte del dinero que lleva para comprar varios cómics, todos a igual precio. Si con un quinto del dinero que tenía ha pagado un tercio del total de los cómics que compró, ¿qué fracción del dinero que llevaba le quedará después de pagar todos los cómics?**

$\frac{1}{3}$ de los cómics lo paga con $\frac{1}{5}$.

$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$ lo paga con $2 \cdot \frac{1}{5}$.

$\frac{3}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3}$ lo paga con $3 \cdot \frac{1}{5}$.

Total de los cómics $\longrightarrow \frac{3}{5}$ del dinero para los cómics.

Le quedarán $\frac{2}{5}$ del dinero.

27 **De un solar se vendieron los 2/3 de su superficie y después 3/5 de lo que quedaba. Los 600 m² restantes se destinaron a caminos y jardines. ¿Cuál era la superficie del solar?**

Si se venden $\frac{2}{3}$ de superficie, queda $\frac{1}{3}$ de superficie.

Calculamos los $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

Lo que queda después de las ventas es:

$$1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{15}{15} - \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15}$$

Si $\frac{2}{15}$ son 600 m² la superficie total del solar será:

$600 \cdot \frac{15}{2}\ 4\,500\ m^2$.

28 **La tercera parte de quienes asisten a un congreso son de España y 3/10 son de Francia. De los restantes, los 6/11 son de Suiza y hay 25 de Italia. ¿Cuántas personas asistieron al congreso?**

$\frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{19}{30}$ españoles + franceses.

Luego $\frac{11}{30}$ representa el resto de asistentes.

$\frac{6}{11}$ de $\frac{11}{30} = \frac{6}{11} \cdot \frac{11}{30} = \frac{1}{5}$ son ingleses.

$\frac{1}{3} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{50+45+30}{150} = \frac{125}{150} = \frac{5}{6}$ españoles + franceses + ingleses.

Entonces $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ italianos.

$\frac{1}{6}$ del total = 25 italianos.

La sexta parte son italianos luego $\frac{6}{6}$ serán $6 \cdot 25 = 150$.

Conclusión: 150 asistentes al congreso.

29 **Miguel gasta los 3/5 de su paga mensual cuando han transcurrido 2/3 del mes. Si durante el resto del mes mantiene el mismo ritmo de gasto, ¿qué fracción de su sueldo ahorra al final?**

Total de paga mensual $\frac{5}{5} = 1$.

Gasta: $\underbrace{\frac{3}{5}}_{\frac{2}{3}\text{ mes}} + \underbrace{\frac{3}{5} : \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{\frac{1}{3}\text{ mes} \cdot \text{resto mes} = \frac{1}{3}} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}.$

Ahora: $1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10}\right) = 1 - \left(\frac{6}{10} + \frac{3}{10}\right) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right) = \frac{1}{10}$

Miguel ahorra $\frac{1}{10}$ de su sueldo.

30 **Dos cajas de manzanas se ponen a la venta a 2,50 € el kilo. La primera, que supone los 5/12 del total, se vende por 50 €. ¿Cuántos kilos de manzanas había en cada caja?**

Si $\frac{5}{12}$ del total se vende por 50 €, el total se vende por $\frac{50 \cdot 12}{5} = 120$ €.

El total de kilos es $120 : 2,5 = 48$ kg

La primera caja tiene $\frac{48 \cdot 5}{12} = 20$ kg

La segunda caja tiene $48 - 20 = 28$ kg

Página 25

Resuelve: un poco más difícil

31 **Tantea para completar en tu cuaderno estas igualdades con los dígitos que faltan:**

a) $\frac{\square 36}{2156} = \frac{\square\square}{77}$ **b)** $\frac{84}{315} = \frac{\square\square}{45} = \frac{\square}{\square 5}$

c) $\frac{3\square 3}{53\square} = \frac{\square}{11}$ **d)** $\frac{75}{4\square 5} = \frac{\square 5}{8\square} = \frac{\square}{27}$

a) $\frac{336}{2156} = \frac{12}{77}$ b) $\frac{84}{315} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$

c) $\frac{343}{539} = \frac{7}{11}$ d) $\frac{75}{405} = \frac{15}{81} = \frac{5}{27}$

32 **Escribe en tu cuaderno el signo (+, –, · o :) correspondiente en cada hueco para que se cumplan estas igualdades:**

a) $\frac{2}{5} \square \frac{2}{3} \square \frac{3}{10} = \frac{17}{30}$ **b)** $\frac{4}{5} \square \frac{10}{3} \square \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = \frac{17}{30}$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

33 **Dos agricultores, padre e hija, tardan 2 h en arar un campo. Si lo hace solo el padre, tarda 6 h. ¿Cuánto tardará la hija en hacerlo sola?**

Padre e hijo $\to$ 2 horas $\to$ En 1 hora aran $\frac{1}{2}$ del terreno.

Padre $\to$ 6 horas $\to$ En una hora ara $\frac{1}{6}$ de terreno.

En una hora, el hijo ara $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ del terreno.

Por tanto, el hijo tardará 3 horas en arar el terreno él solo.

34 **Un grifo llena un depósito de agua en 9 horas. Si además del grifo se abre el desagüe, entonces el tiempo de llenado es 36 horas. ¿Cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito, estando el grifo cerrado?**

Grifo $\to$ 9 h de llenado $\to$ en 1 hora llena $\frac{1}{9}$

Grifo + desagüe $\to$ 36 h de llenado $\to$ en 1 hora llenan $\frac{1}{36}$

El desagüe vacía el depósito a razón de $\frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$ cada hora.

El desagüe vacía el depósito, estando el grifo cerrado, en 12 horas.

35 **Dos jarras de 600 mililitros cada una contienen zumo de naranja. Una está llena la tercera parte, y la otra, los dos quintos. Añadimos agua a cada una hasta llenarlas completamente y, posteriormente, las vaciamos en una jarra grande. ¿Qué fracción del líquido de la jarra grande es zumo de naranja?**

$\frac{1}{3}$ de 600 es zumo $\rightarrow$ $\frac{600}{3}$ = 200 mL son zumo en la 1.ª jarra.

$\frac{2}{5}$ de 600 es zumo $\rightarrow$ $\frac{2 \cdot 600}{5}$ = 240 mL son zumo en la 2.ª jarra.

Añadimos agua hasta llenar las dos jarras.

Vaciamos las dos jarras:

En total tenemos 1 200 mL en la jarra grande.

De los cuales 200 + 240 = 440 mL son de zumo.

Veamos que fracción representa:

$$\frac{440}{1\,200} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

Conclusión: en la jarra grande hay $\frac{11}{30}$ de zumo.

36 **En una fiesta, los 2/3 son chicos, los 3/5 de las chicas tienen pareja y hay 6 chicas que no tienen. ¿Cuántas personas asistieron a esa fiesta?**

$\frac{2}{3}$ del total de personas son chicos luego $\frac{1}{3}$ del total son chicas.

$\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$ tienen pareja luego $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$ no tienen pareja.

$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ chicas sin pareja del total.

Hay 6 chicas sin pareja, luego $\frac{2}{15}$ del total son 6 chicas sin pareja.

Para calcular el n.º de personas que asistieron a la fiesta hacemos $6 : \frac{2}{15} = \frac{6 \cdot 15}{2} = 45$

Conclusión: asistieron 45 personas a la fiesta.

37 **Gasto 1/10 de lo que tengo ahorrado en mi hucha; después, ingreso 1/15 de lo que me queda y aún me faltan 36 € para volver a tener la cantidad inicial. ¿Cuál era esa cantidad?**

Gasto $\frac{1}{10}$ del total de los ahorros, luego me quedan $\frac{9}{10}$ en la hucha.

Ingreso $\frac{1}{15}$ de $\frac{9}{10}$ $\rightarrow$ $\frac{1 \cdot 9}{15 \cdot 10} = \frac{3}{50}$.

Hay en la hucha $\frac{9}{10} + \frac{3}{50} = \frac{48}{50}$.

Para volver a tener la cantidad inicial faltan 36 € que equivalen a $\frac{2}{50}$ del total.

Luego para calcular la cantidad inicial hacemos:

$$36 \cdot \frac{50}{2} = \frac{1\,800}{2} = 900\ €$$

Conclusión: inicialmente tenía 900 € en la hucha.

38 **Un grupo de amigas ha ido a comer a una pizzería y han elegido tres tipos de *pizza*, A, B y C. Cada una ha tomado 1/2 de A, 1/3 de B y 1/4 de C; han pedido en total 17 *pizzas* y, como es lógico, no ha sobrado ninguna entera.**

a) ¿Ha tomado cada una más de una *pizza,* o menos? ¿Cuántas amigas son?

b) ¿Cuántas *pizzas* de cada tipo han encargado? ¿Ha sobrado algo?

c) Contesta a las mismas preguntas si hubiese sido 20 el número de *pizzas* pedido.

a) Cada una toma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$; es decir, han tomado más de una pizza cada una.

Como cada una toma más de una pizza y han comprado 17 pizzas, eso quiere decir que son menos de 17. Veamos cuántas.

$$\frac{13}{12}x=17 \;\rightarrow\; x=15,69$$

Por tanto, son 15 amigas.

b) Sabiendo que cada una toma $\frac{1}{2}$ de A, $\frac{1}{3}$ de B y $\frac{1}{4}$ de C, y que son 15 amigas, han encargado:

- 8 pizzas de A, pues $\frac{15}{2}=7,5$, y ha sobrado $\frac{1}{2}$ de pizza A.
- 5 pizzas de B, pues $\frac{15}{3}=5$, y no ha sobrado nada de pizza B.
- 4 pizzas de C, pues $\frac{15}{4}=3,75$, y ha sobrado $\frac{1}{4}$ de pizza C.

c) Si han comprado 20 pizzas:

- Siguen comiendo $\frac{13}{12}>1$ cada una.

  $$\frac{13}{12}x=20 \;\rightarrow\; x=18,46$$

  Ahora son 18 amigas.

- Ahora han encargado:

  $\frac{18}{2}=9$ pizzas A

  $\frac{18}{3}=6$ pizzas B

  $\frac{18}{4}=4,5 \;\rightarrow\;$ Han encargado 5 pizzas C y ha sobrado $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ de C.

Reflexiona

39 **Existe una regla general para escribir decimales periódicos como fracción sin aplicar el procedimiento que aprendiste en la unidad:**

$$x = \frac{\boxed{\text{número decimal sin la coma}} - \boxed{\text{parte no periódica del número sin la coma}}}{\boxed{\text{tantos nueves como cifras tenga el periodo}}\boxed{\text{tantos ceros como cifras haya en el anteperiodo}}}$$

$$\mathbf{3,\overset{\frown}{27} = \frac{327-3}{99}} \qquad \mathbf{18,25\overset{\frown}{73} = \frac{182\,573 - 1\,825}{9\,900}}$$

Comprueba que se cumple para los siguientes números periódicos:

a) $\mathbf{11,\overset{\frown}{123}}$ **b)** $\mathbf{0,\overset{\frown}{7}}$ **c)** $\mathbf{3,2\overset{\frown}{501}}$ **d)** $\mathbf{0,0217\overset{\frown}{1}}$

a) $\dfrac{11123-11}{999} = \dfrac{11112}{999} = \dfrac{3\,704}{333} = 11,\overset{\frown}{123}$ se cumple.

b) $\dfrac{7-0}{9} = \dfrac{7}{9} = 0,\overset{\frown}{7}$ se cumple.

c) $\dfrac{32\,501-32}{9\,990} = \dfrac{32\,469}{9\,990} = \dfrac{10\,823}{3\,330} = 3,2\overset{\frown}{501}$ se cumple.

d) $\dfrac{2\,171-217}{90\,000} = \dfrac{1\,954}{90\,000} = \dfrac{977}{45\,000} = 0,0217\overset{\frown}{1}$ se cumple.

40 **Busca cuatro fracciones comprendidas entre $\mathbf{\frac{1}{11}}$ y $\mathbf{\frac{1}{12}}$. ¿Cuántas hay?**

Buscamos fracciones equivalentes a $\dfrac{1}{11}$ y $\dfrac{1}{12}$ con un denominador común, por ejemplo 660.

$\dfrac{1}{11} = \dfrac{60}{660}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{12} = \dfrac{55}{660}$

Entre $\dfrac{55}{660}$ y $\dfrac{60}{660}$ están comprendidas $\dfrac{56}{660}, \dfrac{57}{660}, \dfrac{58}{660}, \dfrac{59}{660}$.

Si en lugar de 660 elegimos un denominador común muy grande, podemos escribir tantas como queramos.

Hay infinitas.

41 ¿Verdadero o falso? Explica y pon ejemplos.

a) Hay números decimales que no son racionales.

b) El cociente de dos números decimales exactos es siempre un decimal exacto.

c) Al sumar dos números decimales periódicos puros se obtiene siempre un decimal periódico puro.

d) Todos los números enteros se pueden expresar en forma de fracción.

e) Si dos fracciones positivas son menores que 1, su producto puede ser mayor que 1.

f) Al dividir dos números decimales periódicos se obtiene un decimal periódico.

a) Verdadero. π es irracional.

b) Falso. 2,33 : 1,7 = 1,3705882…

c) Verdadero. El denominador de una fracción que representa a un decimal periódico puro es de la forma 9 o 99 = 9 · 11 o 999 = 9 · 111 o … Al sumar dos fracciones con estos denominadores, se obtiene una fracción cuyo denominador es 9 o 99 o 999… Es decir, un decimal periódico puro. $3,\widehat{7} + 5,\widehat{8} = 9,\widehat{6}$

d) Verdadero. Si a es un entero, $a = \frac{a}{1}$.

e) Falso. Al multiplicar dos fracciones menores que 1, resulta siempre una fracción más pequeña que cualquiera de las dos dadas.

f) Falso. Contra ejemplo: (14/3) : (7/6).

$$\frac{14}{3} = 4,\widehat{6} \qquad \frac{7}{6} = 1,1\widehat{6}$$

$$\left(\frac{14}{3}\right) : \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{14 \cdot 6}{3 \cdot 7} = 4$$

42 Divide por 11 los números del 1 al 10.

a) ¿Cuántos decimales distintos pueden salir?

b) ¿Tiene eso que ver con el hecho de que estemos dividiendo entre 11?

c) ¿Puedes predecir el resultado de 23 : 11 y de 40 : 11?

a) $\frac{1}{11} = 0,\widehat{09}$; $\frac{2}{11} = 0,\widehat{18}$; $\frac{3}{11} = 0,\widehat{27}$…; $\frac{4}{11} = 0,\widehat{36}$; $\frac{5}{11} = 0,\widehat{45}$;

$\frac{6}{11} = 0,\widehat{54}$; $\frac{7}{11} = 0,\widehat{63}$; $\frac{8}{11} = 0,\widehat{72}$; $\frac{9}{11} = 0,\widehat{81}$; $\frac{10}{11} = 0,\widehat{90}$

Se obtienen 10 decimales distintos.

b) Sí tiene que ver.

c) $\frac{23}{11} = 2,\widehat{09}$; $\frac{40}{11} = 3,\widehat{63}$

43 Si escribimos en forma decimal la fracción 20/13, ¿qué cifra ocupa el lugar 50? ¿Sería la misma que la que ocupa el lugar 100?

El número es un decimal periódico puro con seis cifras en el período: $1,\widehat{538461}$

6 · 8 = 48; luego en la posición 50 está el número 3.

16 · 6 = 96; luego en la posición 100 está el número 4.

44 **Si $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < 1$, ¿cuál de estas afirmaciones es verdadera?**

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b} < 1$ **b)** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{c}{d}$ **c)** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > 1$

a) Verdadera.

b) Falsa. Al multiplicar dos fracciones menores que 1, resulta siempre una fracción más pequeña que cualquiera de las dos dadas.

c) Falsa. Al multiplicar dos fracciones menores que 1, resulta siempre una fracción menor que 1.

Infórmate y calcula

Los códigos de barras

- **Comprueba los dígitos de control en estos códigos de barras:**

9788499351421

Sumamos las posiciones impares: 9 + 8 +4 +9 + 5 + 4 + 1 = 40

Sumamos las posiciones pares: 7 + 8 + 9 + 3 + 1 + 2 = 30

Multiplicamos este último resultado por 3: 30 · 3 = 90

Sumamos los resultados: 40 + 90 = 130

Luego el dígito de control es 130.

8413240400295

Sumamos las posiciones impares: 8 + 1 + 2 + 0 + 0 + 2 + 5 = 18

Sumamos las posiciones pares: 4 + 3 + 4 + 4 + 0 + 9 = 24

Multiplicamos este último resultado por 3: 24 · 3 = 72

Sumamos los resultados: 18 + 72 = 90

Luego el digito de control es 90

- **Copia en tu cuaderno los números de tres códigos de barras que veas en tres productos cualesquiera y comprueba que en todos está bien calculado el dígito de control.**

Respuesta abierta.

Utiliza el ingenio

Una cuestión de comas

Poniendo una coma en el lugar adecuado, la siguiente expresión es cierta:

«CINCO POR CUATRO VEINTE MÁS UNO, VEINTIDÓS»

¿Podrías aclarar la cuestión?

5 · 4,20 + 1 = 22

Página 27

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Un joyero consigue una rebaja de 140 € en la compra de 16 broches iguales, cuyo precio, según el catálogo, es de 87,50 € cada unidad.**

¿A cuánto debe vender cada uno si desea obtener una ganancia total de 500 €?

Los 16 broches valen → $16 \cdot 87{,}5 = 1\,400$ €

Los 16 broches le cuestan → $1\,400 - 140 = 1\,260$ €

Para ganar 500 € debe recaudar → $1\,260 + 500 = 1\,760$ €

El precio de venta final debe ser de → $1\,760 : 16 = 110$ €

- **Marta compra tres tortas, y Beatriz, dos. Cuando van a merendar, se les une su amiga Verónica, que no trae tortas. A la hora de compartir gastos, a Verónica le toca poner 5 €.**

¿Cómo se repartirán esos 5 € Marta y Beatriz?

Como tienen 5 tortas, a cada una le toca $\frac{5}{3}$ de torta.

Marta aporta para Verónica $3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} =$ de torta.

Beatriz aporta para Verónica $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} =$ de torta.

Los 5 € que paga Verónica los deben repartir proporcionalmente a $\frac{4}{3}$ y a $\frac{1}{3}$.

Por tanto, 4 € para Marta y 1 € para Beatriz.

- **Un grupo de amigos y amigas entra en una cafetería. Todos piden café, y la quinta parte de ellos pide, además, un bollo. Un café cuesta 0,85 €, y un bollo, 1,10 €.**

Para pagar, entregan al camarero 11 €.

¿Han dejado propina? Si es así, ¿de cuánto ha sido?

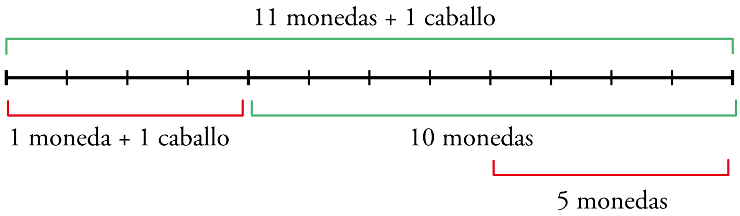
Como se dice que la quinta parte pide un bollo, el número de amigos es un múltiplo de 5.

Si fuesen 5, las consumiciones habrían costado $5 \cdot 0{,}85 + 1{,}10 = 5{,}35$ € (cantidad muy alejada de 11 €).

Si fuesen 10 amigos, el precio de las consumiciones habría sido $5{,}35 \cdot 2 = 10{,}70$ €, muy próximo a 11 €.

Por lo tanto, han dejado una propina de $11 - 10{,}70 = 0{,}30$ € = 30 céntimos.

- **Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de once monedas de oro y un caballo. A los cuatro meses, el sirviente se despide, recibiendo el caballo y una moneda. ¿Cuál era el valor del caballo?**



«5 monedas» equivalen a «1 caballo + 1 moneda».

Por tanto, un caballo tiene el valor de 4 monedas.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Efectúa y simplifica el resultado.**

$$\mathbf{1+\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{5}{3}+1\right)-\frac{1}{3}:\frac{2}{5}}$$

$$1+\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{5+3}{3}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}=1+\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{3}-\frac{5}{6}=1+\frac{5}{3}-\frac{5}{6}=1+\frac{10-5}{6}=1+\frac{5}{6}=\frac{6+5}{6}=\frac{11}{6}$$

2 **Escribe tres fracciones de modo que la primera dé lugar a un decimal exacto; la segunda, a un periódico puro, y la tercera, a un periódico mixto.**

Respuesta abierta.

Por ejemplo:

Decimal exacto: $\frac{4}{25}=0{,}16$.

Decimal periódico: $\frac{58}{99}=0{,}\widehat{58}$.

Decimal periódico mixto: $\frac{23}{45}=0{,}5\widehat{1}$.

3 **Escribe, en cada caso, tres números comprendidos entre los dos dados:**

a) $\mathbf{\frac{3}{20}}$ **y** $\mathbf{\frac{4}{25}}$ **b)** $\mathbf{2{,}\widehat{7}}$ **y** $\mathbf{2{,}\widehat{8}}$

a) $\frac{3}{20}=0{,}15;\ \frac{4}{25}=0{,}16$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$0{,}15 < 0{,}151 < 0{,}1519 < 0{,}1531 < 0{,}16$

b) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$2{,}\widehat{7} < 2{,}78 < 2{,}783 < 2{,}787 < 2{,}\widehat{8}$

4 **Clasifica en decimales exactos o periódicos sin hacer la división.**

$\mathbf{\frac{89}{50}}$ $\mathbf{\frac{113}{12}}$ $\mathbf{\frac{23}{32}}$ $\mathbf{\frac{18}{7}}$

$\frac{89}{50}\to$ Decimal exacto $\frac{113}{12}\to$ Decimal periódico

$\frac{23}{32}\to$ Decimal exacto $\frac{18}{7}\to$ Decimal periódico

5 **Calcula el resultado de esta operación, pasando previamente los decimales a fracciones:**

$$\left(0,\widehat{18}-1,8\widehat{9}+\frac{8}{11}\right)\cdot 1,1$$

$0,\widehat{18} \;\to\; 100N-N=18-0 \;\to\; 99N=18 \;\to\; N=\dfrac{18}{99}$

$1,8\widehat{9} \;\to\; 100N-10N=189-18 \;\to\; 90N=171 \;\to\; N=\dfrac{171}{90}$

$1,1 \;\to\; \dfrac{11}{10}$

$$\left(\frac{18}{99}-\frac{171}{90}+\frac{8}{11}\right)\frac{11}{10}=\left(\frac{180-1881-720}{990}\right)\frac{11}{10}=\frac{-981}{990}\cdot\frac{11}{10}=\frac{-981}{990}=\frac{-109}{100}$$

6 **Zoe gastó 1/3 de su dinero en libros y 2/5 en discos. Si le han sobrado 36 €, ¿cuánto tenía?**

$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{4}{15}$

$\dfrac{4}{15}$ de total son 36 € $\to$ Total $=36\cdot\dfrac{15}{4}=135$ €

7 **Con la tercera parte del aceite que tengo en un bidón, puedo llenar 20 botellas de 3/5 de litro. ¿Cuántos litros había en el bidón? ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro podré llenar con el resto?**

20 botellas de $\dfrac{3}{5}$ de litro son $\dfrac{20\cdot 3}{5}=12$ L.

Luego $\dfrac{1}{3}$ del total son 12 L.

12 · 3 son los litros que contiene el bidón $\to$ 36 Litros.

Después de llenar las 20 botellas de $\dfrac{3}{5}$ de litro quedan 24 litros en el bidón.

Si queremos saber cuantas botellas de $\dfrac{3}{4}$ podemos llenar con 24 litros hacemos:

$24:\dfrac{3}{4}=\dfrac{24\cdot 4}{3}=32$ bolettas de $\dfrac{3}{4}$.

8 **Entre las personas apuntadas a un polideportivo, la quinta parte tiene más de 60 años, y dos de cada tres están entre los 25 y los 60 años.**

a) ¿Qué fracción de estas personas tiene 25 años o menos?

b) Si el número de personas apuntadas es 525, ¿cuántas hay de cada grupo de edad?

a) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{15}$

Los $\dfrac{2}{15}$ de las personas tienen 25 años o menos.

b) Más de 60 años $\to$ $\dfrac{1}{5}\cdot 525=105$

Entre 25 y 60 años $\to$ $\dfrac{2}{3}\cdot 525=350$

Menos de 25 años $\to$ $\dfrac{2}{15}\cdot 525=70$

9 **Compro una bicicleta que pagaré en tres plazos. En el primero, pago los 3/10 del total; en el segundo, 4/5 de lo que me queda por pagar, y para el tercero, solo tengo que pagar 21 €. ¿Cuál es el precio de la bicicleta?**

$$\frac{3}{10}+\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}=\frac{15+28}{50}=\frac{43}{50}$$

$\frac{7}{50}$ de lo que tengo que pagar son 21 €.

El total es $\frac{21\cdot 50}{7}=150$ €.

10 **¿Verdadero o falso?**

a) Todas las fracciones son números racionales.

b) Todos los números racionales son fraccionarios.

c) Una fracción siempre equivale a un número decimal periódico.

d) Un número decimal periódico es racional.

a) Verdadero

b) Falso, los números enteros son también números racionales.

c) Falso, la fracción $\frac{1}{5}$ es un número decimal exacto.

d) Verdadero

2 POTENCIAS Y RAÍCES

Página 29

Resuelve

1 **¿Cabrían los hijos e hijas de Buda en la India? Teniendo en cuenta *Mahabharata* y que la superficie de la India es de unos 3 millones de kilómetros cuadrados:**

a) ¿Cuántos metros cuadrados corresponderían a cada uno de los $6 \cdot 10^{11}$ hijos e hijas de Buda?

b) ¿Cuántas de las $24 \cdot 10^{15}$ divinidades habría en cada metro cuadrado?

a) Primero, vamos a poner los datos en metros cuadrados, que es lo que nos pide el problema.

$$3 \text{ millones de km}^2 = 3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$$

Veamos cuántos metros cuadrados le corresponde a cada hijo:

$$6 \cdot 10^{11} \text{ hijos e hijas}$$

Por tanto:

$$\frac{3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}{6 \cdot 10^{11} \text{ hijos}} = \frac{30}{6} \text{ m}^2\text{/hijo} = 5 \text{ m}^2\text{/hijo}$$

Así, a cada hijo le corresponden 5 m^2 de India.

b) Pasamos los km^2 a m^2 $\rightarrow$ $3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 3 \cdot 10^6 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$

$$\frac{24 \cdot 10^{15} \text{ divinidades}}{3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ divinidad/m}^2$$

Habría $8 \cdot 10^3$ divinidades por metro cuadrado.

2 **Una antigua leyenda popular india describe una batalla en la que intervinieron 10^{40} monos. ¿Cuánto podían ocupar? Vamos a suponer que un mono ocupa un volumen de unos 10 litros y que amontonamos 10^{40} monos, bien apretados, dentro de una esfera. ¿Cuál sería su radio?**

NOTA: de Urano al Sol hay unos 2 870 millones de kilómetros.

10^{40} monos ocupan un volumen de $10^{40} \cdot 10\ l = 10^{41}\ l = 10^{35} \text{ m}^3$

$$10^{35} \text{ m}^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{10^{35}}{\pi}} \approx 2{,}87 \cdot 10^{11} \text{ m} = 2\,870 \text{ millones de km}$$

El radio de la esfera sería 2 870 millones de kilómetros.

3 **a) ¿Cuál o cuáles de estas potencias sirven para expresar un gúgol y cuál o cuáles para expresar un gúgolplex?**

$10^{(10^{100})}$ $\qquad$ 10^{100} $\qquad$ $10^{(10^2)}$ $\qquad$ $10^{(100^{10})}$

b) ¿Qué es mayor, un gúgol de gúgoles o un gúgolplex?

c) Suponiendo que en una hoja de papel caben, bien juntos, 3 000 caracteres, ¿serías capaz de idear una expresión que indique el número de hojas necesarias para escribir un gúgolplex con todas sus cifras?

a) gúgol $\rightarrow$ 10^{100} $\qquad$ gúgolplex $\rightarrow$ $10^{(10^{100})}$

b) Un gúgol de gúgoles.

c) $\dfrac{10^{100} \text{ cifras}}{3\,000 \text{ caracteres por hoja}} = 3{,}33^{96}$ hojas

1 ▶ POTENCIACIÓN

Página 30

1 Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4$ **b)** $(5^6)^3$ **c)** $\dfrac{7^6}{7^4}$ **d)** $\dfrac{15^3}{3^3}$

e) $2^{10} \cdot 5^{10}$ **f)** $\dfrac{12^5}{3^5 \cdot 4^5}$ **g)** $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3$ **h)** $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 : 2^2)$

a) 4^8

b) 5^{18}

c) 7^2

d) $\left(\dfrac{15}{3}\right)^3 = 5^3$

e) $(2 \cdot 5)^{10} = 10^{10}$

f) $\left(\dfrac{12}{3 \cdot 4}\right)^5 = 1^5 = 1$

g) $(a^9)^2 : (a^6)^3 = a^{18} : a^{18} = a^0 = 1$

h) $6^6 \cdot 3^5 \cdot 2^5 = 6^6 \cdot (3 \cdot 2)^5 = 6^6 \cdot 6^5 = 6^{11}$

2 Calcula utilizando propiedades de las potencias.

a) $2^3 \cdot 5^4$ **b)** $(6^5 : 2^4) : 3^5$ **c)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$ **d)** $2^8 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^4$

e) $\dfrac{20^6}{2^6}$ **f)** $\dfrac{20^6}{2^5}$ **g)** $(3^3)^2 : 3^5$ **h)** $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3]$

a) $2^3 \cdot 5^4 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^3 \cdot 5 = 10^3 \cdot 5 = 1\,000 \cdot 5 = 5\,000$

b) $(6^5 : 2^4) : 3^5 = \left(\dfrac{6^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\dfrac{(2 \cdot 3)^5}{2^4}\right) : 3^5 = \left(\dfrac{2^5 \cdot 3^5}{2^4}\right) : 3^5 = 2 \cdot (3)^5 : 3^5 = \dfrac{2 \cdot 3^5}{3^5} = 2$

c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{2^6}{3^6} \cdot \dfrac{3^3}{(2^2)^3} = \dfrac{2^6}{3^6} \cdot \dfrac{3^3}{2^6} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$

d) $2^8 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^4 = 2^8 \cdot \dfrac{5^4}{2^4} = 2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\,000$

e) $\dfrac{20^6}{2^6} = \left(\dfrac{20}{2}\right)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

f) $\dfrac{20^6}{2^5} = 20 \cdot \left(\dfrac{20^5}{2^5}\right) = 20 \cdot 10^5 = 20 \cdot 100\,000 = 2\,000\,000$

g) $(3^3)^2 : 3^5 = 3^6 : 3^5 = 3^{6-5} = 3$

h) $(2^5)^3 \cdot [(5^3)^4 : 2^3] = 2^{15} \cdot [5^{12} : 2^3] = 2^{15} \cdot \dfrac{5^{12}}{2^3} = 2^{12} \cdot 5^{12} = (2 \cdot 5)^{12} = 10^{12} =$
$= 1\,000\,000\,000\,000$

Página 31

3 Calcula el resultado.

a) $(-2)^{-1}$ **b)** $(-2)^{-2}$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{-1}{2}\right)^2$

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{4}$

4 Calcula.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ **b)** $\left(\frac{-13}{7}\right)^0$ **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ **d)** $\left(\frac{-3}{-5}\right)^{-3}$

a) $\frac{125}{27}$ b) 1 c) $\frac{81}{16}$ d) $\frac{125}{27}$

5 Expresa como potencia de base 10.

a) 0,1 **b)** 0,00001 **c)** $0{,}001^{-2}$ **d)** $100\,000^{-3}$

a) 10^{-1} b) 10^{-5} c) 10^{-5} d) 10^2

6 Simplifica y halla el resultado cuando sea posible.

a) $\frac{x^6 \cdot x^{-3}}{(x^2)\,y}$ **b)** $\frac{y^5 \cdot y^{-1} \cdot y}{(y^2)^{-2}}$ **c)** $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 : \left(\frac{1}{a^3}\right)^3$ **d)** $\frac{5^6 \cdot (5^2)^{-1}}{(5^2)^3}$

e) $\frac{6^4 \cdot 3^4}{9^4}$ **f)** $\frac{(-6)^5 \cdot (-3)^5}{36^5}$ **g)** $\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$ **h)** $\frac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$

a) $\frac{x^{6-3}}{(x^2)\,y} = \frac{x^3}{x^2 y} = \frac{x}{y}$

b) $\frac{y^5}{y^{-4}} = y^9$

c) $\frac{1}{a^6} : \frac{1}{a^9} = \frac{a^9}{a^6} = a^3$

d) $\frac{5^6 \cdot 5^{-2}}{5^6} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$

e) $\frac{6^4 \cdot 3^4}{(3^2)^4} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4}{3^4} = 2^4$

f) $\frac{-6^5 \cdot (-3)^5}{(6^2)^5} = \frac{3^5}{6^5} = \frac{3^5}{2^5 \cdot 3^5} = \frac{1}{32}$

g) $\frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 3^4 = 81$

h) $\frac{(2 \cdot 3)^2 \cdot (3)^2}{2^3 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2} = \frac{2^2 \cdot 3^6}{2^7 \cdot 3^2} = \frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$

2 NOTIFICACIÓN CIENTÍFICA

Página 32

Cálculo mental

Opera y expresa el resultado como potencia de base 10:

a) $1\,000 \cdot 100\,000$ **b)** $1\,000 \cdot 0{,}01$ **c)** $1\,000 : 0{,}01$ **d)** $1\,000 : 0{,}000001$

e) $1\,000 \cdot 0{,}000001$ **f)** $0{,}0001 \cdot 0{,}01$ **g)** $0{,}0001 : 0{,}01$

a) $100\,000\,000 = 10^8$ b) 10

c) $100\,000 = 10^5$ d) $1\,000\,000\,000 = 10^9$

e) 10^{-3} f) 10^{-6} g) $0{,}01 = 10^{-2}$

1 Calcula el valor de *n* en cada caso:

a) $374{,}2 \cdot 10^5 = 3{,}742 \cdot 10^n$ **b)** $374{,}2 \cdot 10^{-7} = 3{,}742 \cdot 10^n$

c) $0{,}031 \cdot 10^5 = 3{,}1 \cdot 10^n$ **d)** $0{,}031 \cdot 10^{-7} = 3{,}1 \cdot 10^n$

a) $n = 7$ b) $n = -5$

c) $n = 3$ d) $n = -9$

2 Calcula.

a) $(3{,}25 \cdot 10^7) \cdot (9{,}35 \cdot 10^{-15})$ **b)** $(5{,}73 \cdot 10^4) + (-3{,}2 \cdot 10^5)$

c) $(4{,}8 \cdot 10^{12}) : (2{,}5 \cdot 10^3)$ **d)** $(1{,}17 \cdot 10^8) - (3{,}24 \cdot 10^{-6})$

a) $3{,}03875 \cdot 10^{-7}$ b) $-2{,}627 \cdot 10^5$

c) $1{,}92 \cdot 10^9$ d) $1{,}17 \cdot 10^8$

Página 33

3 **Resuelve con la calculadora la actividad 2 de la página anterior.**

a) $3{,}03875 \cdot 10^{-7}$

b) $-2{,}627 \cdot 10^{5}$

c) $1{,}92 \cdot 10^{9}$

d) $1{,}17 \cdot 10^{8}$

3 RAÍCES Y RADICALES

Página 34

1 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{64}$ **b)** $\sqrt[3]{216}$ **c)** $\sqrt{14\,400}$ **d)** $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{64}{216}}$ **f)** $\sqrt[3]{\frac{3\,375}{1\,000}}$ **g)** $\sqrt[3]{1{,}728 \cdot 10^{21}}$ **h)** $\sqrt{2{,}025 \cdot 10^{-11}}$

a) 2 b) 6 c) 120 d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ f) $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ g) $12 \cdot 10^6$ h) $4{,}5 \cdot 10^{-6}$

2 ¿Verdadero o falso?

a) Como $(-5)^2 = 25$, entonces $\sqrt{25} = -5$.

b) –5 es una raíz cuadrada de 25.

c) 81 tiene dos raíces cuadradas: 3 y –3.

d) 27 tiene dos raíces cúbicas: 3 y –3.

e) 7 tiene dos raíces cuartas: $\sqrt[4]{7}$ y $-\sqrt[4]{7}$.

f) $\sqrt{-4} = -2$ y $\sqrt{4} = 2$.

a) Falso; $\sqrt{25}$ hace referencia a la raíz positiva, $\sqrt{25} = 5$.

b) Verdadero; $(-5)^2 = 25$.

c) Falso; $3^2 = 9$ y $(-3)^2 = 9$

d) Falso. Solo tiene una, porque $(-3)^3 = -27$

e) Verdadero.

f) Falso. No existen raíces cuadradas de números negativos.

Página 35

Cálculo mental

1 **Simplifica.**

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$ **b)** $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{10}$

a) $\sqrt{100}=10$ b) $\sqrt[3]{60}$

2 **Descompón y extrae fuera del radical:**

a) $\sqrt{50}$ **b)** $\sqrt[3]{24}$ **c)** $\sqrt[3]{2\,000}$

a) $\sqrt{5^2\cdot 2}=5\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=2\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{2^4\cdot 5^3}=10\sqrt[3]{2}$

3 **Calcula el valor de estas potencias:**

a) $\left(\sqrt{3}\right)^6$ **b)** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ **c)** $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{12}$

a) $3^3=27$ b) $2^2=4$ c) $5^3=125$

3 **Simplifica las expresiones que puedas.**

a) $8\sqrt{5}-6\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt[3]{25}-\sqrt{8}$

d) $\sqrt{5}-\sqrt[3]{5}$ **e)** $\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}$ **f)** $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{7}$

g) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ **h)** $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{49}$ **i)** $\sqrt[3]{5}-\sqrt[6]{5}$

j) $\left(\sqrt{5}\right)^{10}$ **k)** $\left(\sqrt{6}\right)^7$ **l)** $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}$

a) $8\sqrt{5}-6\sqrt{3}\ \to$ No se puede simplificar. b) $3\sqrt{5}+4\sqrt{3}=7\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{25}-\sqrt{8}\ \to$ No se puede simplificar. d) $\sqrt{5}-\sqrt[3]{5}\ \to$ No se puede simplificar.

e) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{42}$ f) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{7}\ \to$ No se puede simplificar.

g) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ h) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{49}=\sqrt[3]{343}$

i) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[6]{5}\ \to$ No se puede simplificar. j) $\left(\sqrt{5}\right)^{10}=5^5$

k) $\left(\sqrt{6}\right)^7\ \to$ No se puede simplificar. l) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}=7^2=49$

4 **Extrae fuera del radical cuando sea posible.**

a) $\sqrt{3^2 \cdot 5^4}$ **b)** $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2}$ **c)** $\sqrt[4]{5^5}$

d) $\sqrt{180}$ **e)** $\sqrt{720}$ **f)** $\sqrt[3]{375}$

a) $\sqrt{3^2 \cdot 5^4} = 3 \cdot 5^2 = 75$

b) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{36}$

c) $\sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5}$

e) $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt{5}$

f) $\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{3}$

5 **Opera y simplifica.**

a) $\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{12}$ **b)** $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$

a) $\sqrt{3} + \sqrt{(3)^3} + \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{(2)^4} + \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$

4 NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Página 36

1 **Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (Hazlo en tu cuaderno).**

$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \dfrac{36}{9};\ \sqrt{\dfrac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \dfrac{7}{3};\ \pi - 3$

NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
FRACCIONARIOS	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
IRRACIONALES, é	

NATURALES, $\mathbb{N}$	$107;\ 36/9 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$107;\ -7;\ 36/9 = 4;\ -\sqrt{36} = -6$
FRACCIONARIOS	$3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ \sqrt{4/9} = 2/3;\ 7/3$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ 36/9 = 4;\ \sqrt{4/9} = 2/3;\ -\sqrt{36} = -6;\ 7/3$
IRRACIONALES, é	$\sqrt{20};\ \pi - 3$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 37

1. Potencias de base diez

Hazlo tú

- **El volumen aproximado de un glóbulo rojo es 90 femtolitros. Sabiendo que 1 fL es una millonésima de una milmillonésima de litro, exprésalo en mililitros y en litros.**

  90 femtolitros son $9 \cdot 10^{-14}$ litros.

  90 femtolitros son $9 \cdot 10^{-11}$ mililitros.

2. Notificación científica

Hazlo tú

- **Si pierde el contacto después de recorrer la mitad de su trayecto, y lo recupera a 10^4 km del planeta, ¿cuántos kilómetros recorrió sin radio?**

  Antes de perder el contacto por radio, ha recorrido:

  $\frac{1}{2} \cdot 10^6 = 0{,}5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^5$ km

  Cuando lo recupera, le faltan 10^4 km para llegar al final. Por tanto, ya lleva:

  $$10^6 - 10^4 = 10^2 \cdot 10^4 - 10^4 = (10^2 - 1) \cdot 10^4 = 99 \cdot 10^4 \text{ km}$$

  Si a esa cantidad le restamos lo que recorrió antes de perder el contacto, tendremos la distancia pedida:

  $$99 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^5 = 99 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10 \cdot 10^4 = (99 - 50) \cdot 10^4 = 49 \cdot 10^4 \text{ km}$$

3. Notificación científica

Hazlo tú

- **El triángulo ABC es isósceles y rectángulo en B. ¿Cuál será el perímetro si la hipotenusa mide 6 cm?**

  Un triángulo rectánculo isósceles tiene un ángulo de 90° y dos lados (catetos) iguales.

  El perímetro es la suma de sus lados.

  Para calcular los lados aplicamos la fórmula:

  $$H^2 = c^2 + c^2$$

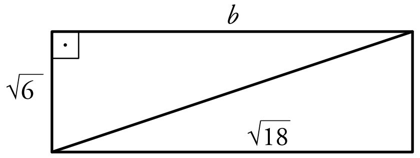
  En este caso como los lados son iguales queda:

  $$6^2 = 2c^2 \rightarrow 36 = 2c^2 \rightarrow \frac{36}{2} = c^2 \rightarrow c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

4. Volumen de un cilindro

Hazlo tú

- **La altura de un rectángulo mide $\sqrt{6}$ cm, y su diagonal, $\sqrt{18}$ cm. Calcula su base, su área y su perímetro.**



$H^2 = c^2 + b^2$

$(\sqrt{18})^2 = (\sqrt{6})^2 + b^2$

$18 - 6 = b^2$

$b^2 = 12$

$b = \sqrt{12}$

$b = 2\sqrt{3}$

Área rectángulo $= b \cdot h = \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ cm^3

Perímetro $= 2b + 2h = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6} = (4 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}$ cm

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 38

Practica

Potencias

1 **Calcula las potencias siguientes:**

a) $(-3)^3$ **b)** $(-2)^4$ **c)** $(-2)^{-3}$

d) -3^2 **e)** -4^{-1} **f)** $(-1)^{-2}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **h)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **i)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{0}$

a) -27 b) 16 c) $-\frac{1}{8}$

d) -9 e) $-\frac{1}{4}$ f) 1

g) 8 h) 4 i) 1

2 **Expresa como una potencia de base 2 o 3.**

a) 64 **b)** 243 **c)** $\frac{1}{32}$ **d)** $\frac{1}{3}$

e) $-\frac{1}{27}$ **f)** $\frac{3^4}{3^{-3}}$ **g)** $\frac{2^{-5}}{2^3}$ **h)** $\left(\frac{2^{-3}}{2^{-2}}\right)^{-1}$

a) 2^6 b) 3^5

c) 2^{-5} d) 3^{-1}

e) $-(3)^{-3}$ f) $3^4 : 3^{-3} = 3^{4-(-3)} = 3^{4+3} = 3^7$

g) $2^{-5} : 2^3 = 2^{-5-3} = 2^{-8}$

h) $(2^{-3} : 2^{-2})^{-1} = (2^{-3-(-2)})^{-1} = (2^{-3+2})^{-1} = (2^{(-1)})^{-1} = 2^{(-1)\cdot(-1)} = 2^1 = 2$

3 **Reduce a una sola potencia.**

a) $(11^7 \cdot 11^4) : 11^8$ **b)** $(a^8 : a^5)^4$ **c)** $(a^{-2})^3 \cdot a^9$

d) $(a^{-3} \cdot a^2)^{-4} : a^{-6}$ **e)** $12^5 : (-3)^5$ **f)** $8^{-6} \cdot 16^{-6}$

a) 11^3 b) a^{12} c) a^3

d) a^{10} e) -2^{10} f) 2^{-42}

4 **Simplifica utilizando las propiedades de las potencias.**

a) $\dfrac{m^6 \cdot m^{-6}}{(m^2)^4}$ **b)** $a^5 \cdot \left(\dfrac{1}{a}\right)^3$ **c)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^4 : \left(\dfrac{1}{b}\right)^3$ **d)** $\dfrac{a^2 \cdot a^{-1} \cdot a^{-5}}{(a^2)^{-2}}$

a) $\dfrac{m^{6-6}}{(m)^{2 \cdot 4}} = \dfrac{m^0}{m^8} = \dfrac{1}{m^8} = m^{-8}$

b) $a^5 \cdot \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{a^5}{a^3} = a^{3-3} = a^2$

c) $\left(\dfrac{a^4}{b^4}\right) : \left(\dfrac{1}{b^3}\right) = \dfrac{a^4 \cdot b^3}{b^4} = a^4 \cdot b^3 \cdot b^{-4} = a^4 \cdot b^{3-4} = a^4 \cdot b^{-1} = \dfrac{a^4}{b}$

d) $\dfrac{a^{2-1-5}}{a^{2 \cdot (-2)}} = \dfrac{a^{-4}}{a^{-4}} = a^{-4-(-4)} = a^0 = 1$

5 **Calcula.**

a) $\left(\dfrac{3}{2} - 1\right)^{-3} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ **b)** $\left(2 + \dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-2}$

a) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

b) $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{9}{49} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{49}$

6 **Expresa como potencia única.**

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ **b)** $\dfrac{2^5 \cdot 2^{-7}}{2^{-4}}$ **c)** $\left[\left(\dfrac{1}{2} + 1\right)^{-1}\right]^3$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ **e)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-3}{2}\right)^4$ **f)** $\dfrac{3^{-1}}{5 \cdot 15^2}$

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-5}$ b) $\dfrac{2^{-2}}{2^{-4}} = 2^2$ c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ e) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-1}$ f) $\left(\dfrac{1}{15}\right)^3$

7 **¿Verdadero o falso?**

a) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-2} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{9}{2}$ **b)** $\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-1} = \dfrac{3}{49}$

a) Verdadero:

$$6^2 : 2^3 = \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{2^3} = \dfrac{9}{2} = 22$$

b) Falso:

$$\dfrac{3^2}{7^2} \cdot \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{147} \neq \dfrac{3}{49}$$

8 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{4ab}{9} : \dfrac{b^2}{3a}$ **b)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} \cdot (a^{-1})^{-2}$

c) $(6a)^{-1} \cdot (3a^{-2})^{-2}$ **d)** $(a^{-1} \cdot b^2)^2 : (ab)^2$

Las soluciones, no ordenadas, son:

$\dfrac{b^3}{a}$; $\dfrac{b^2}{a^4}$; $\dfrac{4a^2}{3b}$; $\dfrac{a^3}{54}$.

a) $\dfrac{4ab \cdot 3a}{9b^2} = \dfrac{4a^2}{3b}$ b) $\dfrac{b^3}{a^3} \cdot a^2 = \dfrac{b^3}{a} = a^{-1}b^3$

c) $\dfrac{1}{6a} \cdot 3^{-2}a^4 = \dfrac{a^3}{54}$ d) $\dfrac{b^4}{a^2} : (ab)^2 = \dfrac{b^4}{a^4b^2} = a^{-4}b^2$

9 **Calcula utilizando las propiedades de las potencias.**

a) $\dfrac{6^4 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4}$ **b)** $\dfrac{15^2 \cdot 4^2}{12^2 \cdot 10}$

c) $\dfrac{2^{-5} \cdot 4^3}{16}$ **d)** $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 4^{-1}}{2^3 \cdot 9^{-1}}$

e) $\dfrac{6^2 \cdot 9^2}{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}$ **f)** $\dfrac{2^{-5} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 6^{-1}}$

a) $\dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot (2^3)^2}{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4} = \dfrac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^6}{3^2 \cdot 2^7} = \dfrac{3^4 \cdot 2^{10}}{3^2 \cdot 2^7} = 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{10} \cdot 2^{-7} = 3^2 \cdot 2^3 = 72$

b) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2)^2}{3^2 \cdot (2^2)^2 \cdot 2 \cdot 5} = 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^4 \cdot 2^{-4} \cdot 2^{-1} \cdot 5^2 \cdot 5^{-1} = 3^0 \cdot 2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 5 = 2^{-1} \cdot 5$

c) $\dfrac{2^{-5} \cdot (2^2)^3}{2^4} = 2^{-5} \cdot 2^6 \cdot 2^{-4} = 2^{-3}$

d) $\dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^{-1}}{2^3 \cdot (3^2)^{-1}} = \dfrac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-2}} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-(-2)} = 2^{5-5} \cdot 3^{2+2} = 2^0 \cdot 3^4 = 3^4 = 81$

e) $\dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot (3^2)^2}{2^3 \cdot 3^2 \cdot (2^2)^2} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4} = 2^2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} = 2^{-5} \cdot 3^4$

f) $\dfrac{2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-2}}{2^{-4} \cdot (2^2)^2 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^{-2} \cdot 3^0}{2^{-1} \cdot 3^{-1}} = 2^{-2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 2^{-1} \cdot 3$

10 **Simplifica.**

a) $\dfrac{2^3 \cdot (-3)^2 \cdot 4^2}{6^3 \cdot 9^2}$ **b)** $\dfrac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 9^{-1}}{2^{-5} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 3^2}$

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4} = \dfrac{2^7 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 3^7} = \dfrac{2^4}{3^5}$ b) $\dfrac{2^{-4} \cdot 2^4 \cdot 3 \cdot 3^{-2}}{2^{-5} \cdot 2^3 \cdot 3^4} = \dfrac{3^{-1}}{2^{-2} \cdot 3^4} = \dfrac{2^2}{3^5}$

Potencias de base 10

11 **Indica el valor de *n* en cada caso:**

a) $0{,}001 = 10^n$ **b)** $(10\,000)^2 = 10^n$

c) $0{,}0000001 = 10^n$ **d)** $0{,}0001^3 = 10^n$

a) $n = -3$ b) $n = 8$

c) $n = -7$ d) $n = -12$

12 **¿Verdadero o falso?**

a) $(0{,}001)^{-3} = 10^9$ **b)** $(0{,}001)^4 = 10^{12}$

c) $(0{,}01)^3 = 10^{-6}$ **d)** $(10^{-2})^5 = (0{,}1)^{10}$

a) Verdadero $\rightarrow$ $(10^{-3})^{-3} = 10^9$

b) Falso $\rightarrow$ $(10^{-3})^{-4} = (10)^{-12}$

c) Verdadero $\rightarrow$ $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$

d) Verdadero $\rightarrow$ $(10)^{-10} = (10^{-1})^{10} = (0{,}1)^{10}$

13 **Expresa como una potencia de base 10.**

a) $(0{,}01)^{-5}$ **b)** $\left(\dfrac{1}{0{,}001}\right)^4$ **c)** $\left(\dfrac{1}{10^3}\right)^{-3}$ **d)** $\left(\dfrac{0{,}1^3}{10^5}\right)^2$

a) $(10^{-2})^{-5} = 10^{10}$

b) $\left(\dfrac{1}{10^{-3}}\right)^4 = (10^{-(-3)})^4 = 10^{12}$

c) $(10^{-3})^{-3} = 10^9$

d) $((10^{-1})^3 \cdot 10^{-5})^2 = (10^{-3})^2 \cdot (10^{-5})^2 = 10^{-6} \cdot 10^{-10} = 10^{-16}$

14 **Escribe, como se hace en los ejemplos, dos potencias de base 10 consecutivas entre las que estén los siguientes números:**

- $10^2 < 234 < 10^3$ $10^{-1} < 0{,}28 < 10^0$

a) 8,35 **b)** 762

c) 13 456 **d)** 1 230 022 045

e) 0,18 **f)** 0,008

g) 0,02 **h)** 0,000007

a) $10^0 < 8{,}35 < 10^1$ b) $10^2 < 762 < 10^3$

c) $10^4 < 13\,456 < 10^5$ d) $10^9 < 1\,230\,022\,045 < 10^{10}$

e) $10^{-1} < 0{,}18 < 10^0$ f) $10^{-3} < 0{,}008 < 10^{-2}$

g) $10^{-2} < 0{,}02 < 10^{-1}$ h) $10^{-6} < 0{,}000007 < 10^{-5}$

Página 39

Notación científica

15 **Escribe estos números con todas sus cifras:**

a) $4 \cdot 10^{7}$ **b)** $5 \cdot 10^{-4}$ **c)** $9{,}73 \cdot 10^{8}$

d) $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ **e)** $3{,}8 \cdot 10^{10}$ **f)** $1{,}5 \cdot 10^{-5}$

a) 40 000 000 b) 0,0005 c) 973 000 000

d) 0,0000085 e) 38 000 000 000 f) 0,000015

16 **Escribe en notación científica:**

a) 13 800 000 **b)** 0,000005 **c)** 4 800 000 000

d) 0,0000173 **e)** $153 \cdot 10^{4}$ **f)** $93{,}8 \cdot 10^{-4}$

a) $1{,}38 \cdot 10^{7}$ b) $5 \cdot 10^{-6}$ c) $4{,}8 \cdot 10^{9}$

d) $1{,}73 \cdot 10^{-5}$ e) $1\,530\,000 = 1{,}53 \cdot 10^{6}$ f) $0{,}00938 = 9{,}38 \cdot 10^{-3}$

17 **Completa estas igualdades:**

a) $5{,}25 \cdot 10^{7} = \ldots\ 10^{6}$ **b)** $2 \cdot 10^{3} = \ldots\ 10^{4}$

c) $4{,}7 \cdot 10^{-3} = \ldots\ 10^{-2}$ **d)** $234 \cdot 10^{4} = \ldots\ 10^{3}$

a) $52{,}5 \cdot 10^{6}$ b) $0{,}2 \cdot 10^{4}$

c) $0{,}47 \cdot 10^{-2}$ d) $2\,340 \cdot 10^{3}$

19 **Calcula y comprueba con la calculadora.**

a) $(2 \cdot 10^{5}) \cdot (3 \cdot 10^{12})$ **b)** $(1{,}5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^{-5})$

c) $(3{,}4 \cdot 10^{-8}) \cdot (2 \cdot 10^{17})$ **d)** $(8 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{17})$

e) $(9 \cdot 10^{-7}) : (3 \cdot 10^{7})$ **f)** $(4{,}4 \cdot 10^{8}) : (2 \cdot 10^{-5})$

a) $6 \cdot 10^{17}$ b) $3 \cdot 10^{-12}$

c) $6{,}8 \cdot 10^{9}$ d) $4 \cdot 10^{-5}$

e) $3 \cdot 10^{-14}$ f) $2{,}2 \cdot 10^{13}$

20 **Calcula, expresa el resultado en notación científica y comprueba con la calculadora.**

a) $(2{,}5 \cdot 10^{7}) \cdot (8 \cdot 10^{3})$ **b)** $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^{5})$

c) $(7{,}4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6})$ **d)** $(1{,}2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3})$

a) $(2{,}5 \cdot 10^{7}) \cdot (8 \cdot 10^{3}) = 2{,}5 \cdot 8 \cdot 10^{10} = 20 \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^{11}$

b) $(5 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^{5}) = (5 : 8) \cdot 10^{-8} = 0{,}625 \cdot 10^{-8} = 6{,}25 \cdot 10^{-9}$

c) $(7{,}4 \cdot 10^{13}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) = 7{,}4 \cdot 5 \cdot 10^{7} = 37 \cdot 10^{7} = 3{,}7 \cdot 10^{8}$

d) $(1{,}2 \cdot 10^{11}) : (2 \cdot 10^{-3}) = (1{,}2 : 2) \cdot 10^{14} = 0{,}6 \cdot 10^{14} = 6 \cdot 10^{13}$

21 **Efectúa y comprueba con la calculadora.**

a) $3{,}6 \cdot 10^{12} - 4 \cdot 10^{11}$ **b)** $5 \cdot 10^{9} + 8{,}1 \cdot 10^{10}$

c) $8 \cdot 10^{-8} - 5 \cdot 10^{-9}$ **d)** $5{,}32 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-6}$

a) $3{,}6 \cdot 10 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{11} = (36 - 4) \cdot 10^{11} = 32 \cdot 10^{11} = 3{,}2 \cdot 10^{12}$

b) $5 \cdot 10^{9} + 81 \cdot 10^{9} = 86 \cdot 10^{9} = 8{,}6 \cdot 10^{10}$

c) $80 \cdot 10^{-9} - 5 \cdot 10^{-9} = 75 \cdot 10^{-9} = 7{,}5 \cdot 10^{-8}$

d) $532 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-6} = 540 \cdot 10^{-6} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}$

22 **Efectúa y escribe el resultado con todas las cifras.**

a) $5{,}3 \cdot 10^{11} - 1{,}2 \cdot 10^{12} + 7{,}2 \cdot 10^{10}$ **b)** $4{,}2 \cdot 10^{-6} - 8{,}2 \cdot 10^{-7} + 1{,}8 \cdot 10^{-5}$

c) $(2{,}25 \cdot 10^{22}) \cdot (4 \cdot 10^{-15}) : (3 \cdot 10^{-3})$ **d)** $(1{,}4 \cdot 10^{-7})^{2} : (5 \cdot 10^{-5})$

a) –598 000 000 000 b) 0,00002138

c) 30 000 000 000 d) 0,000000000392

Raíces y radicales

23 **Halla, cuando sea posible, las raíces siguientes:**

a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ **c)** $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ **d)** $\sqrt[4]{-1}$

e) $\sqrt[3]{216}$ **f)** $\sqrt[7]{-128}$ **g)** $\sqrt[5]{-243}$ **h)** $\sqrt[6]{4\,096}$

i) $\sqrt[6]{64}$ **j)** $\sqrt[3]{-8}$ **k)** $\sqrt[4]{625}$

l) $\sqrt{-8}$ **m)** $\sqrt[4]{625/16}$ **n)** $\sqrt[5]{-1}$

a) 2 b) $\dfrac{4}{5}$ c) $\dfrac{1}{2}$

d) No tiene solución real. e) 6 f) –2

g) –3 h) 4 i) 2

j) –2 k) 5

l) No tiene solución real. m) $\dfrac{5}{2}$ n) –1

24 **Las siguientes raíces no son exactas. ¿Entre qué naturales consecutivos están?**

a) $\sqrt[3]{1235}$ **b)** $\sqrt[4]{520}$ **c)** $\sqrt[5]{96}$ **d)** $\sqrt{1{,}5 \cdot 10^{3}}$

a) Entre $\sqrt[3]{1\,000} = 10$ y $\sqrt[3]{1\,331} = 11$ b) Entre $\sqrt[4]{256} = 4$ y $\sqrt[4]{625} = 5$

c) Entre $\sqrt[5]{32} = 2$ y $\sqrt[5]{243} = 3$ d) Entre $\sqrt{1\,444} = 38$ y $\sqrt{1\,521} = 39$

25 **Extrae de cada radical los factores que sea posible:**

a) $\sqrt[4]{32}$ **b)** $\sqrt[3]{81}$ **c)** $\sqrt[3]{200}$

d) $\sqrt{50}$ **e)** $\sqrt[4]{144}$ **f)** $\sqrt[3]{250}$

g) $\sqrt[5]{64}$ **h)** $\sqrt[3]{243}$ **i)** $\sqrt{4a^3}$

a) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2}$ b) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{200} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^2} = 2\sqrt[3]{5^2}$

d) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$ e) $\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[4]{3^2}$ f) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3} = 5\sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$ h) $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2}$ i) $\sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}$

26 **Simplifica si es posible.**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{5} \cdot \sqrt{16}$ **c)** $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

d) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{2}$ **e)** $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ **f)** $\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{6}$

a) $\sqrt{16} = 4$ b) $\sqrt{80}$ c) $\sqrt[3]{20}$

d) No es posible. e) $\sqrt[4]{81} = 3$ f) No es posible.

27 **Simplifica.**

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^4$ **b)** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ **c)** $\left(\sqrt[6]{2^2}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{1000}$ **e)** $\sqrt[5]{2}\,\sqrt[5]{16}$ **f)** $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{81}$

a) 2 b) 2^2 c) 2

d) $10\sqrt[3]{10}$ e) 2 f) 9

29 **Extrae factores fuera de cada raíz.**

a) $\sqrt{2^2 \cdot 5^3}$ **b)** $\sqrt[3]{2^6 \cdot 7^3}$ **c)** $\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^6}$

d) $\sqrt{5^2 \cdot 7^4 \cdot 3^5}$ **e)** $\sqrt[3]{3^3 \cdot 5}$ **f)** $\sqrt[3]{4^4 \cdot 5^2 \cdot 7^6}$

g) $\sqrt[3]{27 \cdot a \cdot b^3}$ **h)** $\sqrt[4]{16a^5 \cdot b}$ **i)** $\sqrt[5]{32 \cdot a^2 \cdot b^{10}}$

a) $10\sqrt{5} = 4$ b) $2^2 \cdot 7$ c) $3\sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2}$

d) $5 \cdot 7^2 \cdot 3^2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt[3]{5}$ f) $4 \cdot 7^2\sqrt[3]{4 \cdot 5^2}$

g) $3b\sqrt[3]{a}$ h) $2a^4\sqrt[4]{ab}$ i) $2b^2\sqrt[5]{a^2}$

30 **Extrae factores y simplifica.**

$$\sqrt[3]{54ab^3} : \sqrt[3]{16a^4}$$

$$\sqrt[3]{3^3 \cdot 2 \cdot ab^3} : \sqrt[3]{2^4 \cdot a^4} = 3b\sqrt[3]{2a} : 2a\sqrt[3]{2a} = 3b(2a)^{1/3} \cdot (2a)^{-1} \cdot (2a)^{-1/3} = 3b(2a)^{-1} = \frac{3b}{2a}$$

Página 40

31 Introduce factores en la raíz, como en el ejemplo.

- $2^2 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(2^2)^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 7} = \sqrt[3]{448}$

a) $5a\sqrt{3}$ **b)** $a^2 \cdot \sqrt{13ab}$ **c)** $ab \cdot \sqrt[3]{2a}$

d) $-2b \cdot \sqrt[3]{3}$ **e)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{5}$ **f)** $\dfrac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$

a) $\sqrt{(5a)^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot a^2} = \sqrt{75a^2}$

b) $\sqrt{(a^2)^2 \cdot 13ab} = \sqrt{13ba^5}$

c) $\sqrt[3]{(ab)^3 \cdot 2a} = \sqrt[3]{2a^4 b^3}$

d) $\sqrt[3]{3\,(-2b)^3} = \sqrt[3]{3\,(-2)^3\, b^3} = \sqrt[3]{-24b^3}$

e) $\sqrt[4]{(\sqrt{2})^4 5} = \sqrt[4]{(2^{1/2})^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 5} = \sqrt[4]{20}$

f) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \cdot \dfrac{5}{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 5}{3^3 \cdot 2^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{10}{27}}$

32 Opera y simplifica.

a) $\sqrt{1125} : \sqrt{15}$ **b)** $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18}$

c) $(3\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$ **d)** $(\sqrt{5} + \sqrt{6})(\sqrt{5} - \sqrt{6})$

a) $\sqrt{5^3 \cdot 3^2} : \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{\dfrac{5^3 \cdot 3^2}{5 \cdot 3}} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$

c) $(3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + (\sqrt{8})^2 = 9\,(\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{2 \cdot 8} + 8 = 18 + 24 + 8 = 50$

d) $(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = 5 - 6 = -1$

33 Solo tres de estas expresiones se pueden simplificar. Compruébalo:

a) $\sqrt{5} + \sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}$ **c)** $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{7}$ **e)** $(\sqrt[3]{4})^5$ **f)** $\sqrt{36} : \sqrt{18}$

a) $\sqrt{5} + \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = (1 + \sqrt{2})\sqrt{5}$

b) $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{3^3 \cdot 2} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3^3 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3^2 = 18$

c) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ no se puede simplificar

d) $\sqrt[3]{7} + \sqrt{7}$ no se puede simplificar

e) $((2^2)^{1/3})^5 = (2)^{10/3} = 8\sqrt[3]{2}$ no se puede simplificar

f) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2} : \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^2}} = \sqrt{2}$

34 **Simplifica las expresiones que puedas, y en las restantes, indica por qué no se pueden simplificar.**

a) $7\sqrt{2}-4\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **c)** $4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ **e)** $2\sqrt{5}-\frac{1}{3}\sqrt{5}$ **f)** $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $3\sqrt{2}$ b) No se puede, porque tienen distinto radicando.

c) $-\sqrt{3}$ d) Igual que b).

e) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

35 **Efectúa.**

a) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-10\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{80}-\sqrt{45}-\sqrt{20}$

c) $-\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}$ **d)** $\sqrt{175}+\sqrt{28}-5\sqrt{63}$

e) $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2}$ **f)** $\sqrt[3]{81}+7\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{24}$

a) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-10\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}-10\sqrt{2}=5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-10\sqrt{2}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{80}-\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{5\cdot 2^4}-\sqrt{5\cdot 3^2}-\sqrt{5\cdot 2^2}=4\sqrt{5}-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=-\sqrt{5}$

c) $-\sqrt{48}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}=-\sqrt{3\cdot 2^4}+3\sqrt{3\cdot 5^2}-\sqrt{3^3\cdot 2^2}=-4\sqrt{3}+15\sqrt{3}-6\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{175}+\sqrt{28}-5\sqrt{63}=\sqrt{7\cdot 5^2}+\sqrt{7\cdot 2^2}-5\sqrt{7\cdot 3^2}=5\sqrt{7}+2\sqrt{7}-15\sqrt{7}=-8\sqrt{7}$

e) $\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 5^3}-\sqrt[3]{2^7}+\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt[3]{3^4}+7\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3\cdot 2^3}+7\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{3}=8\sqrt[3]{3}$

Resuelve problemas

36 **Expresa en notación científica el número de segundos que tiene un año. ¿Qué edad tendría una persona que haya vivido 2 000 millones de segundos?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 año tiene 365 días}\\ \text{1 día tiene 24 horas}\\ \text{1 hora tiene 3 600 segundos}\end{array}\right\} \rightarrow 365\cdot 24\cdot 3600=31\,536\,000$$

* si el año es bisiesto el resultado es otro.

$3{,}1536\cdot 10^7$ segundos tiene un año.

2 000 000 000 segundos $\rightarrow 2\cdot 10^9 : 3{,}1536\cdot 10^7 = 63{,}4$ años.

37 **La longitud media de una bacteria es de 2 µm, que equivale a $2\cdot 10^{-6}$ m. En el mundo hay aproximadamente $5\cdot 10^{30}$ bacterias. Si se pusieran una detrás de otra, ¿cuántos kilómetros mediría la fila? ¿A cuántos años luz corresponde esa distancia?**

$2\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^{30}=10\cdot 10^{24}$ m $=10^{25}$ m

Pasamos a km $\frac{10^{25}}{1\,000}=10^{22}$ km

Año luz: $9{,}6\cdot 10^{12}$ km $\rightarrow 10^{22} : 9{,}6\cdot 10^{12}\approx 10^9$ años luz.

38 **Un centímetro cúbico de agua contiene $3{,}35 \cdot 10^{22}$ moléculas de agua. Si en nuestro planeta hay, aproximadamente, $1{,}39 \cdot 10^9$ km³ de agua, ¿cuántas moléculas de agua hay en la Tierra? ¿Y en un vaso de 2/5 de litro?**

$1{,}39 \cdot 10^9 \cdot 10^{15} = 1{,}39 \cdot 10^{24}$ cm³

$1{,}39 \cdot 10^{24} \cdot 3{,}35 \cdot 10^{22} = 4{,}6565 \cdot 10^{46}$ moléculas.

$\frac{2}{5}$ de litro $= \frac{2}{5}$ dm³ $= \frac{2}{5} \cdot 10^3$ cm³ $= 0{,}4 \cdot 10^3$ cm³

$0{,}4 \cdot 10^3 \cdot 3{,}35 \cdot 10^{22} = 1{,}34 \cdot 10^{25}$ moléculas en un vaso.

39 **El diámetro de un virus es $5 \cdot 10^{-4}$ mm. ¿Cuántos de esos virus son necesarios para rodear la Tierra? (Radio medio de la Tierra: 6371 km).**

Calculamos el perímetro de la Tierra $\rightarrow$ $2\pi r = 2\pi \cdot 6371 = 12742\,\pi$ km

$12742\pi : 5 \cdot 10^{-4} = 2548{,}4\pi \cdot 10^4$ virus

40 **De Neptuno al Sol hay $4{,}50 \cdot 10^9$ km, y de la Tierra al Sol, $1{,}50 \cdot 10^8$ km. Cuando los tres estén alineados, ¿a qué distancia se encontrará Neptuno de la Tierra? Si una nave espacial sale de la Tierra con dirección a Neptuno a 18000 km/h, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a su destino?**

Consideramos que el sol está en un extremo, entonces se restan las distancias:

$$4{,}5 \cdot 10^9 - 1{,}5 \cdot 10^8 = 4{,}4 \cdot 10^9 \text{ km}$$

$t = \frac{e}{v} = \frac{4{,}4 \cdot 10^9}{1{,}8 \cdot 10^4} = 2{,}4 \cdot 10^5$ horas.

41 **Observa las masas de estos planetas:**

Tierra: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg **Marte: $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg** **Júpiter: $1{,}90 \cdot 10^{27}$ kg**

a) ¿Cuántos kilos pesa más la Tierra que Marte?

b) ¿Cuántas veces pesa más Júpiter que Marte?

a) La Tierra pesa $5{,}98 \cdot 10^{24} - 6{,}42 \cdot 10^{23} = 5{,}338 \cdot 10^{24}$ kg más que Marte.

b) Júpiter pesa aproximadamente $\frac{1{,}90 \cdot 10^{27}}{6{,}42 \cdot 10^{23}} \approx 3000$ veces más (2959,501).

42 **La galaxia M87, que está a 50 millones de años-luz de la Tierra, tiene un agujero negro cuyo diámetro es 60 años-luz y cuya masa es dos mil millones de veces la masa del Sol.**

a) Calcula la masa del agujero negro en kilogramos. (La masa del Sol es, aproximadamente, 2 · 1 030 kg).

b) Expresa en kilómetros la distancia de esa galaxia a la Tierra y el diámetro del agujero negro.

a) La masa del agujero negro es $2 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 4 \cdot 10^{39}$ kg.

b) Un año luz son $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

Distancia $= 50 \cdot 10^6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 4{,}73 \cdot 10^{20}$ km

Diámetro $= 60 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 5{,}68 \cdot 10^{14}$ km

43 **En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide $2\sqrt{6}$ m, y uno de los catetos, $2\sqrt{3}$ m. ¿Cuánto mide el otro cateto? ¿Y su área? Da los valores exactos; es decir, con radicales.**

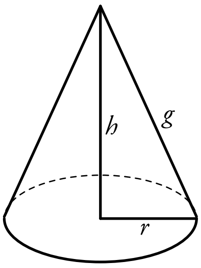
$(2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + c^2 \to 4 \cdot 6 = 4 \cdot 3 + c^2 \to 24 = 12 + c^2 \to c^2 = 24 - 12 \to$

$\to c^2 = 12 \to c = \sqrt{12} \to c = \sqrt{2^2 \cdot 3} \to c = 2\sqrt{3}$ m

$\text{Área} = \dfrac{(2\sqrt{3})^2}{2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ m}^2$

44 **Halla el volumen de un cono de 18 cm de generatriz y $6\sqrt{3}$ cm de radio de la base.**

$\boldsymbol{V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$



$g^2 = r^2 + h^2 \to (18)^2 = (6\sqrt{3})^2 + h^2 \to 324 = 36 \cdot 3 + h^2 \to$

$\to 324 - 108 = h^2 \to h^2 = 216 \to h = \sqrt{216} \to h = \sqrt{2^3 \cdot 3^3} \to$

$\to h = 2 \cdot 3\sqrt{6} \to h = 6\sqrt{6}$ cm

Luego $V_{CONO} = \frac{1}{3}\pi(6\sqrt{3})^2 \cdot 6\sqrt{6} = \frac{1}{3}\pi 36 \cdot 3 \cdot 6\sqrt{6} = \pi \cdot 216\sqrt{6}$ cm^3

45 **El volumen de la Luna es de $2{,}2 \cdot 10^{10}$ km^3. ¿Cuántos kilómetros mide su radio? Utiliza la calculadora y da el resultado en notación científica.**

$\boldsymbol{V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi R^3}$

$2{,}2 \cdot 10^{10} = \frac{4}{3}\pi R^3 \to R^3 = \dfrac{2{,}2 \cdot 10^{10} \cdot 3}{4\pi} \to R^3 = \dfrac{6{,}6 \cdot 10^{10}}{4\pi} \to$

$\to R = \sqrt[3]{\dfrac{6{,}6 \cdot 10^{10}}{4\pi}} \to R = \sqrt[3]{\dfrac{6{,}6}{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{10^{10}} \to R = 1{,}74 \cdot 10^3$ km

46 **El VCM (Volumen Corpuscular Medio) es el volumen promedio de los glóbulos rojos. En una adolescente, el VCM es de 90 femtolitros (1 fL = 10^{-15} L). Si tiene unos 5 L de sangre y 5 millones de glóbulos rojos por mm^3, ¿cuántos litros ocupan los glóbulos rojos de una adolescente promedio?**

$\left.\begin{array}{l} \text{5 litros de sangre} \to 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 \to 5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^6 = 2{,}5 \cdot 10^{13} \\ 90 \text{ fl} = 90 \cdot 10^{-15} = 9 \cdot 10^{-14} \text{ litros} \end{array}\right\} \to 2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^{-4} =$

$= 2{,}25$ litros

Página 41

47 Meta 11.6. Leo en un diario: ***La cantidad anual de CO_2 emitida en 2016 por una central de carbón fue 6 930 000 toneladas, según el Registro Estatal de Emisiones y Fuentes Contaminantes. Para los coches nuevos, la emisión media es de 118,1 g CO_2/km según la Agencia Europea de Medio Ambiente y se estima que un vehículo nuevo recorre en España unos 25 000 km al año.***

a) ¿La emisión de cuántas toneladas anuales de CO_2 se evitarían si suprimiéramos un vehículo nuevo?

b) ¿A cuántos coches nuevos equivale la cantidad de CO_2 emitida por la central en 2016?

c) ¿Es correcta la siguiente afirmación?

Un coche nuevo emite 2,9 t anuales de CO_2 y 2,3 millones de ellos emitirán tanto como la central.

a) $118{,}1 \cdot 25\,000 = 2\,952\,500$ g $\approx 2{,}95$ toneladas de CO_2 emitidas por un coche nuevo.

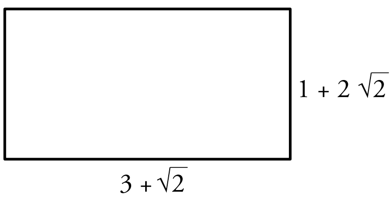
b) $6\,930\,000 : 2{,}95 = 2\,349\,152{,}5$ coches nuevos.

c) Un coche nuevo emite 2,9 toneladas anuales.

2,3 millones emiten 6 785 000

Luego la afirmación es correcta.

48 Halla el perímetro y el área del rectángulo *ABCD* tal que: $\overline{AB} = 3 + \sqrt{2}$ cm y $\overline{BC} = 1 + 2\sqrt{2}$ cm. Escribe las respuestas en la forma $a + b\sqrt{2}$, donde *a* y *b* son números naturales.



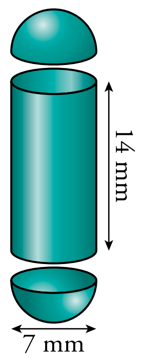
El perímetro del rectánculo es:

$$P = 2(\overline{AB}) + 2(\overline{BC}) = 2(3 + \sqrt{2}) + 2(1 + 2\sqrt{2}) =$$
$$= 6 + 2\sqrt{2} + 2 + 4\sqrt{2} = 8 + 6\sqrt{2}$$

El área del rectángulo es:

$$A = b \cdot h = (3 + \sqrt{2}) \cdot (1 + 2\sqrt{2}) = 3 + 6\sqrt{2} + \sqrt{2} + 4 =$$
$$= 7 + 7\sqrt{2}$$

49 Las cápsulas de un fármaco están formadas por dos semiesferas de 7 mm de diámetro y un cilindro de 14 mm de altura. Un laboratorio produce 4 toneladas de ese fármaco y quiere envasarlo en cápsulas que contengan 500 mg cada una.



¿Cuántas cápsulas puede producir? Halla el volumen de cada cápsula.

4 toneladas $\to$ $4 \cdot 1\,000$ kg $\to$ $4 \cdot 10^3$ kg $= 4 \cdot 10^3 \cdot 10^6$ mg $= 4 \cdot 10^9$ mg

1.º) $4 \cdot 10^9 : 500 = 8 \cdot 10^6$ cápsulas.

2.º) Volumen de cada cápsula:

Calculamos el volumen de una esfera de radio 3,5 mm.

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3{,}5)r^3 = \frac{4}{3}(42{,}875)\pi \text{mm}^3$$

$$V_{CILINDRO} = A_{BASE} \cdot Altura = \pi r^2 \cdot 14 = \pi(3{,}5)^2 \cdot 14 = 12{,}25 \cdot 14 \cdot \pi = 171{,}5 \cdot \pi \text{ mm}^3$$

$$V_{CÁPSULA} = V_{ESFERA} + V_{CILINDRO} = \frac{4}{3}(42{,}875)\pi + 171{,}5 \cdot \pi =$$

$$= \left(\frac{4}{3}(42{,}875) + 171{,}5\right)\pi = 228{,}67 \cdot \pi \text{ mm}^3$$

Resuelve: un poco más difícil

50 **Dados un cuadrado de lado $1 + \sqrt{3}$ cm y un rectángulo de 1 cm de altura y base variable:**

a) ¿Cuál debe ser la base del rectángulo para que las dos figuras tengan el mismo perímetro?

b) ¿Cuánto debe medir la base para que el área del cuadrado sea el doble de la del rectángulo?

a) 1.º) Calculamos el perímetro del cuadrado:

$P_c = 4(1 + \sqrt{3}) = 4 + 4\sqrt{3}$

2.º) Calculamos el perímetro del rectángulo mediante la fórmula:

$P_r = 2 \cdot \text{h} + 2 \cdot b$

Donde h y b son la altura y la base respectivamente:

$P_r = 2 \cdot 1 + 2 \cdot b$

3.º) Como los perímetros han de ser iguales, igualamos y despejamos b:

$$4 + 4\sqrt{3} = 2 + 2b \rightarrow b = \frac{4 - 2 + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$$

b) Procedemos del mismo modo con las áreas:

1.º) $A_c = (1 + 2\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$

2.º) $A_r = b \cdot \text{h} = 1 \cdot b$

3.º) El área del cuadrado tiene que ser el doble que el área del rectángulo luego:

$$2 \cdot b = 4 + 2\sqrt{3} \rightarrow b = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

51 **Si el radio de un CD mide 6 cm, ¿es posible guardarlo en un sobre cuadrado de 16 cm de diagonal? ¿Y de 17 cm de diagonal?**

El radio del CD es 6 cm $\rightarrow$ El diámetro es 12 cm.

Necesitamos un sobre de lado mayor o igual que 12 cm.

Sabemos que la diagonal del cuadrado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales, luego tenemos la fórmula:

$$\text{h}^2 = 2c^2$$

Calculamos c:

$$(16)^2 = 2c^2 \rightarrow 256 = 2c^2 \rightarrow \frac{256}{2} = c^2 \rightarrow 128 = c^2 \rightarrow c = \sqrt{128} \rightarrow c = \sqrt{2^7} \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 2^3\sqrt{2} \rightarrow c = 8\sqrt{2} \approx 11{,}3$$

Entonces no nos vale un sobre de 16 cm de diagonal de 16 cm.

Veamos si nos vale uno de 17 cm:

$$(17)^2 = 2c^2 \rightarrow 289 = 2c^2 \rightarrow \frac{289}{2} = c^2 \rightarrow 144{,}5 = c^2 \rightarrow c = 12{,}021$$

Luego con uno de 17 cm de diagonal si nos vale.

52 **Reemplaza cada cuadrado por una cifra para que se cumplan estas igualdades:**

a) $\sqrt{12\square\square} = 3\square$ **b)** $\sqrt{\square} \cdot \sqrt{\square 8} = 6$

c) $\sqrt{6\square + \square 6} = 10$ **d)** $\sqrt{6\square + \square 6} = 10$

a) $\sqrt{1225} = 35$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 6$

c) $\sqrt{64 + 36} = 10$ d) $\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3}$

Reflexiona

53 **Justifica cuál debe ser el valor de** a**, en cada caso, para que se verifique la igualdad:**

a) $a^3 = 2^6$ **b)** $a^{-1} = 2$ **c)** $\sqrt{a} = \dfrac{4}{5}$

d) $\sqrt[4]{a} = 1$ **e)** $a^{-2} = \dfrac{1}{4}$ **f)** $a^{-5} = -1$

a) $a = 2^2$ b) $a = \dfrac{1}{2}$ c) $a = \dfrac{16}{25}$

d) $a = 1$ e) $a = 2$ f) $a = -1$

54 **¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) La potencia de un número negativo puede ser igual a 1.

b) Si $x < 0$**, entonces** $-x^3 > 0$**.**

c) $-x^2$ **es siempre un número positivo.**

d) El cubo de un número negativo es siempre menor que dicho número.

a) Verdadero. Por ejemplo: $(-1)^2$.

b) Verdadero. Por ejemplo: $-(-3)^3 > 0$.

c) Falso. Por ejemplo: $-(-3)^2 < 0$.

d) Verdadero. Por ejemplo: $(-3)^3 = -9$; $-9 < -3$.

55 **La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores. Cuando escribimos** $-\sqrt{4}$ **nos referimos a la raíz negativa. Es decir,** $-\sqrt{4} = -2$**.**

¿Cuál es el valor de las siguientes expresiones?

a) $-\sqrt{64}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $-\sqrt{1}$

d) $\sqrt[6]{1}$ **e)** $-\sqrt{9}$ **f)** $\sqrt[3]{-8}$

a) -8 b) ± 3 c) -1

d) ± 1 e) -3 f) -2

56 **¿Verdadero o falso?**

a) $(\sqrt{-2})^2 = 2$

b) $\sqrt[3]{(-2)^{-3}} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\sqrt{16+25} = 9$

d) $\sqrt[4]{(-10)(-10)} = \sqrt{10}$

e) $\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{2}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} = 1$

f) $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{3}+\sqrt{5}$

a) Falso $\rightarrow$ $(\sqrt{-2})^2 = -2$.

b) Verdadero.

c) Falso $\rightarrow$ $\sqrt{16+25} = \sqrt{41} \neq 9$.

d) Verdadero.

e) Falso $\rightarrow$ $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

f) Verdadero.

57 **Si $a^2 = b^2$, ¿qué podemos afirmar de a y b?**

Si $a^2 = b^2$ se pueden afirmar dos cosas. O bien $a = b$, o a es un número cualquiera y b es el mismo número pero negativo.

58 **Ordena los números n, n^2, $\sqrt{n}$ y $1/n$ en los siguientes casos:**

a) Si $n > 1$.

b) Si $0 < n < 1$.

a) $\dfrac{1}{n} < \sqrt{n} < n < n^2$

b) $n^2 < n < \sqrt{n} < \dfrac{1}{n}$

59 **¿Qué resultado obtendrás si realizas esta operación con tu calculadora? Justifícalo.**

$$\frac{10^{20}+100}{10^{20}}$$

El resultado será 1.

La explicación es que la calculadora tiene un límite que son los dígitos que entran en la pantalla.

Sumar 100 a una cantidad tan grande como 10^{20} para la calculadora es como no hacer nada (no puedo representar todos los dígitos de esa operación).

Entonces considera 100 una cantidad despreciable fuente a 10^{20}.

60 **Halla el número de cifras que tienen 2^8, 5^8 y 10^8. Haz lo mismo con 2^{11}, 5^{11} y 10^{11}. ¿Puedes deducir alguna regla?**

Si la potencia 2^{456} tiene m cifras y 5^{456} tiene n cifras, ¿cuántas cifras tendrá 10^{456}?

$2^8 \rightarrow$ 3 cifras; $5^8 \rightarrow$ 6 cifras; $10^8 \rightarrow 9 = 3 + 6$ cifras

$2^{11} \rightarrow$ 4 cifras; $5^{11} \rightarrow$ 8 cifras; $10^{11} \rightarrow 12 = 4 + 8$ cifras

Regla:

10^k tiene $m + n$ cifras siendo m el número de cifras que tiene 2^k y n el número de cifras que tiene 5^k.

Luego si $2^{456} \rightarrow p$ cifras y $5^{456} \rightarrow q$ cifras

Entonces $10^{456} \rightarrow p + q$ cifras

Página 42

Conjetura y generaliza

- **OBSERVA:** $1^3 = 1 \rightarrow 1^2 = 1^2$

  $1^3 + 2^3 = 9 \rightarrow 3^2 = (1 + 2)^2$

  $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \rightarrow 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$

- **HAZ UNA CONJETURA: ¿Puedes predecir el valor de las siguientes expresiones?**

  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$ $\quad$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = ?$ $\quad$ **¡Compruébalo!**

- **GENERALIZA TUS CONCLUSIONES:**

  — ¿Cuál sería el valor de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$?

  — Elabora una fórmula que te permita calcular:

  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ cualquiera que sea el término natural n.

  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3\,025$

  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

Página 43

Entrénate resolviendo problemas

- **Un coche y un camión parten a la vez de una población, por la misma carretera pero en sentidos opuestos.**

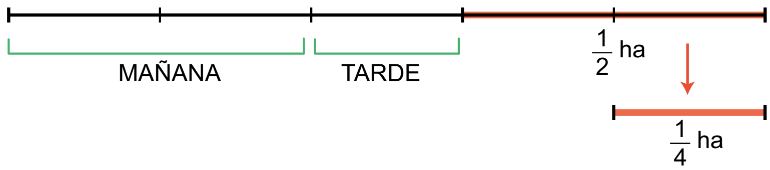
La velocidad del coche es de 120 km/h, y la del camión es de 90 km/h. ¿Qué distancia los separa al cabo de 10 minutos?

$10 \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ h}$

$d_{coche} = v \cdot t = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20 \text{ km}$ $\quad$ $d_{camión} = v \cdot t = 80 \cdot \frac{1}{6} = 13{,}33 \text{ km}$

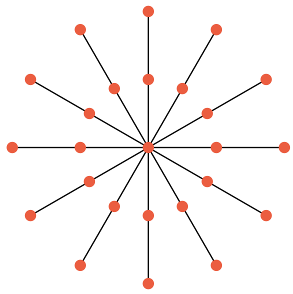
$d_{total} = 20 + 13{,}33 = 33{,}33 \text{ km}$

- **Un labrador ara por la mañana dos quintas partes de un campo. Por la tarde, vuelve al trabajo y ara un tercio de lo que le quedaba.**
Sabiendo que aún falta por arar media hectárea, ¿cuál es la superficie del campo?

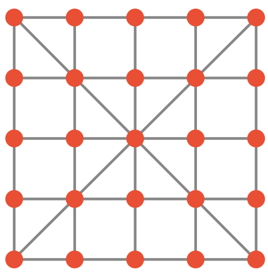


La superficie total del campo es de $\frac{5}{4}$ ha = 125 áreas.

- **Aquí tienes un problema y la solución que ha encontrado Andrés para él: «Con veinticinco soldaditos de plomo, ¿cómo formaríamos seis filas de cinco soldaditos cada una?».**



Sin embargo, Susana ha dispuesto los 25 soldados de modo que el número de filas, con 5 soldados en cada una, son muchas más de seis. ¿Te atreves a probar?



AUTOEVALUACIÓN

1 **Opera.**

$$(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 2^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$(-3)^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 2^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} + \frac{4}{3} - 2^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{3} - \frac{1}{8}(2^2) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{8} = \frac{2 + 24 - 9}{18} = \frac{17}{18}$$

2 **Simplifica.**

a) $\dfrac{3ab^{-2}}{6a^2b^{-1}}$ **b)** $\left(\dfrac{-1}{a}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-4} \cdot \dfrac{a^3}{b^2}$ **d)** $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-3} : \dfrac{(b^2)^{-1}}{a^{-4}}$

a) $\dfrac{1}{2ab}$ b) $-ab^2$

c) $\dfrac{b^2}{a}$ d) $\dfrac{1}{ab}$

3 **Aplica las propiedades de las potencias para simplificar esta expresión:**

$$\frac{(6^2)^3 \cdot 2^{-4}}{12 \cdot (-9)^2}$$

$$\frac{6^{2\cdot 3} \cdot 2^{-4}}{(3 \cdot 2^2) \cdot 9^2} = \frac{(2 \cdot 3)^6 \cdot 2^{-4}}{2^2 \cdot (3) \cdot (3^2)^2} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{-4}}{2^2 \cdot 3 \cdot 3^{2\cdot 2}} = \frac{3^6 \cdot 2^{6-4}}{2^2 \cdot 3 \cdot 3^4} = \frac{3^6 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 3^5} = 3^6 \cdot 3^{-5} \cdot 2^2 \cdot 2^{-2} =$$

$$= 3^{6-5} \cdot 2^{2-2} = 3 \cdot 2^0 = 3$$

4 **Expresa en notación científica.**

a) $\mathbf{758 \cdot 10^{-5}}$ **b)** $\mathbf{0{,}035 \cdot 10^{13}}$

c) $\mathbf{101 \cdot 10^{11}}$ **d)** $\mathbf{0{,}1001 \cdot 10^{-7}}$

a) $7{,}58 \cdot 10^7$ b) $3{,}5 \cdot 10^{11}$

c) $1{,}01 \cdot 10^{13}$ b) $1{,}001 \cdot 10^{-8}$

5 **Opera y comprueba luego con la calculadora.**

a) $\mathbf{(3{,}5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^{-13})}$

b) $\mathbf{(9{,}6 \cdot 10^{-8}) : (3{,}2 \cdot 10^{10})}$

c) $\mathbf{(2{,}7 \cdot 10^8) + (3{,}3 \cdot 10^7)}$

a) $28 \cdot 10^{-6} = 2{,}8 \cdot 10^{-5}$

b) $3 \cdot 10^{-18}$

c) $27 \cdot 10^7 + 3{,}3 \cdot 10^7 = 30{,}3 \cdot 10^7 = 3{,}03 \cdot 10^8$

6 **Las siguientes raíces no son exactas. Indica entre qué dos números enteros está comprendida cada una:**

a) $\sqrt{430}$ **b)** $\sqrt[3]{-32}$

c) $\sqrt[4]{786}$ **d)** $\sqrt[5]{234}$

a) Entre 20 y 21 b) Entre –4 y –3

c) Entre 5 y 6 d) Entre 2 y 3

7 **Simplifica.**

a) $\sqrt[3]{-1331}$ **b)** $\sqrt[5]{125} \cdot \sqrt[5]{25}$

c) $\sqrt[3]{120a^3b^4}$ **d)** $\sqrt[4]{32a^3b^5} \cdot \sqrt[4]{2b^3}$

a) –11 b) 5

c) $2a\sqrt[3]{15b}$ d) $2b^2\sqrt[4]{2^2a^3}$

8 **Simplifica cuando sea posible.**

a) $\sqrt{3}\sqrt{27}$ **b)** $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}$

c) $\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5} - \sqrt{9 \cdot 5}$ **d)** $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{2}$

a) $\sqrt{3^4} = 3^2$ b) $\left(\frac{1}{2} + 1\right)\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

c) $(2 + 1 - 3)\sqrt{5} = 0$ d) $2\sqrt{2}$

9 **La reserva de gas natural más grande de Asia Central contiene un volumen de $9 \cdot 10^{11}$ m³. Si su producción anual es de $1{,}8 \cdot 10^{13}$ litros y se mantiene el mismo ritmo a lo largo del tiempo, ¿cuántos años se podrá explotar este recurso energético?**

$1{,}8 \cdot 10^{13}$ litros $= 1{,}8 \cdot 10^{10}\ \text{m}^3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } 1{,}8 \cdot 10^{10}\ \text{m}^3 \to 1 \text{ años} \\ \text{Entonces } 9 \cdot 10^{11}\ \text{m}^3 \to x \text{ años} \end{array}\right\} \to x = \frac{9 \cdot 10^{11}}{1{,}8 \cdot 10^{10}} = 50 \text{ años}$$

10 **En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide $\sqrt{3}$ cm, y el otro, $\sqrt{6}$ cm. Calcula la longitud de la hipotenusa y el área del triángulo.**

$H^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 \to H^2 = 3 + 6 \to H = \sqrt{9} = 3$

Área del triángulo $\to \frac{b \cdot h}{2}$ donde $b \to$ cateto 1
$h \to$ cateto 2

$A_t = \to \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3}{2} = \sqrt{2}$ cm es el área

3 PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Página 45

Resuelve

1 **Resuelve los dos problemas del papiro de Rhind que se han propuesto en la página anterior, y respecto al primero de ellos, contesta:**

a) ¿Cuánto debe durar una tinaja?

b) ¿Cuánta grasa se puede consumir en un mes?

a) 1 año = 12 meses

Una tinaja debe durar 12 : 10 = 1,2 meses.

b) En un mes se puede consumir 10 : 12 = $\frac{5}{6}$ de tinaja.

2 **Un banco presta a un interés del 6 % anual.**

a) ¿Qué intereses obtendrá al prestar 100 doblones durante un año? ¿Y si los presta durante un mes? ¿Y si lo hace durante siete meses?

b) ¿Qué interés obtendrá por prestar 500 doblones durante siete meses?

a) $100 \cdot 1{,}06 = 106$

Al cabo de un año obtendrá 106 – 100 = 6 doblones.

$6 : 12 = 0{,}5\,\%$; $1{,}005 \cdot 100 = 100{,}5$

Si los presta durante un mes obtendrá un interés de 100,5 – 100 = 0,5 %.

$100 \cdot 1{,}005^7 = 103{,}55$

Si lo hace durante siete meses obtendrá un interés de 103,55 – 100 = 3,55 %.

b) $500 \cdot 1{,}005^7 = 517{,}76$

Por prestar 500 euros durante siete meses obtendrá un interés de 517,76 – 500 = 17,76 %.

3 **Resuelve el problema de la tablilla babilónica propuesto en la página anterior.**

$$C_F = 2 \cdot C \;\rightarrow\; 2C = C \cdot 1{,}2^n \;\rightarrow\; \frac{2C}{C} = 1{,}2^n \;\rightarrow\; 2 = 1{,}2^n$$

$$log\, 2 = log\,(1{,}2^n) \;\rightarrow\; log\, 2 = n \cdot log\, 1{,}2 \;\rightarrow\; n = \frac{log\, 2}{log\, 1{,}2} = 3{,}08$$

1 APROXIMACIONES Y ERRORES

Página 48

1 **Expresa con un número de cifras significativas que te parezca razonable las siguientes cantidades:**

a) Número de asistentes a todos los conciertos que hubo en 2019 en España: 20 927 049.

b) Número de abejas que pertenecen a una cierta colmena: 78 421.

c) Altura (en cm) que tiene la torre Burj Khalifa (Dubái): 82 816.

d) Número de estrellas que componen la galaxia Andrómeda: 985 428 372 491.

e) Población mundial: 7 683 589 082 habitantes.

f) PIB (Producto Interior Bruto) del 2017 de España: 1 311 421 328 974 €.

a) 21 000 000 personas

b) 80 000 abejas

c) 83 000 cm

d) 985 000 000 000 estrellas

e) 8 000 000 000 habitantes

f) 1 300 000 000 000 €

2 **¿Qué podemos decir del error absoluto y del error relativo de estas mediciones?**

a) Volumen de una bañera, 326 litros.

b) Volumen de una piscina, 326 m^3.

c) Volumen de un pantano, 326 hm^3.

d) Volumen de un asteroide, $3{,}26 \cdot 10^6$ km^3.

a) Error absoluto < 0,5 l

b) Error absoluto < 0,5 m^3 = 500 l

c) Error absoluto < 0,5 hm^3 = $5 \cdot 10^8$ l = 500 000 000 l

d) Error absoluto < $0{,}005 \cdot 10^6$ km^3 = $5 \cdot 10^3$ km^3 = $5 \cdot 10^{15}$ l

3 **Compara el error relativo cometido al hacer las siguientes pesadas:**

a) Una ballena, 37 toneladas.

b) Un pavo, 3 kg.

c) Don Anselmo, 87,3 kg.

d) La Tierra, $5{,}972 \cdot 10^{21}$ toneladas.

El menor error relativo se da al pesar la Tierra, porque se usan 4 cifras significativas.

Y el mayor error relativo se da al pesar al pavo, porque solo tiene una cifra significativa.

2 ▶ CÁLCULOS CON PORCENTAJES

Página 49

Cálculo mental

Expresa en forma decimal los siguientes porcentajes:

a) 10 % **b) 7 %** **c) 1 %**

d) 160 % **e) 127 %** **f) 5 %**

a) 0,1 b) 0,07 c) 0,01

d) 1,6 e) 1,27 f) 0,05

Cálculo mental

¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto a su total?

a) 15 respecto a 30. **b) 5 respecto a 20.** **c) 2 respecto a 10.**

d) 30 respecto a 3 000. **e) 3 respecto a 4.**

a) 50 % b) 25 % c) 20 %

d) 1 % e) 75 %

1 **Indica el tanto por ciento correspondiente a cada uno de estos decimales:**

a) 0,1 **b) 0,5** **c) 0,9** **d) 0,25**

e) 1 **f) 1,5** **g) 1,1** **h) 2**

a) 10 % b) 50 % c) 90 % d) 25 %

e) 100 % f) 150 % g) 110 % h) 200 %

2 **Calcula.**

a) El 24 % de 300. **b) El 112 % de 560.**

c) El 3 % de 83 200. **d) El 30 % de 83 200.**

e) El 230 % de 5 200. **f) El 300 % de 40.**

a) $300 \cdot 0{,}24 = 72$ b) $560 \cdot 1{,}12 = 627{,}2$

c) $83\,200 \cdot 0{,}03 = 2\,496$ d) $83\,200 \cdot 0{,}3 = 24\,960$

e) $5\,200 \cdot 2{,}30 = 11\,960$ f) $40 \cdot 3 = 120$

3 **Calcula el tanto por ciento que representa.**

a) 45 respecto a 225. **b) 6 160 respecto a 56 000.**

c) 4 230 respecto a 9 000. **d) 1 922 respecto a 1 240.**

e) 6 000 respecto a 4 000. **f) 975 respecto a 32 500.**

a) $\frac{45}{225} \cdot 100 = 20 \rightarrow 20\,\%$ b) $\frac{6\,160}{56\,000} \cdot 100 = 11 \rightarrow 11\,\%$

c) $\frac{4\,230}{9\,000} \cdot 100 = 47 \rightarrow 47\,\%$ d) $\frac{1\,922}{1\,240} \cdot 100 = 155 \rightarrow 155\,\%$

e) $\frac{6\,000}{4\,000} \cdot 100 = 150 \rightarrow 150\,\%$ f) $\frac{975}{32\,500} \cdot 100 = 3 \rightarrow 3\,\%$

Página 50

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estos aumentos porcentuales?

a) 25 %	**b) 5 %**	**c) 40 %**
d) 80 %	**e) 110 %**	**f) 200 %**
a) 1,25	b) 1,05	c) 1,4
d) 1,8	e) 2,1	f) 3

Cálculo mental

¿Qué índice de variación corresponde a estas disminuciones porcentuales?

a) 25 %	**b) 5 %**	**c) 40 %**
d) 15 %	**e) 88 %**	**f) 1 %**
a) 0,75	b) 0,95	c) 0,6
d) 0,85	e) 0,12	f) 0,99

4 **Unas acciones que valían a principios de año 13,70 € han subido un 35 %. ¿Cuánto valen ahora?**

Ahora valen 13,70 · 1,35 = 18,50 €.

5 **En una comunidad autónoma había 69 580 personas paradas. Han disminuido un 15 %. ¿Cuántas hay ahora?**

Ahora hay 69 580 · 0,85 = 59 143 parados.

Página 51

Cálculo mental

Di la cantidad inicial si sabemos que:

a) Aumenta 50 %; C. final = 1 500. **b) Aumenta 50 %; C. final = 3 000.**

c) Aumenta 25 %; C. final = 125. **d) Aumenta 25 %; C. final = 250.**

e) Disminuye 50 %; C. final = 400. **f) Disminuye 40 %; C. final = 600.**

a) 1 000 b) 2 000 c) 100

d) 200 e) 800 f) 1 000

6 **El precio de una batidora, después de cargarle un 21 % de IVA, es de 72,60 €. ¿Cuál es su precio antes de cargarle esos impuestos?**

El precio sin IVA es 72,60 : 1,21 = 60 €.

7 **Al estirar una goma elástica, su longitud aumenta un 30 % y, en esa posición, mide 104 cm. ¿Cuánto mide sin estirar?**

Sin estirar, la goma mide 104 : 1,30 = 80 cm.

8 **En unas rebajas en las que se hace el 30 % de descuento, Roberto ha comprado una cámara fotográfica por 50,40 €. ¿Cuál era su precio inicial?**

Su precio era de 50,40 : 0,70 = 72 €.

9 **Una cartera ha repartido el 36 % de las cartas que tenía. Aún le quedan 1 184. ¿Cuántas tenía antes de empezar el reparto?**

Si ha repartido el 36 %, le quedan el 64 %; es decir, 1184 : 0,64 = 1 850 cartas.

Página 52

10 **Un comercio aumenta el precio de sus productos un 30 % y, después, pretendiendo dejarlos al precio inicial, los rebaja un 30 %. ¿Es correcto? Veamos:**

a) Un ordenador que inicialmente costaba 1 000 €, ¿cuánto costará en cada paso del proceso?

b) ¿Cuál es la variación porcentual que sufren los artículos respecto al precio inicial?

a) $1\,000 \text{ €} \xrightarrow{+30\,\%} 1\,300 \text{ €} \xrightarrow{-30\,\%} 910 \text{ €}$

b) Índice de variación total: $1{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}91$.

$0{,}91 - 1 = -0{,}09$

Variación porcentual: baja un 9 %.

11 **Un capital de 42 000 € se deposita en un banco al 5 % anual. ¿En cuánto se habrá convertido en un año? ¿Y en dos? ¿Y en tres años?**

$42\,000 \text{ €} \xrightarrow{1.^{er}\text{ AÑO}} 42\,000 \cdot 1{,}05 = 44\,100 \text{ €}$

$\xrightarrow{2.^{o}\text{ AÑO}} 44\,100 \cdot 1{,}05 = 46\,305 \text{ €}$

$\xrightarrow{3.^{er}\text{ AÑO}} 46\,305 \cdot 1{,}05 = 48\,620{,}25 \text{ €}$

También puede hacerse así:

1 año: $42\,000 \cdot 1{,}05 = 44\,100$ €

2 años: $42\,000 \cdot 1{,}052 = 46\,305$ €

3 años: $42\,000 \cdot 1{,}053 = 48\,620{,}25$ €

3 INTERÉS COMPUESTO

Página 53

1 **¿En cuánto se transforma un capital de 20 000 € colocado al 3,6 % anual durante 5 años?**

Se transforma en $20\,000 \cdot (1{,}036)^5 = 23\,868{,}7$ €.

2 **¿En cuánto se transforman 20 000 € colocados 5 años al 3,6 % anual, con pago de intereses mensual?**

Un 3,6 % anual significa un $3{,}6 : 12 = 0{,}3$ % mensual.

Así: $20\,000 \cdot (1{,}003)^{60} = 23\,937{,}9$ €.

4 PROBLEMAS CLÁSICOS

Página 54

1 **Tres socios pusieron 2, 3 y 6 millones de euros, respectivamente, para crear una empresa. Si las ganancias del primer año ascienden a 75 900 €, ¿cuánto corresponderá a cada uno?**

Entre los tres aportaron $2 + 3 + 6 = 11$ millones de euros.

Por tanto, a cada uno le corresponderá:

Primero $\rightarrow \dfrac{2}{11} \cdot 75\,900 = 13\,800$ €

Segundo $\rightarrow \dfrac{3}{11} \cdot 75\,900 = 20\,700$ €

Tercero $\rightarrow \dfrac{6}{11} \cdot 75\,900 = 41\,400$ €

2 **¿Cómo se podrían repartir 2 310 € entre tres hermanos de forma que a la mayor le corresponda la mitad que al menor, y a este, el triple que a la mediana?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mayor} \rightarrow \dfrac{3x}{2} \\ \text{Mediano} \rightarrow x \\ \text{Menor} \rightarrow 3x \end{array}\right\} \dfrac{3x}{2} + x + 3x = 2\,310 \rightarrow x = 420$$

Por tanto, a cada hermano le corresponde:

Mayor $\rightarrow$ 630 €

Mediano $\rightarrow$ 420 €

Menor $\rightarrow$ 1 260 €

3 **Tres personas poseían 1/3, 2/9 y 1/6, respectivamente, de una urbanización, junto con un cuarto socio que se retira llevándose su parte. ¿Qué parte de lo que queda corresponde a cada uno?**

Los tres propietarios restantes tienen en total $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{6 + 4 + 3}{18} = \dfrac{13}{18}$ partes.

Primero $\rightarrow \dfrac{1}{3} : \dfrac{13}{18} = \dfrac{6}{13}$

Segundo $\rightarrow \dfrac{2}{9} : \dfrac{13}{18} = \dfrac{4}{13}$

Tercero $\rightarrow \dfrac{1}{6} : \dfrac{13}{18} = \dfrac{3}{13}$

4 **Una balsa de 12 150 L se llena con tres grifos cuyos caudales son 14,6 L/s; 8,9 L/s y 4,2 L/s. ¿Cuánto ha aportado cada uno al total de la balsa? Da la solución aproximando hasta las decenas de litro.**

Entre los tres grifos tienen un caudal de 14,6 + 8,9 + 4,2 = 27,7 L/s.

Por tanto, cada grifo aporta:

Primero $\rightarrow \dfrac{14,6}{27,7} \cdot 12\,150 = 6\,403,97$ L

Segundo $\rightarrow \dfrac{8,9}{27,7} \cdot 12\,150 = 3\,903,79$ L

Tercero $\rightarrow \dfrac{4,2}{27,7} \cdot 12\,150 = 1\,842,24$ L

Página 55

5 **Si mezclamos 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de café de 7,40 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?**

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ 1	12 kg	12,40 €/kg	12 · 12,40 = 148,80 €
CAFÉ 2	8 kg	7,40 €/kg	8 · 7,40 = 59,20 €
MEZCLA	20 kg		148,80 + 59,20 = 208 €

Precio de la mezcla $\to \dfrac{208\text{ €}}{20\text{ kg}} = 10{,}4$ €/kg

6 **Si mezclamos un lingote de 3 500 g con un 80 % de oro con otro lingote de 1 500 g con un 95 % de oro, ¿qué proporción de oro habrá en el lingote resultante? ¿Y si añadimos 2 kg de oro puro?**

	PESO TOTAL	% ORO	PESO DE ORO
1ER LINGOTE	3 500 g	80	$3\,500 \cdot \dfrac{80}{100} = 2\,800$ g
2º LINGOTE	1 500 g	95	$1\,500 \cdot \dfrac{95}{100} = 1\,425$ g
TOTAL	5 000 g		2 800 + 1 425 = 4 225 g

Proporción de oro $\to \dfrac{4\,225\text{ g oro}}{5\,000\text{ g totales}} \cdot 100 = 84{,}5\,\%$

Y si añadimos 2 kg de oro puro:

	PESO TOTAL	% ORO	PESO DE ORO
1ER LINGOTE	3 500 g	80	2 800 g
2º LINGOTE	1 500 g	95	1 425 g
3ER LINGOTE	2 000 g	100	2 000 g
TOTAL	7 000 g		6 225 g

Proporción de oro $\to \dfrac{6\,225\text{ g oro}}{7\,000\text{ g totales}} \cdot 100 = 88{,}9\,\%$

7 **Un litro de agua pesa 999,2 g, y un litro de alcohol, 794,7 g. ¿Cuál es el peso de un litro de la disolución obtenida al mezclar 3 L de agua con 7 L de alcohol?**

	LITROS	PESO POR LITRO	PESO TOTAL
AGUA	3	999,2 g/L	2 997,6 g
ALCOHOL	7	794,7 g/L	5 562,9 g
MEZCLA	10		8 560,5 g

Gramos por litro de la mezcla $\to \dfrac{8\,560{,}5\text{ g}}{10\text{ L}} = 856{,}05$ g/L

8 **Una joyera quiere fundir un lingote de 2 kg de oro de ley 0,85 con otro lingote de 1,5 kg de oro cuya ley es 0,9. ¿Cuál es la ley del lingote resultante?**

	PESO TOTAL	LEY	PESO DE ORO
1ER LINGOTE	2 000 g	0,85	1 700 g
2º LINGOTE	1 500 g	0,9	1 350 g
TOTAL	3 500 g		3 050 g

Lingote resultante $\rightarrow$ Ley $= \dfrac{3\,050 \text{ g}}{3\,500 \text{ g}} \approx 0{,}87$

Página 56

9 **Un coche va a 120 km/h y un camión a 90 km/h.**

a) Si el coche sigue al camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo?

b) Si están a 504 km y se dirigen el uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

a) El coche se aproxima al camión a una velocidad de 120 – 90 = 30 km/h.

Tardará en alcanzarlo:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{75}{30} = 2{,}5 \text{ horas.}$$

b) Se aproximan a una velocidad de 120 + 90 = 210 km/h.

Tardarán en cruzarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{504}{210} = 2{,}4 \text{ h}$$

10 **La capacidad de un pantano es 981,1 hm^3. La capacidad de un pantano es 980 hm^3. Actualmente se encuentra al 43 % del total, está recibiendo una aportación de 45 m^3/s y se desembalsan 3 200 L/s.**

De mantenerse estos caudales, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse hasta un 95 % de su capacidad?

45 m^3/s = 45 000 dm^3/s = 45 000 L/s

980 hm^3 = $9{,}80 \cdot 10^{11}$ dm^3 = $9{,}80 \cdot 10^{11}$ L

La velocidad de llenado es 45 000 – 3 200 = 41 800 L/s

43 % de $9{,}80 \cdot 10^{11}$ L = $4{,}214 \cdot 10^{11}$ L

95 % de $9{,}80 \cdot 10^{11}$ L = $9{,}31 \cdot 10^{11}$ L

Se quieren llenar $9{,}31 \cdot 10^{11} - 4{,}214 \cdot 10^{11} = 5{,}096 \cdot 10^{11}$ L

Tardará en llenarse al 95 %:

$$t = \frac{vol}{v} = \frac{5{,}096 \cdot 10^{11}}{41800} = 12\,191\,387{,}56 \text{ s}$$

12 191 387,56 segundos = 3 386 h, 29 min y 47,56 segundos.

5 PROPORCIONALIDAD COMPUESTA EN PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Página 58

1 **En el *Ejemplo 1*, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 30 camiones para mover 5 000 m^3 de arena?**

$$\frac{30 \text{ camiones}}{20 \text{ camiones}} \quad \boxed{\frac{x \text{ horas}}{8 \text{ horas}}} \quad \frac{5\,000 \text{ m}^3}{4\,000 \text{ m}^3}$$

$$x = 8 \cdot \frac{30 \cdot 5\,000}{20 \cdot 4\,000} = 8 \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = 3 \cdot 5 = 15 \text{ horas}$$

2 **En el *Ejemplo 2*, ¿cuántos kilos de pienso se necesitan para alimentar a 50 cerdos durante 80 días?**

$$\frac{23 \text{ cerdos}}{50 \text{ cerdos}} \quad \frac{50 \text{ días}}{80 \text{ días}} \quad \boxed{\frac{2\,990 \text{ kg}}{x \text{ kg}}} \quad \text{Proporcionalidad directa}$$

$$x = 2\,990 \cdot \frac{50 \cdot 80}{23 \cdot 50} = 10\,400 \text{ kg}$$

3 **En el *Ejemplo 3*, ¿cuántas personas con turnos de 10 h/día se necesitan para recoger las olivas en 20 días?**

$$\boxed{\frac{10 \text{ operarios}}{x \text{ operarios}}} \quad \frac{8 \text{ h/día}}{10 \text{ h/día}} \quad \frac{40 \text{ días}}{20 \text{ días}}$$

$$x = 10 \cdot \frac{8 \cdot 40}{10 \cdot 20} = 8 \cdot 2 = 16 \text{ operarios}$$

4 **En el *Ejemplo 4*, ¿cuántas calorías se necesitarán para calentar 1/2 L de aceite desde 15 °C hasta 75 °C?**

$$\frac{100 \text{ g}}{490 \text{ g}} \quad \frac{50 \text{ °C}}{60 \text{ °C}} \quad \boxed{\frac{2\,350 \text{ cal}}{x \text{ cal}}}$$

$$x = 2\,350 \cdot \frac{490 \cdot 60}{100 \cdot 50} = 2\,350 \cdot 5{,}88 = 13\,818 \text{ cal}$$

5 **Para calentar una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal.**

¿Cuántas calorías se necesitarán para subir una pieza de hierro de 3 480 g de 0 °C a 210 °C?

Son dos proporcionalidades directas, a más temperatura se necesitan más calorías y a mayor cantidad de hierro, mayor cantidad de calorías necesarias.

PESO DE LA PIEZA	VARIACIÓN DE TEMPERATURA	CALORÍAS
1 240 g	140 °C	18 228
1 g	140 °C	14,7
1 g	1 °C	0,105
3 480 g	210 °C	$0,105 \cdot 210 \cdot 3480 = 76734$

Se necesitarán 76 734 calorías.

6 **Para calentar una pieza de hierro de 1 240 g de 10 °C a 150 °C se han necesitado 18 228 cal.**

¿A qué temperatura se pondrá una pieza de hierro de 5 kg que está a 20 °C, si se le suministran 20 000 cal?

Es una doble proporcionalidad directa, a más cantidad de hierro se han de suministrar más calorías para que aumente 1 °C y, dando una cantidad de calorías aumentará una cantidad directamente proporcional de grados.

PESO DE LA PIEZA	VARIACIÓN DE TEMPERATURA	CALORÍAS
1 240 g	140 °C	18 228
1 g	140 °C	14,7
1 g	1 °C	0,105
5 kg = 5 000 g	$\frac{20000}{0,105 \cdot 5000} \approx 38,1$ °C	20 000

Se pondrá a una temperatura de 38,1 °C.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 59

2. Índice de variación

Hazlo tú

- **Halla el índice de variación de una cantidad que disminuye un 40 % y aumenta un 120 %. ¿Es un aumento o una disminución?**

  Disminuye un 40 % → $1 - 0{,}4 = 0{,}6$

  Aumenta un 120 % → $1 + 1{,}2 = 2{,}2$

  $0{,}6 \cdot 2{,}2 \cdot C_I = 1{,}32 \cdot C_I$

  Luego es un aumento del 32 %.

3. Repartos inversamente proporcionales

Hazlo tú

- **Reparte 10 000 € de forma inversamente proporcional a 8, 10 y 12.**

  $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{37}{120}$

  $\frac{1}{8} : \frac{37}{120} = \frac{15}{37}$ del total

  $\frac{1}{10} : \frac{37}{120} = \frac{12}{37}$ del total

  $\frac{1}{12} : \frac{37}{120} = \frac{10}{37}$ del total

  $\frac{15}{37} \cdot 10\,000 = 4\,054{,}05$ €

  $\frac{12}{37} \cdot 10\,000 = 3\,243{,}24$ €

  $\frac{10}{37} \cdot 10\,000 = 2\,702{,}7$ €

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 60

Practica

Aproximaciones y errores

1 **Escribe con dos cifras significativas estas cantidades y valora el error cometido en cada aproximación:**

a) Números de votos emitidos en una comunidad autónoma: 4 392 891.

b) Número de votos obtenidos por un partido político: 193 246.

c) Sueldo anual de una persona: 42 121 €.

d) Precio de un equipo de música: 3 246 €.

e) Tamaño de un microprocesador: 43,257 nanómetros.

f) Superficie de una tarjeta SIM: 4 620,68 mm^2.

a) 4 400 000 votos   b) 190 000 votos   c) 42 000 €

d) 32 €   e) 43 nanómetros   f) 4 600 mm^2

2 **Compara el error absoluto en las siguientes aproximaciones:**

a) Altura de un árbol: 3,58 m.

b) Distancia de mi casa al gimnasio: 1,5 km.

c) Longitud de una etapa ciclista: 98 km.

d) Precio de un piso: 240 000 €.

e) Presupuesto de una casa real: 790 000 €.

f) Audiencia de un programa de televisión: 2 400 000 personas.

¿En cuál de estas aproximaciones se comete menos error relativo?

a) El error absoluto será menor de 0,005 m.

b) El error absoluto será menor de 0,05 km.

c) El error absoluto será menor de 0,5 km.

d) El error absoluto será menor de 5 000 €.

e) El error absoluto será menor de 5 000 €.

f) El error absoluto será menor de 50 000 personas.

El menor error relativo se da con la medición de la altura de un árbol: 3,58 m ya que se usan tres cifras significativas.

Porcentajes

3 **Calcula mentalmente.**

a) 20 % de 340   **b) 2,5 % de 400**   **c) 75 % de 4 000**

d) 150 % de 200   **e) 60 % de 250**   **f) 12 % de 12**

a) 68   b) 10   c) 3 000

d) 300   e) 150   f) 1,44

4 **¿Qué porcentaje representa?**

a) 78 de 300 **b) 420 de 500**

c) 25 de 5 000 **d) 340 de 200**

a) 26 % b) 84 %

c) 0,5 % d) 170 %

5 **Halla, en cada caso, la cantidad inicial x, como en el ejemplo:**

- **120 % de x = 450 → 1,2x = 450 → x = 450 : 1,2 = 375**

a) 28 % de x = 98 **b) 15 % de x = 28,5**

c) 2 % de x = 325 **d) 150 % de x = 57**

a) $0{,}28x = 98 \rightarrow x = 98 : 0{,}28 = 350$

b) $0{,}15x = 28{,}5 \rightarrow x = 28{,}5 : 0{,}15 = 190$

c) $0{,}02x = 325 \rightarrow x = 325 : 0{,}02 = 16\,250$

d) $1{,}5x = 57 \rightarrow x = 57 : 1{,}5 = 38$

6 **Calcula el valor de x, como se hace en el ejemplo.**

- **x% de 320 = 48 → 48 : 320 = 0,15 → x = 15 %**

a) x% de 300 = 60 **b) x% de 60 = 59,4**

c) x% de 1 600 = 720 **d) x% de 98 = 107,8**

a) $60 : 300 = 0{,}2 \rightarrow x = 20\,\%$

b) $59{,}4 : 60 = 0{,}99 \rightarrow x = 99\,\%$

c) $720 : 1\,600 = 0{,}45 \rightarrow x = 45\,\%$

d) $107{,}8 : 98 = 1{,}1 \rightarrow x = 110\,\%$

7 **¿Por qué número hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la final en cada caso?**

a) Aumenta un 12 %. **b) Disminuye el 37 %.**

c) Aumenta un 150 %. **d) Disminuye un 2 %.**

e) Aumenta un 10 % y, después, el 30 %.

f) Disminuye un 25 % y aumenta un 42 %.

a) $1 + 0{,}12 = 1{,}12$ b) $1 - 0{,}37 = 0{,}63$

c) $1 + 1{,}5 = 2{,}5$ d) $1 - 0{,}02 = 0{,}98$

e) $(1 + 0{,}1)(1 + 0{,}3) = 1{,}43$ f) $(1 - 0{,}25)(1 + 0{,}42) = 1{,}065$

8 **Calcula el índice de variación y la cantidad final:**

a) 325 aumenta el 28 %.
b) 87 disminuye el 80 %.
c) 425 aumenta el 120 %.
d) 125 disminuye el 2 %.
e) 45 aumenta el 40 % y el 30 %.
f) 350 disminuye el 20 % y el 12 %.

a) $I_V = 1{,}28$ $C_F = 416$

b) $I_V = 0{,}2$ $C_F = 17{,}4$

c) $I_V = 2{,}2$ $C_F = 935$

d) $I_V = 0{,}98$ $C_F = 122{,}5$

e) $I_V = 1{,}4 \cdot 1{,}3 = 1{,}82$ $C_F = 81{,}9$

f) $I_V = 0{,}8 \cdot 0{,}88 = 0{,}704$ $C_F = 246{,}4$

9 **¿Qué porcentaje de aumento o de disminución corresponde a estos índices de variación?**

a) 1,54 **b) 0,18** **c) 0,05**
d) 2,2 **e) 1,09** **f) 3,5**

a) Aumento 54 %. b) Disminución 82 %. c) Disminución 95 %.
d) Aumento 120 %. e) Aumento 9 %. f) Aumento 250 %.

10 **¿Qué porcentaje es?**

a) El 40 % del 40 %.
b) El 25 % del 20 %.
c) El 30 % del 120 %.
d) El 150 % del 20 %.

a) $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16 \rightarrow 16\,\%$

b) $0{,}25 \cdot 0{,}20 = 0{,}05 \rightarrow 5\,\%$

c) $0{,}30 \cdot 1{,}2 = 0{,}36 \rightarrow 36\,\%$

d) $1{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}3 \rightarrow 30\,\%$

11 **Calcula, en cada caso, la cantidad que falta:**

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	**↑18 %**	
4 500	**↓48 %**	
75	**↑110 %**	
5 600		**4 592**
326		**603,1**
	↑32 %	**165**
	↓0,8 %	**4 140**

CANTIDAD INICIAL	VARIACIÓN PORCENTUAL	CANTIDAD FINAL
850	**↑18 %**	1 003
4 500	**↓48 %**	2 340
75	**↑110 %**	157,5
5 600	↓18 %	**4 592**
326	↑ 85 %	**603,1**
125	**↑32 %**	**165**
4 173,4	**↓0,8 %**	**4 140**

12 **Relaciona fracciones, decimales (índices de variación) y porcentajes.**

FRACCIÓN	**13/20**				
DECIMAL		**0,38**		**1,15**	
PORCENTAJE			$24,\widehat{8}$		$13,\widehat{6}$

FRACCIÓN	**13/20**	38/100	31/125	115/100	41/300(*)
DECIMAL	0,65	**0,38**	0,248	**1,15**	$0,1\widehat{36}$
PORCENTAJE	65	38	$24,\widehat{8}$	115	$13,\widehat{6}$

(*) $13,\widehat{6} = \dfrac{123}{9} \rightarrow \dfrac{123}{9} : 100 = \dfrac{123}{900} = \dfrac{41}{300}$

Resuelve problemas básicos

Porcentajes

13 **El año pasado, un litro de aceite costaba 3,95 €, y este año, 4,90 €. ¿Qué tanto por ciento ha subido?**

$$3{,}95 \cdot I_V = 4{,}90 \ \rightarrow\ I_V = \frac{4{,}90}{3{,}95} = 1{,}24$$

Ha habido un aumento de precio, luego buscamos la variación porcentual tal que $1 + V_p = 1{,}24 \ \rightarrow\ V_p = 0{,}24\,\%$ ha subido.

14 **En una clase, han aprobado todas las asignaturas 24 estudiantes, que son el 75 % del total.**

a) ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

b) A final de curso, aprobaron todo el 87,5 %. ¿Cuántos estudiantes suspendieron alguna?

24 estudiantes son el $\frac{75}{100}$ del total $\frac{3}{4}$ equivalen a 24 estudiantes, luego $\frac{1}{4}$ equivaldrá a $\frac{24}{3} = 8$ estudiantes.

a) Hay 24 + 8 = 32 estudiantes en clase.

b) Suspendieron 100 – 87,5 = 12,5 %.

Calculamos el 12,5 % de 32 $\rightarrow\ \frac{12{,}5 \cdot 32}{100} = 4$

Conclusión: 4 estudiantes suspendieron alguna.

15 **En un partido de balonmano, una jugadora A ha marcado 2/5 de 30 intentos; otra, B, 6 de 16, y una tercera, C, el 36 % de 25 intentos. ¿Cuántos goles ha marcado cada una? ¿Qué porcentaje de goles con respecto al total ha anotado cada una?**

Calculamos $\frac{2}{5}$ de 30 $\rightarrow\ \frac{2}{5} \cdot 30 = 12$ goles A.

6 goles B.

Calculamos el 36 % de 25 $\rightarrow\ \frac{36 \cdot 25}{100} = 9$ goles C.

El total de goles es 12 + 6 + 9 = 27.

$\frac{12}{17} \cdot 100 = 44,\widehat{4}\ \%$ es el porcentaje de goles de A.

$\frac{6}{27} \cdot 100 = 22,\widehat{2}\ \%$ es el porcentaje de goles de B.

$\frac{9}{27} \cdot 100 = 33,\widehat{3}\ \%$ es el porcentaje de goles de C.

16 **Un edificio, presupuestado inicialmente en un millón y medio de euros, costó finalmente dos millones cien mil euros. ¿En qué tanto por ciento el coste real superó al presupuestado?**

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cantidad inicial} \rightarrow 1{,}5 \text{ millones}\\ \text{Índice de variación} \rightarrow x\\ \text{Cantidad final} \rightarrow 2{,}1 \text{ millones}\end{array}\right\} 1\,500\,000 \cdot x = 2\,100\,000 \rightarrow x = 1{,}4$$

El coste real superó en un 140 % – 100 % = 40 % el coste real.

17 **El precio de un videojuego subió un 28 % y después lo rebajaron un 30 %. Si el precio inicial era 58 €, calcula el índice de variación y el precio final.**

$$58 \cdot \xrightarrow[\cdot\, 1{,}28]{+28\,\%} 58 \cdot 1{,}28 = 74{,}24 \cdot \xrightarrow[\cdot\, 0{,}70]{+30\,\%} 74{,}24 \cdot 0{,}70 = 51{,}968 \text{ €}$$

Para calcular el I_V hacemos 1,28 · 0,70 = 0,896 como es menor que 1 ha habido una disminición.

Repartos proporcionales

18 **Entre Ana, Berta y Carla han cobrado 900 € por repartir publicidad. Si Ana repartió 150 folletos; Berta, 250, y Carla, 200, ¿cuánto le toca a cada una?**

En total han repartido 150 + 250 + 200 = 600 folletos. Luego a cada una le corresponde:

$$\text{Ana} \rightarrow \frac{150}{600} \cdot 900 = 225 \text{ €}$$

$$\text{Berta} \rightarrow \frac{250}{600} \cdot 900 = 375 \text{ €}$$

$$\text{Carla} \rightarrow \frac{200}{600} \cdot 900 = 300 \text{ €}$$

19 **Tres empresas ponen 15 000 €, 12 000 € y 18 000 €, respectivamente, para montar un negocio. Si este año su negocio ha obtenido un beneficio de 18 000 €, ¿cuánto le corresponde a cada una?**

El capital total inicial de la empresa fue:

15 000 + 12 000 + 18 000 = 45 000 €

$$\text{Socio 1} \rightarrow \frac{15\,000}{45\,000} \cdot 18\,000 = 6\,000 \text{ €}$$

$$\text{Socio 2} \rightarrow \frac{12\,000}{45\,000} \cdot 18\,000 = 4\,800 \text{ €}$$

$$\text{Socio 3} \rightarrow \frac{18\,000}{45\,000} \cdot 18\,000 = 7\,200 \text{ €}$$

20 **Para llenar una piscina de 42 000 L, se utilizan tres mangueras cuyos caudales son 240 L/min, 360 L/min y 480 L/min. ¿Qué cantidad de agua aportó cada grifo?**

El caudal total de las tres mangueras es:

240 + 360 + 480 = 1 080 L/min

Manguera 1 $\rightarrow \dfrac{240}{1\,080} \cdot 42\,000 = 9\,333,\widehat{3}$ L/min

Manguera 2 $\rightarrow \dfrac{360}{1\,080} \cdot 42\,000 = 14\,000$ L/min

Manguera 3 $\rightarrow \dfrac{480}{1\,080} \cdot 42\,000 = 18\,666,\widehat{6}$ L/min

Mezclas

21 **En una bodega se mezclan 7 hL de vino de alta calidad que cuesta a 450 € el hectólitro, con 11 hL de vino de calidad inferior a 280 €/hL. ¿A cómo sale el litro del vino resultante? (Aproxima hasta las décimas y di el orden del error cometido).**

	LITROS	€/HL	PRECIO TOTAL
VINO ALTA CALIDAD	7	450	3 150 €
VINO BAJA CALIDAD	11	280	3 080 €
MEZCLA	18	$\dfrac{6\,230}{18} = 346{,}1$	6 230 €

22 **Se mezclan 8 litros de aceite con otro más barato de 2,80 €/L para obtener 20 litros a 4 € el litro. ¿Cuál es el precio del aceite más caro?**

Mezclamos 8 litros de un aceite que cuesta x €/L con 12 litros de otro aceite que cuesta 2,80 €/L. Obtenemos 20 litros a 4 € el litro.

$8x + 12 \cdot 2{,}80 = 20 \cdot 4 \rightarrow 8x = 80 - 33{,}6 \rightarrow x = \dfrac{46{,}4}{8} = 5{,}8$ euros el litro.

23 **Hemos mezclado 30 kg de café de 9 €/kg con 50 kg de otro café de calidad inferior. La mezcla resultante se vende a 7,50 €/kg. ¿Cuál es el precio por kilogramo del café de calidad inferior?**

	CANTIDAD	PRECIO (€/KG)
CAFÉ SUPERIOR	30	9
CAFÉ INFERIOR	50	$\dfrac{80 \cdot 7{,}50 - 30 \cdot 9}{50} = 6{,}60$
MEZCLA	80	7,50

Móviles

24 **Un autobús sale de A a 105 km/h. Media hora después sale de B un coche a 120 km/h. La distancia entre A y B es de 300 km. Calcula la distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan.**

Antes de salir el coche, el autobús recorre una distancia de $105 \cdot 0{,}5 = 52{,}5$ km.

Por tanto, para que se encuentren hay una distancia de $300 - 52{,}5 = 247{,}5$ km.

La velocidad con la que se aproximan es de $105 + 120 = 225$ km/h.

El tiempo que tardan en cruzarse es $t = \frac{d}{v} = \frac{247{,}5}{225} = 1{,}1$ h = 1 h 6 min.

La distancia que recorre cada uno hasta que se cruzan:

Autobús $\to$ $52{,}5 + 105 \cdot 1{,}1 = 168$ km

Coche $\to$ $120 \cdot 1{,}1 = 132$ km

25 **Un camión sale de cierta población a una velocidad de 90 km/h. Cinco minutos más tarde sale en su persecución una moto a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda la moto en alcanzar al camión?**

5 min = $\frac{1}{12}$ h

El camión recorre $90 \cdot \frac{1}{12} = 7{,}5$ km antes de que salga la moto.

Se aproximan a una velocidad de $120 - 90 = 30$ km/h.

Por tanto, la moto tardará en alcanzar al camión $t = \frac{d}{v} = \frac{7{,}5}{30} = 0{,}25$ h = 15 min

26 **Antón y Berta conducen por una autovía en sentidos opuestos. A las 11:00 h, Antón pasa por la salida 17 y va hacia el norte a una velocidad de 90 km/h. A la misma hora, Berta pasa por la salida 29 y va hacia el sur a 120 km/h. Si entre las dos salidas hay 42 km de distancia, ¿a qué hora se cruzarán?**

La velocidad total de los dos es: $90 + 120 = 210$ km/h.

Calculamos el tiempo que tardan en cruzarse $t = \frac{d}{v} = \frac{42}{210} = 0{,}2$ h = 12 min.

Se cruzarán a las 11 h y 12 min.

27 **Tres grifos, cuyos caudales son 300 L/min, 120 L/min y 180 L/min, vierten en un depósito de 2 100 litros. El depósito tiene un desagüe que vacía 4 L/s. Calcula el tiempo que tardará en llenarse el depósito si abrimos los tres grifos y el desagüe.**

El desagüe vacía 4 L al segundo luego, en 1 minuto vacía $4 \cdot 60 = 240$ L.

Entonces en 1 minuto se llena $300 + 120 + 180 - 240 = 360$ L.

Los 2 100 L se llenaran en:

$\frac{2\,100}{360} = 5{,}8\widehat{3}$ min $\to$ 5 min y 50 seg.

Proporcionalidad compuesta

28 Hemos empleado 5 días y 2 horas en hacer una ruta en bicicleta de 384 km, pedaleando 6 h al día.

a) ¿Cuánto recorrimos cada día?

b) Si pedaleamos 5 h al día, ¿cuántos días necesitaremos para hacer 600 km?

a) Recorrimos 72 km cada día, menos el último, que recorrimos 24 km (pedaleando a 12 km/h).

b) $\left.\begin{array}{l} 1\text{ h} \rightarrow 12\text{ km} \\ x\text{ h} \rightarrow 600\text{ km} \end{array}\right\} x = \dfrac{600}{12} = 50\text{ h}$

Necesitamos 50 h para hacer 600 km. Si cada día hacemos 5 h, necesitaremos 10 días.

29 Si 4 mineros perforan 15 m en 9 días, ¿cuántos metros perforarán 6 mineros en 15 días?

4 mineros que trabajan 9 días, abren una galería de 15 metros.

1 minero, trabajando 1 día, abre $\dfrac{15}{4 \cdot 9} = 0{,}41\overset{\frown}{6}$ metros.

Por tanto, 6 mineros, trabajando 15 días, abrirán una galería de $6 \cdot 15 \cdot 0{,}41\overset{\frown}{6} = 37{,}5$ metros.

30 En una cadena de montaje, 17 personas, trabajando 8 horas al día, ensamblan 850 aparatos de radio a la semana. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar la próxima semana, para atender un pedido de 1 000 aparatos, teniendo en cuenta que se añadirá un refuerzo de tres personas?

N.º PERSONAS	HORAS DIARIAS TRABAJADAS	N.º APARATOS ENSAMBLADOS
17	8	850
1	8	50
1	1	6,25
20	$\dfrac{1000}{6{,}25 \cdot 20} = 8$	1 000

31 En un comedor de empresa, con 113 comensales, se han consumido 840 yogures en 20 días laborables. ¿Será suficiente una reserva de 200 yogures para los próximos cinco días en los que se prevé una afluencia media de 120 comensales/día?

N.º COMENSALES	N.º YOGURES	N.º DÍAS LABORABLES
113	840	20
1	$\dfrac{840}{113 \cdot 20} = 0{,}37$	1
120	$0{,}37 \cdot 120 \cdot 5 = 222$	5

Para los próximos cinco días, con una afluencia de 120 comensales, se necesitarán 222 yogures, por tanto, la reserva de 200 yogures no será suficiente.

Resuelve problemas

32 **El precio de un billete de avión bajó un 24%, pero en marzo subió un 28% y pagué 327 €. ¿Cuál era el precio inicial? ¿Qué porcentaje de descuento o de aumento me hicieron?**

Sea x el precio inicial del billete.

$$x \xrightarrow[\cdot\, 0{,}76]{-24\,\%} \boxed{x = 0{,}76} \xrightarrow[\cdot\, 1{,}28]{+28\,\%} \boxed{x \cdot 0{,}76 \cdot 1{,}28}$$

La cantidad final es 327 € $\rightarrow$ $x \cdot 0{,}76 \cdot 1{,}28 = 327$ $\rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{327}{0{,}76 \cdot 1{,}28} \rightarrow x = \frac{327}{0{,}9728} \rightarrow 336{,}14\ €$$

Índice de variación total = Índice 1.ª variación · Índice 2.ª variación

$0{,}76 \cdot 1{,}28 = 0{,}9728 = 1 - 0{,}0272$. Corresponde a un descuento del 2,7%.

33 **Al repartir un premio entre tres personas de forma directamente proporcional a 8, 10 y 12, respetivamente, a la tercera le han correspondido 1 344 €. Calcula lo que le corresponde a la primera y a la segunda.**

$8 + 10 + 12 = 30$

Sabemos aque al tercero le han correspondido 1 344 € del total $\rightarrow \dfrac{12}{30} \cdot x = 1\,344 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{30 \cdot 1\,344}{12} = 3\,360\ €$$

Luego el total del premio es 3 360 €.

Al primero le corresponde $\dfrac{8}{30} \cdot 3\,360 = 896$ €.

Al segundo le corresponde $\dfrac{10}{30} \cdot 3\,360 = 1\,120$ €.

34 **Se han vertido 3 litros de agua, a 20 °C, en una olla que contenía 5 litros de agua a 60 °C. ¿A qué temperatura está ahora el agua de la olla? ¿Cuál sería la temperatura si añadimos además 2 litros a 50 °C?**

	LITROS	TEMPERATURA
OLLA 1	3	20 °C
OLLA 2	5	60 °C
MEZCLA (OLLA 3)	8	$\dfrac{3 \cdot 20 + 5 \cdot 60}{8} = 45$ °C

35 **Tres hermanos se reparten una herencia de 2 820 € de forma que por cada cinco euros que reciba el mayor, el mediano recibirá cuatro, y el pequeño, tres. ¿Qué cantidad se lleva cada uno?**

Los hermanos se repartirán 2 820 € en partes de 5 + 4 + 3 = 12 €.

A cada hermano le corresponde:

Mayor $\rightarrow \frac{5}{12} \cdot 2820 = 1175$ €

Mediano $\rightarrow \frac{4}{12} \cdot 2820 = 940$ €

Pequeño $\rightarrow \frac{3}{12} \cdot 2820 = 705$ €

36 **Añadimos 0,5 L de alcohol de 50° a 0,75 L de alcohol de 80°. ¿Qué concentración tendrá la mezcla?**

	LITROS	CONCENTRACIÓN
RECIPIENTE 1	0,5	50°
RECIPIENTE 2	0,75	80°
MEZCLA	1,25	$\frac{0{,}5 \cdot 50 + 0{,}75 \cdot 80}{1{,}25} = 68°$

37 **Se han abonado 15 000 € por la limpieza de un bosque realizada por dos cuadrillas. La primera cuadrilla está formada por 12 personas y han trabajado durante 7 días. La segunda cuadrilla tiene 15 personas y ha trabajado 5 días. ¿Cuánto corresponde a cada cuadrilla? ¿Y a cada persona? (Da la solución aproximando a las unidades y di de qué orden es el error absoluto cometido).**

Se ha trabajado un total de 7 + 5 = 12 días.

A cada cuadrilla le corresponde:

Primera cuadrilla $\rightarrow \frac{7}{12} \cdot 15000 = 8750$ € (con un error absoluto de $0,\widehat{3}$)

Segunda cuadrilla $\rightarrow \frac{5}{12} \cdot 15000 = 6250$ € (con un error absoluto de $0,\widehat{3}$)

A cada hombre de la primera cuadrilla le corresponde $\frac{8750}{12} = 730$ € (con un error absoluto de $0,8\widehat{3}$)

A cada hombre de la segunda cuadrilla le corresponde $\frac{6250}{15} = 417$ € (con un error absoluto de $0,\widehat{3}$)

38 **El coste de fabricación de un ordenador se reparte entre el 60 % en la mano de obra y el 40 % en los materiales. En un año, el coste de la mano de obra aumentó un 8 %, y el de los materiales, un 15 %. Expresa en porcentaje el aumento total del coste.**

El coste de fabricación es
- 60 % → 0,60 mano de obra.
- 40 % → 0,40 materiales.

El coste de la mano de obra aumentó un 8 % → 1,08.

El coste de los materiales aumentó un 15 % → 1,15.

El aumento total del coste fue:

$$0{,}60 \cdot 1{,}08 + 0{,}40 \cdot 1{,}15 = 0{,}648 + 0{,}46 = 1{,}108$$

Luego el porcentaje de aumento es: 10,8 %.

39 **Para hacer una prueba radiológica con contraste, al paciente se le inyectan 1,8 mg de un medicamento. Se sabe que el cuerpo elimina cada hora un 30 % del medicamento que hay en la sangre. Al paciente se le informa que 4 h después de la inyección tendrá menos de 0,5 mg de medicamento en su sangre. ¿Es correcta esa afirmación? Justifícalo.**

La cantidad inicial de medicamento es de 1,8 mg.

Esta cantidad se reduce en una hora un 30 % → $1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

Luego en 4 horas ha disminuido $(0{,}7)^4$ mg.

Calculamos la cantidad de medicamento que queda después de 4 horas:

$1{,}8 \cdot (0{,}7)^4 = 0{,}43218 < 0{,}5$ mg → Es verdadera.

40 **Reparte 1 200 € entre los tres primeros clasificados en una carrera de forma inversamente proporcional al orden de llegada.**

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

Al primero le corresponde → $\frac{1}{11/6} \cdot 1\,200 = \frac{6}{11} \cdot 1\,200 = 654{,}5$ €.

Al segundo le corresponde → $\frac{1/2}{11/6} \cdot 1\,200 = \frac{6}{22} \cdot 1\,200 = 327{,}3$ €.

Al tercero le corresponde → $\frac{1/3}{11/6} \cdot 1\,200 = \frac{6}{33} \cdot 1\,200 = 218{,}2$ €.

41 **Al repartir una cantidad de forma inversamente proporcional a 2, 4 y 8, al segundo le corresponden 4 000 €. Calcula qué cantidad se repartió y lo que les corresponde a los otros dos.**

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

Al primero le corresponde $\rightarrow \frac{1/2}{7/8}\cdot x=\frac{8}{14}\cdot x$

Al segundo le corresponde $\rightarrow \frac{1/4}{7/8}\cdot x=\frac{2}{7}\cdot x=4000 \rightarrow x=14000$ €.

Al tercero le corresponde $\rightarrow \frac{1/8}{7/8}\cdot x=\frac{1}{7}\cdot x$

Luego al primero le corresponden $\frac{8}{14}\cdot 14000=8000$ €.

Al tercero le corresponden $\frac{1}{7}\cdot 14000=2000$ €.

42 **Ana y Eva van en bicicleta a la playa. Ana dice «si aumentamos nuestra velocidad en un 20 %, el tiempo que emplearemos disminuye un 20 %». Eva cree que Ana se equivoca. ¿Quién tiene razón?**

Si aumentan la velocidad en un 20 % $\rightarrow$ La velocidad será $v\cdot 1{,}2$.

Veamos como varía el tiempo con este aumento:

$t=\frac{e}{v} \rightarrow t=\frac{e}{1{,}2\cdot v}=\frac{1}{1{,}2}\cdot\frac{e}{v}=0{,}8\overset{\frown}{3}\cdot\frac{e}{v}$

Luego el tiempo disminuye $1-0{,}8\overset{\frown}{3}=0{,}1\overset{\frown}{6}=16{,}7\,\%$.

43 **El 56 % de mi clase son chicas. Si tres de ellas se cambian por tres chicos de otra clase, entonces el 56 % de la clase serían chicos. ¿Cuántos estudiantes hay en mi clase?**

El 56 % del total son chicas $\rightarrow 0{,}56\cdot x$ chicas.

El 44 % del total son chicos $\rightarrow 0{,}44\cdot x$ chicos.

Al cambiar 3 chicas por 3 chicos el número de chicos es 56 % $\rightarrow 0{,}56\cdot x$ chicos y el de las chicas es 44 % $\rightarrow 0{,}44\cdot x$ chicas.

Luego $0{,}56\cdot x-0{,}44\cdot x=3 \rightarrow 0{,}12\cdot x=3 \rightarrow x=\frac{3}{0{,}12} \rightarrow x=25$ estudiantes

44 Meta 14.2. **En 2006 saltaron las alarmas sobre la disminución de la población de atunes tras décadas de sobrepesca. Se estimó que desde 1950 había descendido un 68 %. ¿En qué porcentaje debería aumentar la población que había en ese momento para volver a los niveles de 1950?**

El descenso de la población de atunes desde 1950 ha sido un 68 % $\rightarrow 1-0{,}68=0{,}32$.

Buscamos el porcentaje que tiene que aumentar $\rightarrow I_V=x$

Luego $0{,}32\cdot x=1 \rightarrow x=\frac{1}{0{,}32}=3{,}125 \rightarrow 312{,}5\,\%$.

46 **El precio de una caja de 40 pastillas para lavavajillas es 4,75 €. Para aumentar las ventas, la fabrica se plantea hacer tres tipos de oferta:**

A - La caja con 50 pastillas al mismo precio.

B - Lleve 3 cajas y pague 2.

C - La segunda unidad al 50 %.

¿Qué descuento nos hacen en cada caso?

El precio de la caja de 40 pastillas es de 4,75 € $\rightarrow$ El precio por pastilla es de 4,75 : 40 = = 0,11875.

En la oferta A la pastilla sale a 4,75 : 50 = 0,095

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \rightarrow 0{,}11875 \\ x\% \rightarrow 0{,}095 \end{array}\right. \rightarrow \frac{0,095}{0,11875} \cdot 100 = 80\,\% \text{ se paga.}$$

Luego el descuento que hacen es del 20 %.

En la oferta B:

Son 120 pastillas a 9,5 € $\rightarrow$ La pastilla sale a 9,5 : 120 = 0,079

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \rightarrow 0{,}11875 \\ x\% \rightarrow 0{,}079 \end{array}\right. \rightarrow \frac{0,079}{0,11875} \cdot 100 = 66{,}53\,\% \text{ se paga.}$$

Luego el descuento que hacen es del 33,47 %.

En la oferta C:

Son 80 pastillas a 7,125 € $\rightarrow$ La pastilla sale a 7,125 : 80 = 0,089

$$\left.\begin{array}{l} 100\,\% \rightarrow 0{,}11875 \\ x\% \rightarrow 0{,}089 \end{array}\right. \rightarrow \frac{0,089}{0,11875} \cdot 100 = 74{,}95\,\% \text{ se paga.}$$

Luego el descuento que hacen es del 25,05 %.

Página 63

47 Si un comercio aumenta el precio de sus productos un 30 % y después los rebaja un 30 %, ¿ha hecho un aumento o un descuento? Calcula el índice de variación y explica su significado.

Aumenta el precio un 30 % $\rightarrow$ $1 + 0{,}3 = 1{,}3$

Rebaja un 30 % $\rightarrow$ $1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Luego el índice de variación total es:

$$1{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}91$$

$0{,}91$ $\rightarrow$ Descuento del 91 %.

48 Por el *Black Friday,* un comercio ofrece un 20 % de descuento en todos sus productos y además la segunda unidad al 60 %. ¿Qué porcentaje de rebaja hacen?

El 20 % de descuento $\rightarrow$ $1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Segunda unidad al 60 % $\rightarrow$ $1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$$\underbrace{0{,}8}_{\text{1.ª unidad}} + \overbrace{0{,}4}^{\text{2.ª unidad}} = 1{,}2$$

Luego al comprar 2 unidades obtenemos un descuento de:

$$\frac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \rightarrow 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \rightarrow \text{Descuento del } 40\,\%.$$

49 ¿En cuánto se convertirá un capital de 80 000 €, colocado al 3,6 % anual, durante dos años y medio con periodo de capitalización mensual?

En dos años y medio hay 30 meses.

Un 3,6 % anual significa un $3{,}6/12 = 0{,}3$ % mensual.

$C_F = 80\,000 \cdot 1{,}003^{30} = 87\,522{,}15$ €

50 Calcula en cuánto se transformarán 60 000 € colocados a interés compuesto en los siguientes casos si el periodo de capitalización es mensual:

a) Al 3 % anual durante 2 años.

b) Al 5,4 % anual durante 9 meses.

c) Al 0,36 % mensual durante un año y medio.

d) Al 4,8 % anual durante 18 meses.

a) $C_F = 6\,000 \cdot 1{,}03^2 = 63\,654$ €

b) $5{,}4/12 = 0{,}45$ % mensual

$C_F = 6\,000 \cdot 1{,}0045^9 = 62\,474{,}20$ €

c) $C_F = 6\,000 \cdot 1{,}0036^{18} = 64\,009{,}29$ €

d) $4{,}8/12 = 0{,}4$ % mensual

$C_F = 6\,000 \cdot 1{,}004^{18} = 64\,470{,}66$ €

51 **Se depositan en un banco 28 000 € al 6 % anual y el banco nos descuenta un 20 % de los beneficios como retención fiscal.**

a) ¿Cuál será el porcentaje neto de rendimiento?

b) Si los intereses se acumulan trimestralmente al capital, ¿cuál será el beneficio al cabo de 2 años?

a) También podrían habernos preguntado «¿Cuál es el 80 % del 6 %?».

Es decir, 0,8 · 0,06 = 0,048.

El rendimiento neto es del 4,8 %.

b) $28\,000 \left(1 + \dfrac{4,8}{400}\right)^8 = 30\,803,6$

Por tanto, el beneficio obtenido es 30 803,6 – 28 000 = 2 803,6 €

52 **Un comerciante pone el precio de venta de sus artículos aumentando un 30 % el precio de coste. Durante el periodo de rebajas aplica un descuento del 15 %, pero a sus familiares quiere cobrárselos a precio de coste, por lo que aplica un descuento del 20 % sobre el precio de venta. ¿Consigue, de esta forma, vendérselos sin ganar ni perder?**

Precio inicial aumentado un 30 % → 1 + 0,30 = 1,3

En rebajas aplica un descuento de 15 % → 1 – 0,15 = 0,85

A sus familiares les aplica un descuento del 20 % → 1 – 0,20 = 0,80

- Si aplica un 15 % y un 20 % de descuento a sus familiares entonces → 1,3 · 0,85 · 0,80 = = 0,884 → 1 – 0,884 = 0,116 → Aplica un aumento del 11,6 % luego pierde.
- Si aplica solo el 20 % → 1,3 · 0,80 = 1,04 → 1 + 0,4 → Aplica un aumento del 4 % luego gana.

Resuelve: un poco más difícil

53 **Deposito en un banco 150 000 € a plazo fijo de dos años. Cuando lo retiro, son 162 240 €. ¿Qué tanto por ciento anual me dio el banco?**

Cantidad inicial 150 000 €
Cantidad final 162 240 €

$\dfrac{162\,240}{150\,000} = 1,0816$

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \rightarrow \frac{C_F}{C_I} = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \rightarrow 1,0816 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{1,0816} = 1 + \frac{r}{100} \rightarrow 1,04 - 1 = \frac{r}{100} \rightarrow 0,04 \cdot 100 = r = 4$$

El banco me da un 4 % anual.

54 **Si deposito en un banco 6 000 € al 4,2 % anual, ¿cuántos años tardará en duplicarse?**

Utiliza el factor constante de la calculadora para resolverlo por tanteo.

Cantidad inicial 6 000 €

$r = 4{,}2$

$C_F = 2 \cdot C_I = 12\,000$

$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \rightarrow 12\,000 = 6\,000 \cdot \left(1 + \frac{4{,}2}{100}\right)^n \rightarrow 2 = (1{,}042)^n \rightarrow \log_{1{,}042} 2 = n \rightarrow$

$\rightarrow n = 16{,}85$

Luego en 17 años el capital inicial se ha duplicado.

55 **a) Si el área de un cuadrado ha disminuido un 25 %, ¿en qué porcentaje ha disminuido su lado?**

b) El volumen de un cubo aumenta un 20 %. ¿En qué porcentaje aumentará su arista?

a) Ha disminuido un 25 % $\rightarrow 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

El área del cuadrado es l^2.

Luego el área nuevo es $0{,}75 \cdot l^2 = (xl)^2 \rightarrow$

$\downarrow$

Disminución del lado.

$\rightarrow x^2 = 0{,}75 \rightarrow x = 0{,}87 \rightarrow 1 - 0{,}87 = 0{,}13$

Luego el lado disminuye un 13 %.

b) Ha aumentado un 20 % $\rightarrow 1 + 0{,}20 = 1{,}20$

El volumen del cubo es a^3.

Luego el volumen nuevo es $1{,}20a^3 = (xa)^3 \rightarrow$

$\downarrow$

Aumento de la arista.

$\rightarrow x^3 = 1{,}20 \rightarrow x = \sqrt[3]{1{,}20} = 1{,}063 \rightarrow 1 + 0{,}063$

Luego la arista aumenta un 6,3 %.

56 **Miguel quiere aplicar un herbicida a su finca. Sabe que debe añadir agua al producto, de forma que tenga una concentración del 5 % como mínimo para que sea eficaz. Mezcla 1/2 litro de herbicida con 5 litros de agua y comienza a aplicarlo.**

Cuando ha gastado 3 litros de la mezcla, se da cuenta de que no va a tener bastante para toda la finca y le añade 2 litros de agua. ¿Tendrá la concentración adecuada en todo momento?

Al principio, la concentración es $\frac{0{,}5}{5{,}5} = 0{,}\overset{\frown}{09} \rightarrow 9\,\%$.

Cuando quedan 2,5 l de mezcla, le añade 2 l de agua más. Ahora hay 4,5 l de mezcla para $2{,}5 \cdot 0{,}09 = 0{,}227$ l de herbicida.

Por tanto, la nueva concentración es $\frac{0{,}227}{45} = 0{,}05 \rightarrow 5\,\%$.

Sí, en todo momento la concentración es mayor o igual que el 5 % requerido.

Reflexiona

57 ¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.

a) Si el precio de un artículo aumenta un 40 % y después un 60 %, se duplica.

b) La longitud de la diagonal de un cuadrado es proporcional al lado del mismo.

c) Si una cantidad aumenta un 200 %, se triplica.

d) Si a 35 le añades el 25 %, obtienes 47,5.

e) El 150 % del 50 % es el 200 %.

f) Si compro un coche por 12 000 € y me rebajan un 15 %, pagaré 10 200 €.

g) Si la cuota anual de un club deportivo era 360 € y ha pasado a 414 €, la han subido un 115 %.

h) Al aumentar primero un 20 % y después disminuir un 40 % se obtiene una cantidad mayor que si se aplica primero la disminución y luego el aumento.

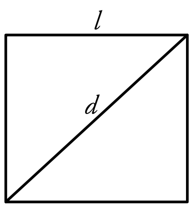
i) Si una cantidad se duplica, ha aumentado un 100 %.

a) Aumenta un 40 % $\to$ 1 + 0,4
Aumenta un 60 % $\to$ 1 + 0,6
Índice de variación total es:

$1{,}4 \cdot 1{,}6 = 2{,}24 \to 1 + 1{,}24 \to 124\,\%$

Aumenta un 124 % $\neq$ 200 %

Falso.

b) 

La diagonal d, de un cuadrado de lado l vale:

$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2} \to l$ y d son proporcionales.

Verdadero.

c) Aumenta un 200 % $\to$ 1 + 2 = 3

Si la cantidad inicial es $x \to$ Cantidad final es $3x$ luego se triplica.

Verdadero.

d) Aumenta un 25 % $\to$ 1 + 0,25 = 1,25

$35 \cdot 1{,}25 = 43{,}75 \neq 47{,}5$

Falso.

e) El 150 % es 1,5
El 50 % es 0,5
si 150 % de 50 % $\to 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75 \to 75\,\%$

Falso.

f) Cantidad inicial 12 000 €

Disminución del 15 % $\to 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

$12\,000 \cdot 0{,}85 = 10\,200$ €

Verdadero.

g) Cantidad inicial 360 €
Cantidad final 414 €
$360 \cdot x = 414 \to x = \dfrac{414}{360} = 1{,}15 = 1 + 0{,}15 \to$

$\to$ Ha subido un 15 % $\neq$ 115 %

Falso.

h) $\left.\begin{array}{l}\text{Aumentar un } 20\,\% \;\rightarrow\; 1+0,2=1,2\\ \text{Disminuir un } 40\,\% \;\rightarrow\; 1-0,4=0,6\\ C_I \;\rightarrow\; \text{Cantidad inicial}\end{array}\right\}\rightarrow 1,2\cdot 0,6\cdot C_I=0,72\cdot C_I$

$\left.\begin{array}{l}\text{Disminuir un } 40\,\% \;\rightarrow\; 1-0,4=0,6\\ \text{Aumentar un } 20\,\% \;\rightarrow\; 1+0,2=1,2\\ C_I \;\rightarrow\; \text{Cantidad inicial}\end{array}\right\}\rightarrow 0,6\cdot 1,2\cdot C_I=0,72\cdot C_I$

Falso.

i) $\left.\begin{array}{l}C_I = \text{Cantidad inicial}\\ \text{Aumenta } 100\,\% \;\rightarrow\; 1+1=2\end{array}\right\rangle 2\cdot C_I \rightarrow \text{Duplica la } C_I$

Verdadero.

58 **Si la base de un rectángulo disminuye un 10 % y su altura aumenta un 10 %, ¿su área aumenta, disminuye o se queda igual? Justifica tu respuesta.**

$b \rightarrow$ Base del rectángulo.

$a \rightarrow$ Altura del rectángulo.

$A = b \cdot a =$ Área del rectángulo.

La base disminuye un 10 % $\rightarrow 1 - 0,1 = 0,9 \rightarrow 0,9 \cdot b$

La altura aumenta un 10 % $\rightarrow 1 + 0,1 = 1,1 \rightarrow 1,1 \cdot a$

$A' = 0,9 \cdot b \cdot 1,1 \cdot a = 0,9 \cdot 1,1 \cdot b \cdot a = 0,99 \cdot A \rightarrow$ Disminuye un $1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow 1\,\%$

59 **¿Qué es mejor, colocar 5 000 € al 4,2 % durante 2 años o colocar la misma cantidad al 0,4 % mensual durante 20 meses?**

$C_I = 5\,000$ €

4,2 % durante 2 años $\rightarrow C_F = C_I \cdot \left(1 + \dfrac{4,2}{100}\right)^2 \rightarrow 5\,000 \cdot (1,042)^2 = 5\,428,82$ €

0,4 % durante 20 meses $\rightarrow C_F = C_I \cdot \left(1 + \dfrac{0,4}{1\,200}\right)^{20} \rightarrow C_F = 5\,000 \cdot (1,0003)^{20} \rightarrow$

$\rightarrow C_F = 5\,033,44$ €

Es mejor la 1.ª opción.

60 **Tenemos 5 000 € en una cuenta. A final de cada mes, ingresamos un 5 % del dinero que hay en la cuenta en ese momento. ¿Al cabo de cuántos meses tendremos el doble?**

Utiliza el factor constante de la calculadora para resolverlo por tanteo.

Buscamos que la cantidad final sea el doble que la inicial $\rightarrow$

$\rightarrow C_F = C_I \cdot \left(1 + \dfrac{5}{100}\right)^n = 2 \cdot C_I \rightarrow C_F = C_I \cdot (1 + 0,05)^n = 2 \cdot C_I \rightarrow$

$\rightarrow C_I \cdot (1,05)^n = 2 \cdot C_I \rightarrow (1,05)^n = 2 \rightarrow n = log_{1,05}2 \rightarrow n = 14,21$

En 15 años la cantidad final será más del doble que la cantidad inicial.

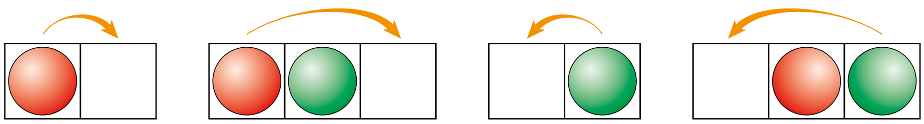
Busca regularidades y generaliza

Un juego de fichas y un reto

OBJETIVO: Poner las rojas en el lugar de las verdes y las verdes en el de las rojas.

NORMAS:

- **Las rojas se desplazan únicamente hacia la derecha, y las verdes, hacia la izquierda.**
- **Los movimientos se realizan avanzando a la siguiente casilla o saltando sobre una ficha contraria.**



CUENTA Y COMPLETA LA TABLA:

N.° DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	…
N.° DE MOVIMIENTOS	?	8	?	?	…

N.° DE FICHAS DE CADA COLOR	1	2	3	4	n
N.° DE MOVIMIENTOS	4	8	12	16	$4 \cdot n$

Lee y comprende

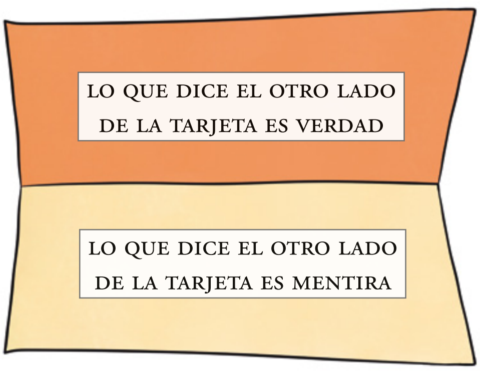
Incógnita difícil de despejar

¿Sabes qué es una *paradoja*? Ahora puedes observar una.

Escribe en uno y otro lado de una tarjeta los mensajes de la derecha.

Y ahora pregúntate:

¿Hay alguna verdad o alguna mentira en alguno de los lados de la tarjeta?



Si hubiera alguna verdad o alguna mentira, en cualquiera de las dos se entraría en contradicción, puesto que es una reducción a lo absurdo.

Reflexiona y saca conclusiones

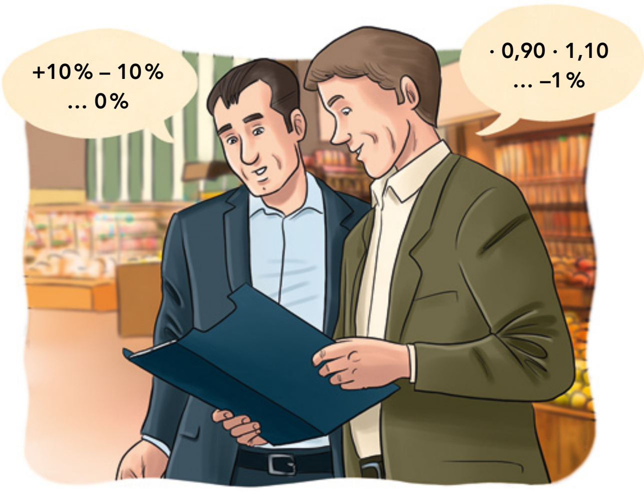
En un supermercado comparan las ventas de cada trimestre con las del trimestre anterior:

— EL CONTABLE: **El primer trimestre del año ha sido malo, hemos bajado las ventas un 10 %. Pero en el segundo trimestre hemos vuelto a subir un 10 %.**

— EL GERENTE: **Entonces, durante el semestre, ni hemos bajado ni hemos subido.**

— EL CONTABLE: **No, hemos perdido un 1 %.**

¿Cuál de los dos tiene razón?



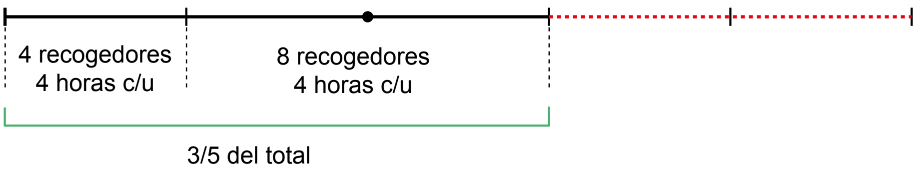
Tiene razón el contable, puesto que, si bajamos un 10 % de una cantidad tenemos un 90 %. Y si a ese 90 % le subimos un 10 % (90 · 1,1 = 99) no obtendremos la cantidad inicial, sino que habremos perdido un 1 %.

Página 65

Entrénate resolviendo problemas

- **Una cuadrilla de 4 recogedores de aceitunas trabaja 4 horas por la mañana en un campo de olivos. Por la tarde, se les unen otros 4 recogedores y trabajan todos juntos otras cuatro horas. Al final del día, se han recogido las tres quintas partes del campo.**

  ¿Cuánto tardarán 4 de estos recogedores en rematar la faena?



$\frac{1}{5}$ de la tarea lo hacen 4 recogedores en 4 horas.

Los $\frac{2}{5}$ que faltan lo harán 4 recogedores en 8 horas.

- **La media de las edades de Rosa, Carol y Pilar es de 12 años. ¿Cuál es la edad de Sara, si al incorporarse al grupo la media sube a 15 años?**

  Si la media sube a 15 años es porque Sara ha subido a todas 3 años más y ella ha puesto sus 15. Por tanto, Sara tiene 15 + 3 + 3 + 3 = 15 + 9 = 24 años.

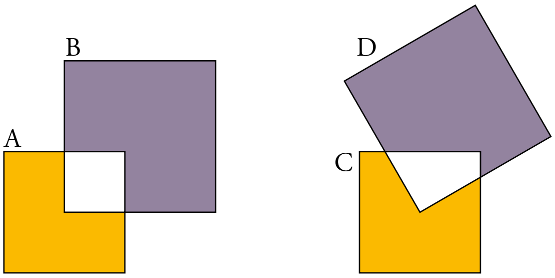
  Si lo resolvemos algebraicamente, sería así:

$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar}}{3} = 12 \ \rightarrow \ \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} = 12 \cdot 3 = 36$$

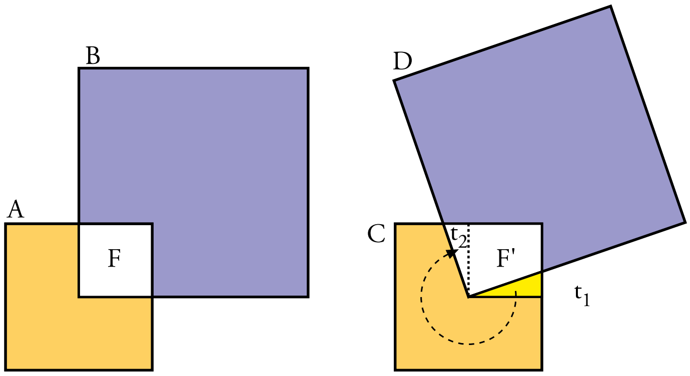
$$\frac{\text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara}}{4} = 15 \ \rightarrow \ \text{Rosa} + \text{Carol} + \text{Pilar} + \text{Sara} = 15 \cdot 4 = 60$$

  Como Rosa + Carol + Pilar = 36, entonces 36 + Sara = 60 $\rightarrow$ Sara = 60 – 36 = 24 años.

- **El cuadrado A contiene un 16 % del cuadrado B.**
  ¿Qué porcentaje del cuadrado D contiene el cuadrado C, si el C es igual al A, y el D, al B?



La figura F tiene la misma área que la figura F', ya que $t_1 = t_2$. Por tanto, el cuadrado D tiene un 16 % del cuadrado C.



AUTOEVALUACIÓN

1 **Indica el índice de variación y la cantidad final en cada caso:**

a) 300 disminuye un 12 % y después un 35 %.

b) 1 520 disminuye un 90 % y después aumenta un 150 %.

a) $1 - 0{,}12 = 0{,}82$

$1 - 0{,}35 = 0{,}65$

$C_F = 300 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}65 = 159{,}9$

Índice de variación total $= 0{,}82 \cdot 0{,}65 = 0{,}533 \rightarrow 1 - 0{,}533 = 0{,}467 = 46{,}7\,\%$ de bajada.

b) $C_F = 1\,520 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}5 = 380$

Índice de variación total $= 0{,}1 \cdot 2{,}5 = 0{,}25 \rightarrow 1 - 0{,}25 = 0{,}75 = 75\,\%$ de bajada.

2 **Indica el porcentaje de aumento o de disminución que corresponde a cada uno de los siguientes índices de variación:**

a) 1,07 **b) 0,78** **c) 2,2**

a) 7 % de subida. b) 22 % de bajada. c) 120 % de subida.

3 **Después de una subida de un 3,5 %, un piso cuesta 258 600 €.**

a) ¿Cuál era el precio antes de la subida?

b) Si expresas el resultado con dos cifras significativas, ¿qué puedes decir del error absoluto cometido?

a) El precio antes de la subida era de 258 600 : 1,035 = 249 855 €.

b) El resultado aproximado es 250 000 €. El error absolutado es < 5 000 €.

4 **El precio de un teléfono móvil ha subido un 20 % y después ha bajado un 25 %. Si pagué por él 135 €, ¿cuál era su precio inicial?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Aumento del } 20\,\% \rightarrow 1 + 0{,}2 = 1{,}2 \\ \text{Disminución del } 25\,\% \rightarrow 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \\ C_I \rightarrow \text{Cantidad inicial} \\ C_F \rightarrow 135\text{ €} \rightarrow \text{Cantidad final} \end{array}\right\} \rightarrow C_F \rightarrow 1{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot C_I \rightarrow$$

$\rightarrow 135 = 0{,}9 \cdot C_I \rightarrow C_I = 150$ €

5 **Dos palas excavadoras, trabajando 10 horas diarias, hacen un desmonte en 9 días. ¿Cuánto tardarían en hacer ese trabajo tres palas a un ritmo de 12 horas al día?**

2 palas, 10 h/día, 9 días $\rightarrow 2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$ h

3 palas, 12 h/día, x días $\rightarrow 3 \cdot 12 \cdot x = 36 \cdot x$ h

$$x = \frac{180}{36} = 5 \text{ días}$$

6 **Mezclamos 20 kg de harina de 1,25 €/kg con 35 kg de otra harina de 0,75 €/kg. ¿Cuál será el precio de la mezcla?**

	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE
HARINA 1	20	1,25	20 · 1,25 = 25
HARINA 2	35	0,75	35 · 0,75 = 26,25
MEZCLA	55	$\frac{51,25}{55} = 0,93$	51,25

7 **Dos trenes salen a las 8:00 h de la mañana de dos ciudades, A y B, que distan 780 km entre sí. Si el que sale de A hacia B lleva una velocidad de 110 km/h, y el que sale de B hacia A va a 90 km/h, ¿a qué hora se encontrarán?**

La velocidad de aproximación es 110 + 90 = 200 km/h

Calculamos el tiempo que tardan en encontrarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{780}{200} = 3{,}9 \text{ h} = 3 \text{ h } 54 \text{ min}$$

Por tanto, a las 8:00 + 3 h 54 min = 11:54.

8 **Depositamos en un banco 4 000 € al 3,5 % de interés anual durante 3 años. ¿En cuánto se convertirán si los periodos de capitalización son trimestrales?**

Los periodos de capitalización son trimestrales, por tanto, 3,5/4 = 0,875 %

$C_F = 4\,000 \cdot 1{,}00875^{12} = 4\,440{,}8$ €

9 **Se ha repartido un premio entre tres concursantes de forma proporcional a los puntos conseguidos, 12, 13 y 15, respectivamente. El concursante que obtuvo menos puntos se llevó 420 €.**

a) ¿Cuánto dinero se repartió?

b) ¿Qué cantidad se llevó cada concursante?

12 + 13 + 15 = 40

El de 12 puntos se llevo 420 €

a) $\frac{12}{40} \cdot x = 420 \rightarrow 12x = 16\,800 \rightarrow x = \frac{16\,800}{12} = 1\,400$ €

b) $\frac{13}{40} \cdot 1\,400 = 455$ €

$\frac{15}{40} \cdot 1\,400 = 525$ €

10 **Dos grifos vierten 15 L/min y 20 L/min, respectivamente, en un depósito de 1 800 litros que además tiene un desagüe que vacía 10 L/min. Si se abren a la vez los dos grifos y el desagüe, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito?**

1 800 L

En 1 minuto se llena: 15 + 20 – 10 = 25 L

Luego 1 800 L se llenarán en $\frac{1\,800}{25} = 72$ min $\rightarrow$ se llena en 1 h y 12 min.

4 PROGRESIONES

Página 67

Resuelve

1 **Observa la noria que aparece a la derecha.**

Si C es la cantidad de agua que aporta en una vuelta, y A es la cantidad de agua que tenía inicialmente el pilón al que abastece, ¿qué cantidad de agua habrá en el pilón después de n vueltas?

Después de n vueltas habrá $nC + A$.

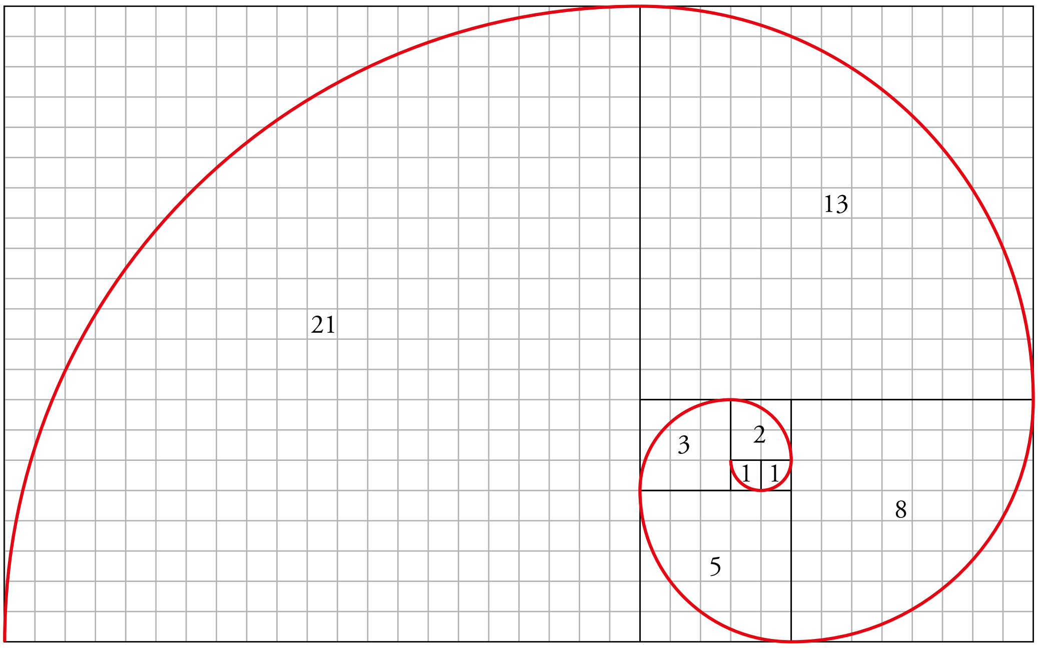
2 **¿Qué criterio hay que seguir para obtener más términos en la sucesión de Fibonacci?**

Los dos primeros términos son 1 y 1. Los demás se obtienen como la suma de los dos anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

3 **Dibuja las dos filas que siguen en el esquema que muestra la evolución de la descendencia de una pareja de conejos.**

¿Cuántas parejas habría en el sexto mes? ¿Y en el séptimo?

4 **Dibuja en papel cuadriculado la espiral de Fibonacci ampliando la que ves en la página anterior mediante dos arcos más.**



1 SUCESIONES

Página 68

Ladillo

¿A cuáles de las sucesiones de la derecha corresponden estos dibujos?

La torre corresponde a la sucesión b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

La espiral corresponde a la sucesión e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

1 Averigua el criterio de formación de cada una de las sucesiones siguientes:

a) 1/2, 2/3, 3/4, … b) 3, 4, 5, 6, … c) 1, 8, 27, …

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \rightarrow a_n = \frac{n}{n+1}$

b) 3, 4, 5, 6, … $\rightarrow a_n = n + 2$

c) 1, 8, 27, … $\rightarrow a_n = n^3$

2 Averigua el criterio con el que se ha formado cada una de las sucesiones de arriba y añade tres términos más a cada una.

a) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene sumando 4 al anterior.

21, 25, 29, …

b) Criterio: Los términos son los cuadrados de los números naturales.

49, 64, 81, …

c) Criterio: El primer término es 2, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2, o bien, son las sucesivas potencias de 2 ($2^1, 2^2, 2^3, \dots$).

128, 256, 512, …

d) Criterio: El primer término es 1, y cada término se obtiene multiplicando el anterior por –3.

729, –2 187, 6 561, …

e) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 1, y cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

13, 21, 34, …

f) Criterio: El primer término es 1, y cada término que ocupa un lugar n se obtiene sumando $n - 1$ al anterior.

22, 29, 37, …

g) Criterio: Cada término que ocupa un lugar n se obtiene multiplicando $n \cdot (n + 1)$

56, 72, 90, …

h) Criterio: El primer término es 170, y cada término se obtiene restando 50 al anterior.

–130, –180, –230, …

i) Criterio: Los dos primeros términos son 1 y 3, y los términos pares se obtienen sumando 2 al anterior, y los términos impares se obtienen multiplicando el anterior por 2.

38, 76, 78, …

j) Criterio: Los términos son los números primos.

23, 29, 31, …

3 **Forma cinco sucesiones con criterios similares a los anteriores. En algún caso, invéntate el criterio.**

Respuesta abierta.

Ejemplo:

a) Criterio: Obtenemos cada término mulitplicando el anterior por –2.

3, –6, 12, –24, 48, …

b) Criterio: Obtenemos cada término sumando 1,5 al término anterior.

1; 2,5; 4; 5,5; 7; 8,5; …

c) Criterio: Obtenemos los términos pares multiplicando el anterior por –3, y los impares, sumando –3 al anterior.

1, –3, –6, 18, 15, –45, –48, …

d) Criterio: Los términos son los cubos de los números naturales.

1, 8, 27, 64, 125, 216, …

e) Criterio: Obtenemos cada término restando 8 del anterior.

100, 92, 84, 76, 68, 60, …

4 **Indica cuál es la relación $\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = \dots$ entre cada dos términos consecutivos de las sucesiones c) y d) de arriba.**

La relación es 2.

La relación es –3.

Página 69

5 **Comprueba, para b), c), d) y h) de la página anterior, que: $b_n = n^2$; $c_n = 2^n$; $d_n = (-3)^{n-1}$; $h_n = 220 - 50n$.**

Se comprueba.

6 **Escribe los cinco primeros términos de:**

$$a_n = n^3 \qquad b_n = n^2 - 3n + 7 \qquad c_n = \frac{n-3}{n+4}$$

$a_n \to 1, 8, 27, 64, 125, \ldots$

$b_n \to 5, 5, 7, 11, 17, \ldots$

$c_n \to -\frac{2}{5}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{9}, \ldots$

7 **Forma una sucesión recurrente con estos datos:**

$$j_1 = 2 \qquad j_2 = 3 \qquad j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

8 **Inventa otras dos sucesiones recurrentes con datos distintos a los anteriores.**

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$

Sucesión: 3, 5, 13, 31, 75, 181, …

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_n = b_{n-1} + (b_{n-2})^2$

Sucesión: 1, 3, 4, 13, 29, 198, 1 039, …

9 **Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones que tienen por término general:**

a) $a_n = 3 + 5(n-1)$ **b)** $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **c)** $c_n = (n-1)(n-2)$ **d)** $d_n = n^2 - n$

a) 3, 8, 13, 18, … b) 3, 32, 34, 38, … c) 0, 0, 2, 6, … d) 0, 2, 6, 12,…

10 **Descubre la ley de recurrencia y añade un nuevo término a cada una de las siguientes sucesiones:**

a) 1, –4, 5, –9, 14, –23, … (Diferencia)

b) 1, 2, 3, 6, 11, 20, … (Relaciona cada elemento con los tres anteriores)

c) 1; 2; 1,5; 1,75; … (Semisuma)

d) 1, 2, 2, 1, 1/2, 1/2, 1, … (Cociente)

a) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) Nuevo término: 37. Ley de recurrencia: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$

c) Nuevo término: 1,625. Ley de recurrencia: $c_n = \dfrac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$

d) Nuevo término: 2. Ley de recurrencia: $d_n = \dfrac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$

11 **Construye una sucesión cuya ley de recurrencia sea $a_n = a_{n-1} + n$. (Dale al primer término el valor que quieras).**

Respuesta abierta. Por ejemplo: 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, …

12 **a) Comprueba que el término general de la sucesión –1, 1, –1, 1, –1, 1, … es $s_n = (-1)^n$.**

b) Halla el término general de estas sucesiones:

$$a_n \rightarrow 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$
$$b_n \rightarrow 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$$

a) $s_1 = (-1)^1 = -1$; $s_2 = (-1)^2 = 1$; $s_3 = (-1)^3 = -1$; $s_4 = (-1)^4 = 1$

Los términos s_n con n par son 1, y cuando n es impar son iguales a –1. Coincide con los términos de la sucesión descrita.

b) $a_n = (-1)^{n+1}$; $b_n = (-1)^{n+1} \cdot n$

2 PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Página 70

1 **El primer término de una progresión aritmética s es $s_1 = 5$ y la diferencia es $d = 2{,}5$. Escribe sus diez primeros términos.**

Haz lo mismo para otra progresión aritmética t cuyo primer término sea $t_1 = 20$ y cuya diferencia sea $d = -3$.

Progresión s_n: 5; 7,5; 10; 12,5; 15; 17,5; 20; 22,5; 25; 27,5; …

Progresión t_n: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, –7, …

2 **Calcula, para las progresiones de arriba:**

$$b_{36} \qquad c_{31} \qquad d_{1\,000}$$

b) $b_1 = 120$ y $d = 20 \rightarrow b_n = b_1 + (n-1) \cdot d = 120 + (n-1) \cdot 20 = 120 + 20n - 20 = 100 + 20n$

Así: $b_{36} = 100 + 20 \cdot 36 = 820$

c) $c_1 = 9$ y $d = -2 \rightarrow c_n = 9 + (n-1) \cdot (-2) = 9 - 2n + 2 = 11 - 2n$

Así: $c_{31} = 11 - 2 \cdot 31 = -51$

d) $d_1 = 5{,}83$ y $d = 0{,}04 \rightarrow d_n = 5{,}83 + (n-1) \cdot 0{,}04 = 5{,}83 + 0{,}04n - 0{,}04 = 5{,}79 + 0{,}04n$

Así: $d_{1\,000} = 5{,}79 + 0{,}04 \cdot 1\,000 = 45{,}79$

3 **Halla el término general de las progresiones b), c) y d). (Intenta hacerlo sin aplicar la fórmula, simplemente razonando).**

$b_n = 100 + 20 \cdot n$ $\qquad c_n = 11 - 2 \cdot n$ $\qquad d_n = 5{,}79 + 0{,}04 \cdot n$

4 **a) Si dos de los términos de una progresión aritmética s son:**

$$s_1 = 6 \text{ y } s_3 = 9$$

averigua el valor de la diferencia, d.

b) Halla el término general de la progresión, s_n.

a) $d = 1{,}5$ $\qquad$ b) $s_n = 6 + 1{,}5\,(n-1) = 6 + 1{,}5n - 1{,}5 = 4{,}5 + 1{,}5n$

Página 71

5 Halla la suma de todos los números impares menores que 100.

El término general de los números impares es $a_n = 2n - 1$. El último impar menor que 100 es 99, que resulta ser a_{50}. Así, la suma es:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2\,500$$

6 a) Si $a_1 = 5$ y $d = 5$, calcula S_{15}.

b) Si $b_1 = 5$ y $b_2 = 7$, calcula b_{40} y S_{40}.

c) Si $c_1 = 5$ y $c_2 = 12$, calcula S_{32}.

a) $a_1 = 5$ y $d = 5 \rightarrow a_n = 5 + (n - 1) \cdot 5 = 5n$; $a_{15} = 5 \cdot 15 = 75$

$$S_{15} = \frac{(5 + 75) \cdot 15}{2} = 600$$

b) $b_1 = 5$ y $d = 2 \rightarrow b_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 3 + 2n$; $b_{40} = 3 + 2 \cdot 40 = 83$

$$S_{40} = \frac{(5 + 83) \cdot 40}{2} = 1\,760$$

c) $c_1 = 5$ y $d = 7 \rightarrow c_n = 5 + (n - 1) \cdot 7 = -2 + 7n$; $c_{32} = -2 + 7 \cdot 32 = 222$

$$S_{32} = \frac{(5 + 222) \cdot 32}{2} = 3\,632$$

7 Si el primer término de una progresión es $c_1 = 17$ y el quinto es $c_5 = 9$, halla la suma S_{20}.

Como $c_1 = 17$ y $c_5 = 9 \rightarrow d = -2$

Así, $c_n = 17 + (n - 1)(-2) = 19 - 2n$; $c_{20} = 19 - 2 \cdot 20 = -21$

$$S_{20} = \frac{(14 - 21) \cdot 20}{2} = -40$$

8 Los primeros términos de una progresión aritmética son $a_1 = 4$, $a_2 = 7$. Halla esta suma:

$$\boldsymbol{a_{10} + a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{19} + a_{20}}$$

Como $a_1 = 4$ y $a_2 = 7$, tenemos que la diferencia de esta progresión es $d = 3$.

Nos piden la suma de los términos del décimo al vigésimo. Lo que vamos a hacer es calcular S_{20} y restarle S_9:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(a_1 + a_1 + 19 \cdot 3) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 4 + 57) \cdot 20}{2} = 650$$

$$S_9 = \frac{(4 + 4 + 8 \cdot 3) \cdot 9}{2} = 144$$

Por tanto, la suma pedida es $650 - 144 = 506$.

Página 72

Con calculadora (ladillo)

Añade dos términos a cada una de las progresiones siguientes:

a) 3, 6, 12, 24, 48, 96, … Cada término se obtiene multiplicando el anterior por 2. Se trata de una progresión geométrica de razón 2.

b) 3, 30, 300, 3 000, … Es una progresión geométrica de razón 10.

También son progresiones geométricas las tres sucesiones siguientes:

c) 80; 40; 20; 10; 5; 2,5; … Su razón es $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

d) 80; 8; 0,8; 0,08; … Su razón es $\frac{1}{10} = 0{,}1$.

e) 3, –6, 12, –24, 48, –96, … Su razón es –2.

a) 192, 384, …

b) 30 000, 300 000, …

c) 1,25; 0,625; …

d) 0,008; 0,0008; …

e) 192, –384, …

3 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Página 73

1 Construye una progresión geométrica cuyo primer término es 125 y cuya razón es 0,4.

125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; …

2 De una progresión geométrica conocemos $a_1 = 0{,}625$ y $a_3 = 0{,}9$. Halla r y los seis primeros términos.

$0{,}9 = 0{,}625r^2 \rightarrow r^2 = 1{,}44 \rightarrow r = \pm 1{,}2$

Por tanto, hay dos progresiones:

- $r = 1{,}2$

  0,625; 0,75; 0,9; 1,08; 1,296; 1,5552; …

- $r = -1{,}2$

  0,625; –0,75; 0,9; –1,08; 1,296; –1,5552; …

3 En una progresión geométrica de términos positivos, $a_1 = 2$ y $a_3 = 6$. Halla a_n, a_{11} y a_{12}.

$6 = 2 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 3 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

Como es una progresión de términos positivos, la razón también lo es.

$r = \sqrt{3}$

$a_n = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$a_{11} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{10} = 2 \cdot 3^5 = 486$

$a_{12} = 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{11} = 2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt{3} = 486\sqrt{3}$

4 En una progresión geométrica, el primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 1{,}4$. Averigua, con ayuda de la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es inferior a 1 000 000.

$$\left.\begin{array}{l} a_{37} = 911127{,}781 \\ a_{38} = 1275578{,}893 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Es } a_{37}.$$

5 En una progresión geométrica, $a_1 = 1000$ y $r = 0{,}8$. Averigua, con la calculadora, cuál es el término más avanzado cuyo valor es mayor que 1.

$$\left.\begin{array}{l} a_{31} = 1{,}237 \\ a_{32} = 0{,}99 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Es } a_{31}.$$

Página 74

6 **Siguiendo el procedimiento utilizado para hallar S_n, calcula 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + + 192 + 384.**

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 + 384 = \frac{3 \cdot 2^8 - 3}{2 - 1} = 765$$

7 **¿Cuántos denarios se llevó, en total, el centurión del problema resuelto 4 de la página anterior?**

$$S_{16} = \frac{1 \cdot 20^{16} - 1}{2 - 1} = 65\,535 \text{ denarios}$$

8 **Calcula la suma de los diez primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 8{,}192$ y $r = 2{,}5$.**

$$S_{10} = \frac{8{,}192 \cdot 2{,}5^{10} - 8{,}192}{2{,}5 - 1} = 52\,077{,}872$$

9 **Si al comienzo de cada año ingresamos 6000 € al 5%, ¿qué capital tendremos al final del sexto año?**

Se trata de una progresión geométrica, donde $a_1 = 6\,000$ y $r = 1{,}05$. Nos están preguntando por a_7.

Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 6\,000 \cdot 1{,}05^{n-1}$

Por tanto, $a_7 = 8\,040{,}57$ €

Página 75

10 **En una progresión geométrica, $a_1 = 8$ y $r = 0{,}75$. Calcula la suma de sus infinitos términos.**

$$S_\infty = \frac{8}{1 - 0{,}75} = \frac{8}{0{,}25} = 32$$

11 **En una progresión geométrica, $a_1 = 30$ y $r = -0{,}2$. Calcula la suma de «todos» sus términos.**

$$S_\infty = \frac{30}{1 - (-0{,}2)} = \frac{30}{1{,}2} = 25$$

12 **En una progresión geométrica, su cuarto término es $a_4 = 10$ y el sexto es $a_6 = 0{,}4$. Halla: la razón, r; el primer término, a_1; el octavo término, a_8; la suma de los ocho primeros términos, S_8; y la suma de sus infinitos términos, S_∞.**

$a_6 = a_4 \cdot r^2 \rightarrow 0{,}4 = 10 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 0{,}04 \rightarrow r = \pm 0{,}2$

$r = 0{,}2 \rightarrow \quad 10 = a_1 \cdot 0{,}2^3 \rightarrow 10 = a_1 \cdot 0{,}008 \rightarrow a_1 = 1\,250$

$a_8 = a_1 \cdot 0{,}2^7 \rightarrow a_8 = 1\,250 \cdot 0{,}2^7 \rightarrow a_8 = 0{,}016$

$$S_8 = \frac{1\,250 - 1\,250 \cdot 0{,}2^8}{1 - 0{,}2} = 1\,562{,}496$$

$$S_\infty = \frac{1\,250}{1 - 0{,}2} = 1\,562{,}5$$

$r = -0{,}2 \rightarrow \quad 10 = a_1 \cdot (-0{,}2)^3 \rightarrow a_1 = -1\,250$

$a_8 = -1\,250 \cdot (-0{,}2)^7 = 0{,}016$

$$S_8 = \frac{-1\,250 - (-1\,250) \cdot (-0{,}2)^8}{1 - (-0{,}2)} = -1\,041{,}664$$

$$S_\infty = \frac{-1\,250}{1 - (-0{,}2)} = \frac{-1\,250}{1{,}2} = -1\,041{,}\widehat{6}$$

4 PROGRESIONES GEOMÉTRICAS SORPRENDENTES

Página 77

1 **El día 1 de cierto mes, una banquera le propuso a un banquero el siguiente trato:**

Cada día de este mes yo te doy 100 000 € con la condición de que tú dupliques el dinero que haya en esta caja en la que ahora hay un céntimo. Al final de mes tú te quedas con lo que te he ido dando día a día y yo me quedo con lo que finalmente haya en la caja.

El banquero, después de pensar un rato y echar cuentas con la calculadora, contestó riendo: ¿Por qué no me haces esta propuesta dentro de un año exactamente?

Esta conversación ocurrió entre el 1 de marzo de 2008 y el 1 de septiembre de 2015. Di, justificando tu respuesta, en qué día tuvo lugar.

Era el día 1 de febrero del año 2012, bisiesto. Es decir, un mes con 29 días.

Así, en este año las cuentas salen como sigue:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 29 = 2\,900\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{29} = 5\,368\,709$ €, cantidad muy superior a la anterior.

Sin embargo, febrero del año 2013 tendría un día menos, 28. Y las cuentas serían estas:

— Una aportación de 100 000 € al día supone $100\,000 \cdot 28 = 2\,800\,000$ €.

— Doblando cada día una cantidad inicial de 0,01 €, se obtiene:

$0{,}01 \cdot 2^{28} = 2\,684\,354{,}56$ €, cantidad inferior a la primera.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 78

1. Número de términos de una progresión

Hazlo tú

- **¿Cuántos términos tiene una progresión aritmética en la que $a_2 = 2{,}5$; $d = -1{,}5$ y el último término es –9,5?**

$a_2 = a_1 - 1{,}5 \rightarrow 2{,}5 = a_1 - 1{,}5 \rightarrow a_1 = 2{,}5 + 1{,}5 \rightarrow a_1 = 4$

$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow -9{,}5 = 4 + (n - 1) \cdot (-1{,}5) \rightarrow -13{,}5 = -1{,}5n + 1{,}5 \rightarrow$

$\rightarrow -13{,}5 - 1{,}5 = -1{,}5n \rightarrow -15 = -1{,}5n \rightarrow n = 10$

2. Interes compuesto

Hazlo tú

- **Abrimos una cuenta, al comienzo de un año, con 500 € al 1,25 % trimestral y la mantenemos 3 años. ¿Cuánto dinero tendremos al final de cada año?**

$C_I = 500$ €

$r = 1{,}25$

3 años $\rightarrow 3 \cdot 4 = 12$ trimestres

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$C_1 = 500 \cdot \left(1 + \frac{1,25}{100}\right)^4 = 525{,}47 \text{ €}$$

$$C_2 = 500 \cdot \left(1 + \frac{1,25}{100}\right)^8 = 552{,}24 \text{ €}$$

$$C_3 = 500 \cdot \left(1 + \frac{1,25}{100}\right)^{12} = 580{,}38 \text{ €}$$

3. Suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica

Hazlo tú

- **Si otra empresa cobra 120 € por el primer metro y un 15 % más por cada metro siguiente, ¿cuál es más rentable para perforar un pozo de 10 m?**

$a_1 = 120$

$15\% \;\rightarrow\; 1 + 0{,}15 = 1{,}15 = r$

$a_2 = 1{,}15 \cdot 120 = 138$

$a_3 = 1{,}15 \cdot 138 = 1{,}15 - 1{,}15 \cdot 120 = 1{,}15^2 \cdot 120 = 158{,}7$

$\vdots$

$a_{10} = 1{,}15^9 \cdot 120 = 422{,}14$

Calculamos el precio de abrir el pozo de 10 metros:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{422{,}14 \cdot 1{,}15 - 120}{1{,}15 - 1} = 2\,436{,}41 \text{ €}$$

Con la otra empresa eran 2 595,88 €.

Luego es más estable esta.

4. Fracción generatriz

Hazlo tú

- **Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales usando progresiones:**

a) $3{,}\widehat{7}$ **b)** $3{,}5\widehat{4}$

a) $3{,}7777\ldots = 3 + 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots = 3 + \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots +\right)$

$$S_\infty\ldots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$3 + \frac{7}{9} = \frac{34}{9}$$

b) $3{,}544444\ldots = 3{,}5 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots = 3{,}5 + \left(\frac{4}{100} + \frac{4}{1\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty\ldots = \frac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{45}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{35}{10} + \frac{2}{45} = \frac{319}{90}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 79

Practica

Sucesiones

1 **Calcula los cuatro primeros términos y el que ocupa el lugar 25 de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \frac{n}{2} - 5$ b) $b_n = n - \frac{1}{n}$ c) $c_n = (-1)^n + \frac{1}{2}$

d) $d_n = \frac{n + n(-1)^n}{2}$ e) $e_n = \frac{n^2 + n}{2}$ f) $f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 2^n$

a) $a_1 = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2} = -4{,}5;\ \ a_2 = \frac{2}{2} - 5 = -4$

$a_3 = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2} = -3{,}5;\ \ a_4 = \frac{4}{2} - 5 = -3$

$a_{25} = \frac{25}{2} - 5 = \frac{15}{2} = 7{,}5$

b) $b_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0;\ \ b_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$b_3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} = 2{,}\widehat{6};\ \ b_4 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

$b_{25} = 25 - \frac{1}{25} = \frac{624}{25} = 24{,}96$

c) $c_1 = (-1)^1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5;\ \ c_2 = (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$c_3 = (-1)^3 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5;\ \ c_4 = (-1)^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$c_{25} = (-1)^{25} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

d) $d_1 = \frac{1 + 1(-1)^1}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0;\ \ d_2 = \frac{2 + 2(-1)^2}{2} = 2$

$d_3 = \frac{3 + 3(-1)^3}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0;\ \ d_4 = \frac{4 + 4(-1)^4}{2} = 4$

$d_{25} = \frac{25 + 25(-1)^{25}}{2} = 0$

e) $e_1 = \frac{1^2 + 1}{2} = 1;\ \ e_2 = \frac{2^2 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$e_3 = \frac{3^2 + 3}{2} = 6;\ \ e_4 = \frac{4^2 + 4}{2} = 10$

$e_{25} = \frac{(25)^2 + 25}{2} = 325$

f) $f_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} \cdot 2^1 = 2;\ \ f_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} \cdot 2^2 = 2$

$f_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \cdot 2^3 = 2;\ \ f_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \cdot 2^4 = 2$

$f_{25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{25-1} \cdot 2^{25} = 2$

2 **Obtén los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:**

a) $a_1 = 1;\ a_n = 2a_{n-1} + 3$

b) $a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

c) $a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

a) $a_1 = 1,\ a_2 = 2 \cdot 1 + 3 = 5;\ a_3 = 2 \cdot 5 + 3 = 13;\ a_4 = 2 \cdot 13 + 3 = 29;\ a_5 = 2 \cdot 29 + 3 = 61$

b) $a_1 = 2,\ a_2 = 3;\ a_3 = \frac{3}{2};\ a_4 = \frac{3}{2} : 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};\ a_5 = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3 \cdot 2 = 6;\ a_4 = 6 \cdot 3 = 18;\ a_5 = 18 \cdot 6 = 108$

3 **Busca el criterio con el que se han formado estas sucesiones y escribe dos términos más en cada una:**

a) **1, 3/2, 2, 5/2, 3, ...**

b) **1, –2, 4, –8, 16, …**

c) **1, 3, 6, 10, 15, …**

d) **1, 4, 3, –1, –4, …**

e) **0, 3, 8, 15, 24, …**

f) **1, 1/2, 1/3, 1/4, …**

a) $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}$

$a_6 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2};\ a_7 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$

b) $a_n = (-2) \cdot a_{n-1}$

$a_6 = (-2) \cdot (16) = -32;\ a_7 = (-2) \cdot (-32) = 64$

c) $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21;\ a_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

d) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ con $n > 2$

$a_6 = -3;\ a_7 = 1$

e) $a_n = n^2 - 1$ con $n \rightarrow$ natural

$a_6 = (6)^2 - 1 = 35;\ a_7 = (7)^2 - 1 = 48$

f) $a_n = \frac{1}{n}$

$a_6 = \frac{1}{6};\ a_7 = \frac{1}{7}$

4 **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) **12, 14, 16, 18, …**

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

c) **1, 3, 9, 27, …**

d) **1 · 2; 2 · 3; 3 · 4; 4 · 5; …**

a) $a_n = 10 + 2n$

b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

c) $a_n = 3^{n-1}$

d) $a_n = n \cdot (n + 1)$

5 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones:**

a) 8, 10, 2, –8, –10, …

b) 4, 1, 3, –2, 5, …

c) 1, 2, 2, 1, 1/2, …

d) 7, 9, 12, 16, 21, …

a) $a_1 = 8$ y $a_2 = 10$; $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

b) $a_1 = 4$ y $a_2 = 1$; $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

c) $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$; $a_n = a_{n-1} : a_{n-2}$

d) $a_1 = 7$; $a_n = a_{n-1} + n$

Progresiones

6 **Escribe los cuatro primeros términos, el término general y calcula la suma de los veinte primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 1{,}5$; $d = 2$

b) $a_1 = 32$; $d = -5$

c) $a_1 = 5$; $d = 0{,}5$

d) $a_1 = -3$; $d = -4$

a) $a_1 = 1{,}5$; $a_2 = 3{,}5$; $a_3 = 5{,}5$; $a_4 = 7{,}5$

$a_n = 1{,}5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 0{,}5$

$a_{20} = 39{,}5$; $S_{20} = \dfrac{(1,5 + 39,5) \cdot 20}{2} = 410$

b) $a_1 = 32$; $a_2 = 27$; $a_3 = 22$; $a_4 = 17$

$a_n = 32 + (n-1) \cdot (-5) = 37 - 5n$

$a_{20} = -63$; $S_{20} = \dfrac{(32 - 63) \cdot 20}{2} = -310$

c) $a_1 = 5$; $a_2 = 5{,}5$; $a_3 = 6$; $a_4 = 6{,}5$

$a_n = 5 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 4{,}5 + 0{,}5n$

$a_{20} = 14{,}5$; $S_{20} = \dfrac{(5 + 14,5) \cdot 20}{2} = 195$

d) $a_1 = -3$; $a_2 = -7$; $a_3 = -11$; $a_4 = -15$

$a_n = -3 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 1$

$a_{20} = -79$; $S_{20} = \dfrac{(-3 - 79) \cdot 20}{2} = -820$

7 **Halla el término general y calcula la suma de los quince primeros términos en cada una de las siguientes progresiones:**

a) 25, 18, 11, 4, …

b) –13, –11, –9, –7, …

c) 1,4; 1,9; 2,4; 2,9; …

d) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots$

a) Progresión aritmética de diferencia $d = -7 \rightarrow a_n = 25 + (n-1) \cdot (-7) = 32 - 7n$

$a_{15} = -73$; $S_{15} = \dfrac{(25 - 73) \cdot 15}{2} = -360$

b) Progresión aritmética de diferencia $d = 2 \rightarrow a_n = -13 + (n-1) \cdot 2 = -15 + 2n$

$a_{15} = 15$; $S_{15} = \dfrac{(-13 + 15) \cdot 15}{2} = 15$

c) Progresión aritmética de diferencia $d = 0{,}5 \rightarrow a_n = 1{,}4 + (n-1) \cdot 0{,}5 = 0{,}9 + 0{,}5n$

$a_{15} = 8{,}4$; $S_{15} = \dfrac{(1,4 + 8,4) \cdot 15}{2} = 73{,}5$

d) Progresión aritmética de diferencia $d = -1/4 \rightarrow a_n = \dfrac{3}{4} + (n-1) \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}n$

$a_{15} = -\dfrac{11}{4}$; $S_{15} = \dfrac{-2 \cdot 15}{2} = -15$

8 **Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y su término general:**

a) $a_1 = 0{,}3;\ \ r = 2$

b) $a_1 = -3;\ \ r = \frac{1}{2}$

c) $a_1 = 200;\ \ r = -0{,}1$

d) $a_1 = \frac{1}{81};\ \ r = 3$

a) $a_1 = 0{,}3;\ \ a_2 = 0{,}6;\ \ a_3 = 1{,}2;\ \ a_4 = 2{,}4;\ \ a_n = 0{,}3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_1 = -3;\ \ a_2 = -3/2;\ \ a_3 = -3/4;\ \ a_4 = -3/8;\ \ a_n = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $a_1 = 200;\ \ a_2 = -20;\ \ a_3 = 2;\ \ a_4 = -0{,}2;\ \ a_n = 200 \cdot (-0{,}1)^{n-1}$

d) $a_1 = \frac{1}{81};\ \ a_2 = \frac{1}{27};\ \ a_3 = \frac{1}{9};\ \ a_4 = \frac{1}{3};\ \ a_n = \frac{1}{81} \cdot 3^{n-1}$

9 **Halla el término general de cada una de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $20;\ 8;\ 3{,}2;\ 1{,}28;\ \dots$

b) $5;\ 6;\ 7{,}2;\ 8{,}64;\ \dots$

c) $0{,}7;\ 0{,}07;\ 0{,}007;\ \dots$

d) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, \dots$

¿En cuáles puedes sumar todos sus términos?

a) $a_n = 20 \cdot 0{,}4^{n-1}$

b) $a_n = 5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

c) $a_n = 0{,}7 \cdot 0{,}1^{n-1}$

d) $a_n = \frac{1}{6} \cdot (-3)^{n-1}$

10 **Calcula la suma de los diez primeros términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $3, -6, 12, -24, \dots$

b) $0{,}7;\ 1{,}4;\ 2{,}8;\ 5{,}6;\ \dots$

c) $\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

d) $100;\ 20;\ 4;\ 0{,}8;\ \dots$

a) $r = -2;\ \ S_{10} = \dfrac{3 \cdot [(-2)^{10} - 1]}{-3} = -1\,023$

b) $r = 2;\ \ S_{10} = \dfrac{0{,}7 \cdot (2^{10} - 1)}{1} = 716{,}1$

c) $r = \frac{3}{2};\ \ S_{10} = \dfrac{\frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2}} = 75{,}55$

d) $r = 0{,}2;\ \ S_{10} = \dfrac{100 \cdot (0{,}2^{10} - 1)}{-0{,}8} \approx 125$

11 **Halla la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes:**

a) $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \dots$

b) $18;\ 16{,}2;\ 14{,}58;\ 13{,}122;\ \dots$

a) $r = 1/3;\ \ S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{4}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{4}{\frac{2}{3}} = 6$

b) $r = 0{,}9;\ \ S_\infty = \dfrac{18}{1 - 0{,}9} = 180$

12 Identifica las progresiones aritméticas, las geométricas y las que no son progresiones. Obtén el término general de cada una:

a) $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots$

b) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$

c) 0,2; 0,02; 0,002; …

d) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

e) 22; –11; 5,5; –2,75; …

f) 18, 13, 8, 3, …

a) Progresión aritmética, $d = \frac{1}{8}$. Término general: $a_n = 1 + (n-1)\frac{1}{8} = \frac{1}{7} + \frac{1}{8}n$.

b) No es progresión. Término general: $a_n = \sqrt{n}$

c) Progresión geométrica, $r = 0{,}1$.

Término general: $a_n = 0{,}2 \cdot (0{,}1)^{n-1}$

d) No es progresión.

Los numeradores 2, 3, 4, 5, … forman una progresión aritmética cuyo término general es $n + 1$.

Los denominadores 1, 2, 3, 4, … forman una progresión aritmética de término general n.

Término general de la sucesión: $a_n = \frac{n+1}{n}$

e) Progresión geométrica, $r = -0{,}5$; $a_n = 22 \cdot (-0{,}5)^{n-1}$

f) Progresión aritmética, $d = -5$; $a_n = 18 + (n-1) \cdot (-5) = 23 - 5n$

Resuelve problemas básicos

13 Halla la diferencia de una progresión aritmética en la que $a_1 = 12$ y $a_{10} = -6$. Calcula la suma de los 25 primeros términos.

$a_1 = 12$ $\qquad$ $a_{10} = -6$

$a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$; $a_4 = a_3 + d = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d \to$

$\to a_{10} = a_1 + 9d = 12 + 9d \to -6 = 12 + 9d \to -18 = 9d \to d = -\frac{18}{9} \to d = -2$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$a_{25} = a_1 + 24d = 12 + 24(-2) = 12 - 48 = -36$

$$S_{25} = \frac{(12 - 36) \cdot 25}{2} = -300$$

14 De una progresión aritmética, conocemos $a_{20} = 92$ y la suma de sus 20 primeros términos, que es 890. Calcula el primer término y la diferencia.

$a_{20} = 95$; $S_{20} = 890$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \to S_{20} = \frac{(a_1 + a_2) \cdot 20}{2} = 890 \to (a_1 + a_2) \cdot 10 = 890 \to$

$\to a_1 + a_2 = \frac{890}{10} \to a_1 = 89 - 92 \to a_1 = -3$

$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d \to 92 = -3 + 19d \to d = \frac{95}{19} = 5$

15 **Durante sus vacaciones, Alba gastó 75 € el primer día, y cada uno de los siguientes, 5 € menos que el anterior. Si el dinero le duró 15 días, ¿cuánto dinero gastó en total?**

Primer día 75 €.

$d = -5$

$a_{15} = 75 + 14 \cdot d = 75 + 14 \cdot (-5) = 5$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(75 + 5) \cdot 15}{2} = 600 \text{ €}$$

En total gasto 600 €.

16 **Un bebé ha ido ganando aproximadamente un 20 % de peso cada mes. Si nació con 2 850 g, ¿cuánto pesa al final del sexto mes?**

$a_1 = 2\,850;\ \ r = 1{,}2$

$a_2 = a_1 \cdot 1{,}2$

$a_3 = a_2 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2^2$

$a_4 = a_3 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = a_1 \cdot 1{,}2^3$

$\vdots$

$a_6 = a_1 \cdot 1{,}2^5 = 2\,850 \cdot 1{,}2^5 = 7\,091{,}7 \text{ g} \;\rightarrow\; 7{,}1 \text{ kg}$

$a_7 = a_1 \cdot 1{,}2^6 = 2\,850 \cdot 1{,}2^6 \approx 8\,510{,}05 \text{ g} \;\rightarrow\; 8{,}51 \text{ kg}$

Página 80

17 Eva se entrena durante 10 días para una carrera. El primer día corrió 30 min, y cada siguiente día, 15 min más que el día anterior. Le cuenta a un amigo que el último día corrió casi 3 h. ¿Es verdad? ¿Cuánto tiempo corrió durante todo el entrenamiento?

$n = 10;\ a_1 = 30;\ d = 15$

$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = 30 + 9 \cdot 15 = 165$ min $\to$ 2 h y 45 min

Luego no corrió 3 h = 180 min

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(30 + 165) \cdot 10}{2} = 975 \text{ min} \to 16 \text{ h y } 15 \text{ min}$$

18 Tomás se ha comprado un coche por 16 000 €. Sabiendo que los coches pierden aproximadamente un 15 % de su valor cada año, ¿cuál será el precio del coche después de 4 años?

$a_1 = 16\,000$

Pierde $0{,}15 \to 1 - 0{,}5 = 0{,}85 \to r = 0{,}85$

$n = 5$

$a_5 = a_1 \cdot r^{n-1} \to a_5 = 16\,000 \cdot (0{,}85)^4 \to a_5 = 8\,352{,}1$ €

19 Sofía dice que una progresión aritmética de diferencia 2,5 cuyos primer y último término son 7 y 52, respectivamente, tiene 19 términos. Si Ramón dice que tiene 20, ¿quién tiene razón?

$d = 2{,}5;\ a_1 = 7;\ a_n = 52$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \to 52 = 7 + (n - 1) \cdot 2{,}5 \to 45 = (n - 1) \cdot 2{,}5 \to \frac{45}{2{,}5} = n - 1 \to$$

$\to 18 = n - 1 \to n = 19$

Comprobación $a_{19} = 7 + 18 \cdot 2{,}5 = 52 \to$ Tiene razón Sofía.

20 En un teatro, la segunda fila está a 4,2 m del escenario, y la octava, a 8,7 m. ¿En qué fila está una persona si su distancia al escenario es 14,7 m?

$a_2 = 4{,}2;\ a_8 = 8{,}7;\ a_k = 14{,}7;\ a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$\left.\begin{array}{l} a_8 = a_1 + 7d = 8{,}7 \\ a_2 = a_1 + d = 4{,}2 \end{array}\right\} \to 6d = 4{,}5 \to d = 0{,}75 \to a_1 = 3{,}45$$

$\downarrow$

Restando

$14{,}7 = a_1 + (k - 1) \cdot d \to 14{,}7 = 3{,}45 + (k - 1) \cdot 0{,}75 \to k - 1 = 15 \to$

$\to k = 16 \to$ Está en la fila 16.

21 En una progresión geométrica, el primer término es 4. ¿Cuál debe ser la razón para que la suma de sus infinitos términos sea 5?

$a_1 = 4;\ S_\infty = 5$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \to 5 = \frac{4}{1 - r} \to 5 \cdot (1 - r) = 4 \to 5 - 5r = 4 \to -5r = -1 \to r = \frac{1}{5}$$

22 **La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5 mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos tiene que tomar el enfermo durante todo el tratamiento?**

$a_{12} = a_1 + 11d \rightarrow a_{12} = 100 + 11 \cdot (-5) = 45$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = \frac{(100 + 45) \cdot 12}{2} = 870 \text{ mg}$$

23 **En una progresión geométrica se conocen $a_1 = 64$ y $r = 0{,}75$.**

a) Calcula el primer término no entero.

b) Ayudándote de la calculadora, di cuál es el primer término menor que 1.

a) $a_1 = 64 = 2^6$; $d = 0{,}75 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2^2}$

El primer término no entero es $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 2^6 \cdot 2^6 \cdot \left(\dfrac{3}{2^2}\right)^4 = \dfrac{2^6 \cdot 3^4}{2^8} = \dfrac{3^4}{2^2} = \dfrac{81}{4} = 20{,}25$

b) $a_{15} = 64 \cdot 0{,}75^{14} = 1{,}14$; $a_{16} = 64 \cdot 0{,}75^{15} = 0{,}855$

El primer término menor que 1 es $a_{16} = 0{,}855$.

24 **La suma de diez múltiplos de 3 consecutivos es 255. ¿Cuál es el primero y el último de los múltiplos sumados?**

Los múltiplos de 3 forman una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.

$$255 = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a_1 + a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = (2a_1 + 27) \cdot 5 = 10a_1 + 135 \rightarrow a_1 = 12$$

$a_{10} = 12 + 3 \cdot 9 = 39$

25 **Las edades de 4 hermanas están en progresión aritmética y suman 34 años. La mayor tiene 13 años. ¿Cuál es la edad de cada una?**

$$S_4 = 34;\ a_4 = 13;\ S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} \rightarrow 34 = \frac{(a_1 + 13) \cdot 4}{2} \rightarrow a_1 = 4$$

$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 13 = 4 + 3d \rightarrow d = 3$

Por tanto, las edades son: 4, 7, 10 y 13 años.

26 **Calcula la suma de todos los múltiplos de 5 que tienen dos cifras.**

$a_1 = 10$; $a_n = 95$; $d = 5$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow 95 = 10 + (n - 1) \cdot 5 \rightarrow 85 = 5n - 5 \rightarrow 90 = 5n \rightarrow$

$\rightarrow n = \dfrac{90}{5} \rightarrow n = 18$

$$S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} = \frac{(10 + 95) \cdot 18}{2} = 945$$

27 **Halla el primer término y la razón de una progresión geométrica en la que $a_4 = 3\sqrt{6}$ y $a_2 = \sqrt{6}$.**

$a_4 = 3\sqrt{6}$; $a_2 = \sqrt{6}$

$a_4 = a_2 \cdot r^2 \rightarrow 3\sqrt{6} = \sqrt{6} \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 3 \rightarrow r = \pm\sqrt{3}$

- Si $r = \sqrt{3} \rightarrow a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{3}a_1 \rightarrow a_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \rightarrow a_1 = \sqrt{2}$

- Si $r = -\sqrt{3} \rightarrow a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow \sqrt{6} = -\sqrt{3}a_1 \rightarrow a_1 = \dfrac{\sqrt{6}}{-\sqrt{3}} \rightarrow a_1 = -\sqrt{2}$

28 **Halla el término general de una progresión aritmética de la que se conocen $a_3 = 13$ y $a_7 = 31$.**

$a_3 = 13$; $a_7 = 31$

$a_7 = a_3 + 4 \cdot d \rightarrow 31 = 13 + 4 \cdot d \rightarrow 18 = 4 \cdot d \rightarrow d = \dfrac{18}{4} \rightarrow d = 4{,}5$

$a_3 = a_1 + 2 \cdot d \rightarrow 13 = a_1 + 2 \cdot (4{,}5) \rightarrow 13 = a_1 + 9 \rightarrow a_1 = 4$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 4 + (n-1) \cdot 4{,}5$

29 **La suma de 6 números impares consecutivos es 108. ¿Cuáles son esos números?**

$n = 6$; $S_6 = 108$

Son impares consecutivos $\rightarrow d = 2$.

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} = 108 \rightarrow 108 = 3 \cdot (a_1 + a_6)$

$a_6 = a_1 + 5 \cdot d \rightarrow a_6 = a_1 + 5 \cdot 2 \rightarrow a_6 = a_1 + 10$

$108 = 3 \cdot (a_1 + a_1 + 10) \rightarrow 108 = 6a_1 + 30 \rightarrow 6a_1 = 78 \rightarrow a_1 = \dfrac{78}{6} \rightarrow a_1 = 13$

Los números son: 13, 15, 17, 19, 21, 23.

30 **Calcula la fracción generatriz de los siguientes decimales utilizando progresiones:**

a) $1,\widehat{8}$ **b)** $0,3\widehat{6}$ **c)** $0,\widehat{12}$ **d)** $4,2\widehat{3}$

a) $1,\widehat{8} = 1 + 0,8 + 0,08 + 0,008 + \ldots = 1 + \left(\dfrac{8}{10} + \dfrac{8}{100} + \dfrac{8}{1\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\dfrac{8}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{\dfrac{8}{10}}{\dfrac{9}{10}} = \frac{8}{9}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$$

b) $0,3\widehat{6} = 0,3 + 0,06 + 0,006 + \ldots = 0,3 + \left(\dfrac{6}{100} + \dfrac{6}{1\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\dfrac{6}{100}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{\dfrac{6}{100}}{\dfrac{9}{10}} = \frac{6}{90} = \frac{2}{30}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{3}{10} + \frac{2}{30} = \frac{11}{30}$$

c) $0,\widehat{12} = 0 + 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \ldots = \left(\dfrac{12}{100} + \dfrac{12}{10\,000} + \dfrac{12}{1\,000\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\dfrac{12}{100}}{1 - \dfrac{1}{100}} = \frac{\dfrac{12}{100}}{\dfrac{99}{100}} = \frac{12}{99}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

d) $4,2\widehat{3} = 4 + 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \ldots = 4 + \dfrac{2}{10} + \left(\dfrac{3}{100} + \dfrac{3}{1\,000} + \dfrac{3}{10\,000} + \ldots\right)$

$$S_\infty = \frac{\dfrac{3}{100}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{\dfrac{3}{100}}{\dfrac{9}{10}} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

Luego la fracción que buscamos es:

$$\frac{42}{10} + \frac{1}{30} = \frac{127}{30}$$

31 **Se deja caer una pelota desde una altura de 18 m y en cada rebote pierde 2/5 de la altura anterior. ¿Qué altura alcanzará después de tocar el suelo por tercera vez? Calcula la suma del espacio recorrido hasta que se para.**

$a_1 = 18$

Pierde $\frac{2}{5} \rightarrow r = \frac{2}{5}$

$a_4 = a_1 \cdot r^{(4-1)} \rightarrow a_4 = 18 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \rightarrow a_4 = 1{,}152$ m de altura

Como la pelota, en cada bote, sube y baja desde la misma altura, y teniendo en cuenta que la primera vez no sube porque cae desde 18 m, la suma será $2S_\infty - 18$.

Entonces el espacio que recorre es:

$$S_\infty = \frac{18}{1-\frac{2}{5}} = 30 \rightarrow 2 \cdot 30 - 18 = 42$$

La pelota recorre 42 m hasta que se para.

32 **¿A cuál de las siguientes sucesiones pertenecen los números 531, 27 y 1 201?**

a) **7, 13, 19, 25, …** **b)** $4n + 3$ **c)** $n^2 + 2$

531, 27 y 1 201

a) $a_n = 7 + (n-1) \cdot 6$

$531 = 7 + (n-1) \cdot 6 \rightarrow 524 = 6n - 6 \rightarrow 6n = 530 \rightarrow n = 88,\widehat{3} \rightarrow$ 531 no pertenece a esta sucesión.

$27 = 7 + (n-1) \cdot 6 \rightarrow 20 = 6n - 6 \rightarrow 6n = 26 \rightarrow n = 4,\widehat{3} \rightarrow$ 27 no pertenece a esta sucesión.

$1\,201 = 7 + (n-1) \cdot 6 \rightarrow 1\,194 = 6n - 6 \rightarrow 6n = 1\,200 \rightarrow n = 200 \rightarrow$ 1 201 sí pertenece a esta sucesión.

b) $4n + 3 = 531 \rightarrow 4n = 528 \rightarrow n = 132 \rightarrow$ 315 pertenece a esta sucesión.

$4n + 3 = 27 \rightarrow 4n = 24 \rightarrow n = 6 \rightarrow$ 27 pertenece a esta sucesión.

$4n + 3 = 1\,201 \rightarrow 4n = 1\,198 \rightarrow n = 299{,}5 \rightarrow$ 1 201 no pertenece a esta sucesión.

c) $n^2 + 2 = 531 \rightarrow n^2 = 529 \rightarrow n = 23 \rightarrow$ 531 sí pertenece a esta sucesión.

$n^2 + 2 = 27 \rightarrow n^2 = 25 \rightarrow n = 5 \rightarrow$ 27 sí pertenece a esta sucesión.

$n^2 + 2 = 1\,201 \rightarrow n^2 = 1\,199 \rightarrow n = 34{,}6 \rightarrow$ 1 201 no pertenece a esta sucesión.

33 **En una progresión aritmética conocemos dos términos, $a_2 = -23$ y $a_{12} = 32$.**

a) Calcula el término general.

b) ¿Qué número corresponde al término a_{87}?

c) ¿Qué lugar ocupa el número 87?

$a_2 = -23$; $a_{12} = 32$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 = a_1 + (2-1)\cdot d &\rightarrow -23 = a_1 + d \\ a_{12} = a_1 + (12-1)\cdot d &\rightarrow 32 = a_1 + 11d \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_2 = -d - 23 \\ &32 = -d - 23 + 11d \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_1 = -d - 23 \\ &10d = 55 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_1 = -d - 23 \\ &d = 55/10 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_1 = -11/2 - 23 \\ &d = 11/2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_1 = -57/2 \\ &d = 11/2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_1 = 28{,}5 \\ &d = 5{,}5 \end{aligned}\right\}$$

a) $a_n = -28{,}5 + (n-1) \cdot 5{,}5$

b) $a_{87} = -28{,}5 + (87-1) \cdot 5{,}5 \rightarrow a_{87} = 444{,}5$

c) $87 = -28{,}5 + (n-1) \cdot 5{,}5 \rightarrow 115{,}5 = 5{,}5 \cdot n - 5{,}5 \rightarrow 121 = 5{,}5n \rightarrow n = 22$

34 **Una empresa ofrece a una trabajadora un sueldo mensual de 1 200 € y una subida de 100 € mensuales cada año. Otra le ofrece el mismo sueldo con una subida del 10 % anual. Comprueba cuál de las dos ofertas es mejor comparando el sueldo dentro de 10 años.**

Empresa A $\rightarrow a_1 = 1\,200$; $d = 100$

$a_n = 1\,200 + (n-1) \cdot 100$

$a_{10} = 1\,200 + 9 \cdot 100 \rightarrow a_{10} = 2\,100$ €

Empresa B $\rightarrow a_1 = 1\,200$; $r = 1{,}1$

$a_n = 1\,200 \cdot (1{,}1)^{n-1}$

$a_{10} = 1\,200 \cdot (1{,}1)^9 \rightarrow a_{10} = 2\,829{,}5$ €

Luego la empresa B ofrece mejor sueldo.

35 **Depositamos 6 000 €, al 5 % anual, al comienzo de un cierto año. Averigua el capital disponible al final de cada año, durante 6 años.**

$a_1 = 6000$; $r = 1{,}05$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_2 = 6000 \cdot (1{,}05)^{2-1} = a_2 = 6\,300$

$a_3 = 6000 \cdot (1{,}05)^{3-1} = a_3 = 6\,615$

$a_4 = 6000 \cdot (1{,}05)^{4-1} = a_4 = 6\,945{,}75$

$a_5 = 6000 \cdot (1{,}05)^{5-1} = a_5 = 7\,293{,}04$

$a_6 = 6000 \cdot (1{,}05)^{6-1} = a_6 = 7\,657{,}7$

36 La población de una ciudad aumenta por término medio un 1,5 % anual. Si en la actualidad hay 3 millones de habitantes, ¿cuántos tendrá dentro de 10 años? Da el resultado con dos cifras significativas y estima el error absoluto cometido.

$a_1 = 3\,000\,000$; $r = 1{,}015$

$a_n = a_1 \cdot (r)^{n-1}$

$a_{10} = 3\,000\,000 \cdot (1{,}015)^9 \rightarrow a_{10} = 3\,430\,169{,}9 \rightarrow 34 \cdot 10^6$ habitantes.

El error absoluto cometido al dar el resultado con 2 cifras significativas es menor de $0{,}05 \cdot 10^6 \rightarrow 5 \cdot 10^4$ habitantes.

37 La maquinaria de una fábrica pierde cada año el 20 % de su valor. Sabiendo que en el momento de su compra valía 40 000 €:

a) ¿Cuánto valía un año después de comprarla? ¿Y dos años después?

b) ¿En cuánto se valorará 10 años después de haberla adquirido?

$a_1 = 40\,000$

Pierde el 20 % $\rightarrow 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = r$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

a) $a_2 = a_1 \cdot (0{,}8) \rightarrow a_2 = 40\,000 \cdot 0{,}8 = 32\,000$ € $\rightarrow$ Un año después.

$a_3 = a_1 \cdot (0{,}8)^2 \rightarrow a_3 = 25\,600$ € $\rightarrow$ Dos años después.

b) $a_{11} = 40\,000 \cdot (0{,}8)^{10} \rightarrow a_{11} \approx 4\,294{,}97$ €.

Página 81

Resuelve: un poco más difícil

38 **Al inicio de cada año, durante 8 años, ingresamos en una cuenta de ahorro 2 000 € a un interés del 3,5 % anual.**

a) ¿En cuánto se convierte el primer ingreso al cabo de 8 años?

b) ¿Y el segundo al cabo de 7 años?

c) Si sigues razonando así, obtendrás una progresión geométrica cuya suma es el capital que tendrás al final del octavo año. Calcula ese capital.

$C_I = 2\,000; \; r = 1{,}035$

Al final del año $n \rightarrow a_n = 2000 \cdot (1{,}035)^n$

a) $a_8 = 2\,000 \cdot (1{,}035)^8 = 2\,633{,}62$ €

b) $a_7 = 2\,000 \cdot (1{,}035)^7 = 2\,544{,}56$ €

c) $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}; \; r = 1{,}035; \; a_1 = 2\,000 \cdot 1{,}035$

$$S_8 = \frac{2\,070 \cdot ((1{,}035)^8 - 1)}{(1{,}035 - 1)} = 18\,736{,}9 \text{ €}$$

39 **Dos términos consecutivos de una progresión geométrica son 3 y 2. Averigua qué lugar ocupan sabiendo que $a_1 = 81/8$.**

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

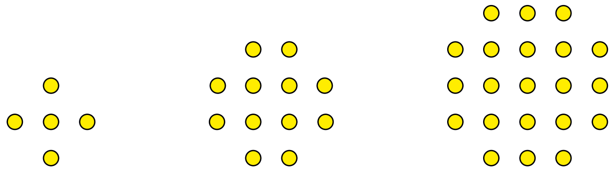
$$\left.\begin{array}{l} a_k = \dfrac{81}{8} \cdot r^{k-1} = 3 \\ a_{k+1} = \dfrac{81}{8} \cdot r^k = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{81}{8} \cdot r^{k-1} = 3 \\ 81 \cdot r^k = 16 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{81}{8} \cdot r^{k-1} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{81}{8} \cdot \left(\dfrac{16}{81}\right) \cdot r^{-1} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \cdot r^{-1} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{r} = 3 \\ r^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^k = \dfrac{16}{81} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{2}{3} \\ k = 4 \end{array}\right\}$$

$$a_4 = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{81}{8} \cdot \frac{8}{27} = 3$$

$$a_5 = \frac{81}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 2$$

40 **¿Cuántos puntos tendrá la décima figura de esta serie? Averigua cuál es su término general.**



¿En qué posición estará la figura con 837 puntos?

$a_1 = 5;\ a_2 = 12;\ a_3 = 21$

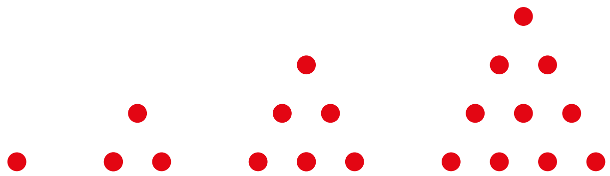
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1^2 + 4 \cdot 1 \\ a_2 = 2^2 + 4 \cdot 2 \\ a_3 = 3^2 + 4 \cdot 3 \end{array}\right\} \rightarrow a_n = n^2 + 4n$$

$a_{10} = (10)^2 + 4 \cdot 10 = 140$ puntos.

$$837 = n^2 + 4n \rightarrow n^2 + 4n - 837 = 0 \rightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 3\,348}}{2} \rightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{3\,364}}{2} \rightarrow$$

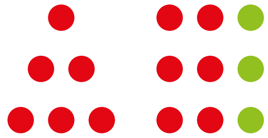
$$\rightarrow n = \frac{-4 \pm 58}{2} \begin{cases} n = 27 \\ n = -31 \rightarrow \text{No puede ser} \end{cases}$$

41 **¿Cuántos puntos tendrá la siguiente figura? ¿Y la décima? Halla cuántos tendrá la figura *n*-ésima.**



a) Comprueba que, sumando dos términos consecutivos, siempre obtienes un cuadrado perfecto.

b) Observa la tercera figura. Si con esos 6 puntos queremos formar un cuadrado nos faltan 3 puntos.



Probamos con otros triángulos y encontramos uno al que también le faltan 3 puntos para formar un cuadrado. ¿Cuántos puntos tiene ese cuadrado?

$a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 6;\ a_4 = 10$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{6}{2} = \dfrac{2^2+2}{2} \\[2ex] 6 = \dfrac{12}{2} = \dfrac{3^2+3}{2} \\[2ex] 10 = \dfrac{20}{2} = \dfrac{4^2+4}{2} \end{array}\right\} \to a_n = \frac{n^2+n}{2}$$

$$a_5 = \frac{(5)^2+5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$a_{10} = \frac{(10)^2+10}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

a) $a_1 + a_2 = 4 = 2^2;\ a_2 + a_3 = 9 = 3^2;\ a_3 + a_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2$

$$a_n + a_{n+1} = \left(\frac{n^2+n}{2}\right) + \left(\frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}\right) = \frac{n^2+n+n^2+2n+1+n+1}{2} =$$

$$= \frac{2n^2+4n+2}{2} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

b) Cuadrados perfectos: 16, 25, 36, 49, 64, 81

- $16 - 3 = 13 \rightarrow 13 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 26 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 104}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{105}}{2} \rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $25 - 3 = 22 \rightarrow 22 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 44 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 176}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{177}}{2} \rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $36 - 3 = 33 \rightarrow 33 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 66 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 264}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $49 - 3 = 46 \rightarrow 46 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 92 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 368}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $64 - 3 = 61 \rightarrow 61 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 122 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 488}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow$ No vale, no es exacto.

- $81 - 3 = 78 \rightarrow 78 = \dfrac{n^2 + n}{2} \rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \rightarrow n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow n = \dfrac{-1 \pm 25}{2} \left\langle \begin{array}{l} 12 \\ -13 \rightarrow \text{No vale} \end{array} \right.$

$n = 12 \rightarrow$ El triángulo que va en la posición 12 y tiene 78 puntos.

El cuadrado tiene 81 puntos.

42 **Observa los cuadrados que hay en esta figura. Se han obtenido uniendo los puntos medios de dos lados contiguos.**

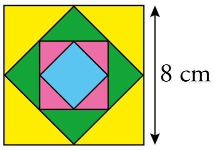
a) Halla las áreas de los seis primeros cuadrados de esa sucesión. ¿Cuál será su término general?

b) Calcula la suma de las áreas de los infinitos cuadrados generados de esa forma.

c) Escribe la sucesión de las longitudes de sus lados.

Área cuadrado = l^2

a)



El área de los sucesivos cuadrados es la mitad de la del anterior. Luego:

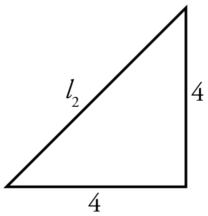
- $c_1 = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$; $c_2 = 32 \text{ cm}^2$; $c_3 = 16 \text{ cm}^2$; $c_4 = 8 \text{ cm}^2$; $c_5 = 4 \text{ cm}^2$; $c_6 = 2 \text{ cm}^2 \rightarrow$

  $\rightarrow$ Término general: $c_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

b) $S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{64}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \text{ cm}^2$

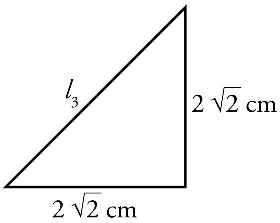
c) $l_1 = 8$ cm

- Calculamos l_2:



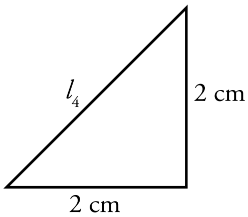
$\rightarrow l_2 = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ cm

- Calculamos l_3:



$\rightarrow l_3 = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 8} = \sqrt{16} = 4$ cm

- Calculamos l_4:



$\rightarrow l_4 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ cm

- Término general: $l_n = \dfrac{l_n - 1}{2} \cdot \sqrt{2}$; $l_1 = 8$ cm

43 **Comprueba que en cualquier progresión aritmética se verifica que $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$.**

$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = a_1 + (n-2) \cdot d \\ a_{n+1} = a_1 + (n) \cdot d \end{array}\right\rangle a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_1 + d \cdot (n-2+n) \rightarrow$

$\rightarrow a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_1 + 2d \cdot (n-1) \rightarrow a_{n-1} + a_{n+1} = 2(a_1 + d \cdot (n-1)) \rightarrow$

$\rightarrow a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

44 **Demuestra que la suma de los n primeros números pares es $n^2 + n$.**

$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = S_n$

$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_n = \dfrac{(2 + 2n) \cdot n}{2} \rightarrow S_n = \dfrac{2(1+n) \cdot n}{2} \rightarrow S_n = n + n^2$

45 **Demuestra que en cualquier progresión geométrica se cumple que $(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.**

$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$; $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = a_1 \cdot r^{(n-1-1)} \\ a_{n+1} = a_1 \cdot (r^n) \end{array}\right\rangle a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot r^{n-2} \cdot a_1 \cdot r^n \rightarrow a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1^2 \cdot r^{2n-2} \rightarrow$

$\rightarrow a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_1^2 \cdot r^{2(n-1)} \rightarrow a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_1 \cdot r^{n-1})^2 \rightarrow a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (a_n)^2$

Reflexiona

46 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) La diferencia en las progresiones aritméticas es siempre un número negativo.

b) No se puede hallar la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica creciente.

c) La sucesión 3, 3, 3, 3, … no es una progresión.

d) Si sumamos término a término dos progresiones aritméticas, se obtiene otra progresión aritmética.

e) En todas las progresiones aritméticas se verifica que $a_2 + a_{13} = a_{15}$.

f) Si en una progresión aritmética $a_5 + a_{17} = 32$, podemos saber cuánto vale a_{11}.

a) Falso, puede ser positivo o negativo.

b) Verdadero, porque es una progresión geométrica creciente ha de ser $r > 1$.

c) Falso. Es una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 0$, o una progresión geométrica de primer término $a_1 = 3$ y razón $r = 1$.

d) Verdadero. Se obtiene una progresión aritmética de primer término la suma de los primeros términos y de diferencia, la suma de las diferencias.

$a_n = a_1 + (n-1)d_1$; $b_n = b_1 + (n-1)d_2$; $a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1)(d_1 + d_2)$

e) Verdadero. $a_2 + a_{13} = a_1 + 14d = a_{15}$

f) Verdadero. $a_5 + a_{17} = 2a_1 + 20d = 32 \rightarrow a_1 + 10d = a_{11} = 16$

47 **Razona y elige la respuesta correcta.**

a) Una sucesión es creciente cuando:

i) $a_n > a_{n+1}$ **ii)** $a_n < a_{n+1}$ **iii)** $a_n > 0$

b) Si una progresión aritmética es creciente, su diferencia es:

i) $-1 < d < 1$ **ii) Mayor que 1** **iii) Positiva**

c) En una progresión geométrica con $-1 < r < 0$**, ¿cuándo se puede hallar la suma de todos sus términos?**

i) Siempre **ii) Si** $a_1 > 0$ **iii) Nunca**

d) El número de términos de la progresión 6, 11, 16, 21, …, 126, es:

i) 20 **ii) 15** **iii) 25**

a) Una sucesión creciente es aquella en la que un término es menor que el siguiente. La respuesta correcta es la ii).

b) Los términos de una progresión aritmética se calculan sumando al término anterior una cantidad fija d luego, siempre que esa cantidad d sea positiva la progresión es creciente.

La respuesta correcta es la iii).

c) Siempre que la razón r de una progresión geométrica verifique $0 < |r| < 1$, se puede calcular la suma de todos sus términos.

La respuesta correcta es la i).

d) 6, 11, 16, 21, …, 126

$a_1 = 6$

$d = 5$

$a_n = 126 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow 126 = 6 + (n-1) \cdot 5 \rightarrow 120 = (n-1) \cdot 5 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{120}{5} = (n-1) \rightarrow 24 = n - 1 \rightarrow n = 25$

La respuesta correcta es la iii).

Página 82

Lee, reflexiona y deduce

Las matemáticas son pura lógica y siempre exactas. Sin embargo, a veces parece que llegan a contradicciones. Observa, por ejemplo, esta suma de infinitos sumandos:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Podemos interpretarla de dos formas:

$$\left.\begin{array}{l} S = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0 \\ S = 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1+0+0+\dots = 1 \end{array}\right\} \text{ ¡SORPRESA!}$$

Y por si te parece poco lío, podemos todavía enredarlo más:

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = S$$

Es decir, $1 - S = S$. Por tanto, $S = \frac{1}{2}$ ¡SUPERSORPRESA!

- **¿Dónde está la trampa? ¿Será que al tomar infinitos sumandos se pierde el camino de la lógica? ¿Tú qué opinas?**

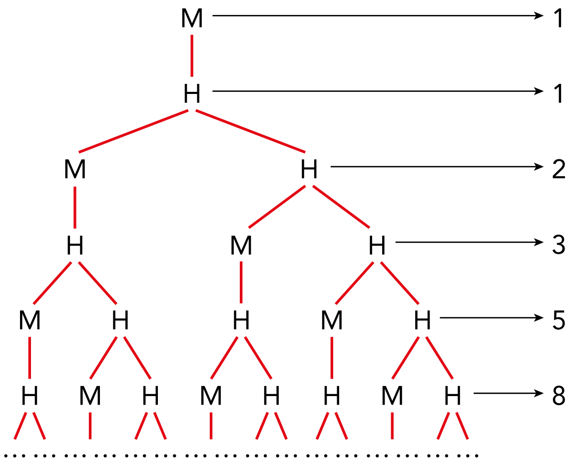
  Si vamos sumando término a término, los resultados son 1, 0, 1, 0, 1, 0, … Esta suman, si la llevamos al infinito, no llega a ningún sitio fijo, siempre va alternando entre 1 y 0. Efectivamente, al tomar infinitos sumandos se pierde el camino de la lógica.

Lee y comprende

Las abejas macho nacen de huevos no fertilizados; es decir, tienen madre pero no padre.

Las abejas hembra nacen de huevos fertilizados.

El esquema de la derecha nos permite observar el número de antepasados de una abeja macho en las distintas generaciones:



- **¿Cuántos antecesores tiene una abeja macho en la décima generación de antepasados?**

  El número de antepasados en cada una de las diez primeras generaciones es:

  $$1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - 55 - 9$$

- **¿Cuál es la ley de formación de la sucesión obtenida: 1, 1, 2, 3, 5, …?**

  Ley de formación: Cada término se obtiene sumando los dos que le preceden:

  $$a_1 = 1;\ \ a_2 = 2;\ \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

- **¿Recuerdas cómo se llama esta sucesión?**

  Sucesión de Fibonacci.

Página 83

Entrénate resolviendo problemas

- **Las personas que participan en un desfile pueden agruparse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25, pero no pueden hacerlo ni de 4 en 4 ni de 9 en 9.**

  ¿Cuántas personas participan si sabemos que son entre 1 000 y 1 250?

El número de participantes es un múltiplo de $3 \cdot 25 = 75$ (ten en cuenta que 25 es múltiplo de 5).

Los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 000 y 1 250 son:

1 050   1 125   1 200

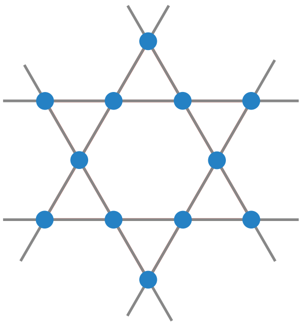
1 050 no es múltiplo ni de 4 ni de 9.

1 125 es múltiplo de 9.

1 200 es múltiplo de 4.

Por tanto, el número de participantes es de 1 050.

- **Sitúa 12 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 6 filas de 4 soldados.**



- **a) ¿Cuántas de estas monedas hemos de tocar para que las tres caras estén a la izquierda y las tres cruces a la derecha?**

  b) ¿Cuántas de estas copas hemos de tocar para que queden tres llenas a la izquierda y tres vacías a la derecha?

a) Da la vuelta a las monedas que están en las posiciones segunda y quinta.

b) Toma la quinta copa y vierte su contenido en la segunda.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Escribe el término general de cada sucesión:**

a) 3; 0,6; 0,12; 0,024; … **b) 1,2; 2,3; 3,4; 4,5; …**

a) $a_n = 3 \cdot 0{,}2^{n-1}$ b) $a_n = 0{,}1 + 1{,}1n$

2 **Define por recurrencia la sucesión 8, 14, 6, –8, … y escribe los tres términos siguientes.**

$a_1 = 8;\ a_2 = 14 \rightarrow a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

Tres términos siguientes: –14, –6, 8, …

3 **Calcula la suma de los diez primeros términos de las siguientes progresiones:**

a) 9; 6,5; 4; 1,5; … **b) 2, –4, 8, –16, …**

a) Progresión aritmética de primer término 9 y diferencia $d = -2{,}5$.

$$a_{10} = 9 - (9 \cdot 2{,}5) = -13{,}5;\quad S_{10} = \frac{(9-13{,}5)\cdot 10}{2} = -22{,}5$$

b) Progresión geométrica de primer término 2 y razón $r = -2$.

$$S_{10} = \frac{2\cdot[(-2)^{10}-1]}{-3} = -682$$

4 **En una progresión aritmética conocemos $a_5 = 22$ y $a_9 = 38$. Calcula a_{25} y el lugar que ocupa un término cuyo valor es 58.**

$a_9 = a_5 + 4d \rightarrow 38 = 22 + 4d \rightarrow d = 4$

$22 = a_1 + 4 \cdot 4 \rightarrow a_1 = 6$

$a_{25} = 6 + 24 \cdot 4 = 102$

$58 = 6 + (n-1) \cdot 4 \rightarrow n = 14$

5 **La suma de los 20 primeros términos de una progresión aritmética es 200 y $a_1 = 0{,}5$. Halla a_{20} y la diferencia.**

$$\left.\begin{array}{l} S_{20} = 200 \\ a_1 = 0{,}5 \\ S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \end{array}\right\} \rightarrow 200 = \frac{(0{,}5 + a_{20})\cdot 20}{2} \rightarrow 200 = 5 + 10 \cdot a_{20} \rightarrow 100 \cdot a_n = 195 \rightarrow$$

$\rightarrow a_n = 19{,}5$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow 19{,}5 = 0{,}5 + 19 \cdot d \rightarrow 19 = 19d \rightarrow d = 1$

6 Un móvil recorre 5 m/s y aumenta su velocidad de forma que cada segundo avanza 2 m más que en el segundo anterior. ¿Cuánto recorrerá en un minuto?

$a_1 = 5$; $d = 2$; 1 minuto $\to$ 60 segundos

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \to a_{60} = 5 + (60-1) \cdot 2 \to a_{60} = 123$

Calculamos los metros que recorre en 1 minuto:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{60} = \frac{(5+123) \cdot 60}{2} = 3\,840 \text{ metros en 1 minuto.}$$

7 Una empresa ofrece a un empleado un sueldo de 15 000 € anuales y una subida de 500 € cada año siguiente. Otra empresa le ofrece el mismo sueldo con una subida del 5 % anual. Razona cuál de las dos es mejor comparando el sueldo dentro de 5 años.

En el primer caso tenemos una progresión aritmética:

$a_1 = 15\,000$; $d = 500 \to a_5 = 15\,000 + 4 \cdot 500 = 17\,000$ €

En el segundo caso tenemos una progresión geométrica:

$a_1 = 15\,000$; $r = 1{,}05 \to a_5 = 15\,000 \cdot 1{,}05^4 = 18\,232{,}59$ €

Es mejor la segunda oferta.

8 Para rodar un anuncio, se ha contratado a un gran número de personas que deben colocarse en 51 filas. Cada fila tiene dos personas más que la anterior y en la fila 26 tiene que haber 57 personas. Averigua cuántas personas hay en la primera fila, cuántas en la última y el número total de personas que intervienen en el anuncio.

Es una progresión aritmética de la que sabemos $n = 51$, $d = 2$ y $a_{26} = 57$.

$a_{26} = a_1 + 25d \to 57 = a_1 + 25 \cdot 2 \to a_1 = 7$

$a_{51} = a_1 + 50d \to a_{51} = 7 + 50 \cdot 2 = 107$

$$S_{51} = \frac{7+107}{2} \cdot 51 = 2\,907 \text{ personas en total.}$$

9 En una progresión geométrica de razón 1/2, el cuarto término es igual a 1.

a) Halla el primer término.

b) Calcula la suma de los infinitos términos.

$r = \frac{1}{2}$; $a_4 = 1$

a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \to a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \to 1 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \to a_1 = 8$

b) $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} \to S_\infty = \dfrac{8}{1-\frac{1}{2}} \to S_\infty = 16$

10 **¿Verdadero o falso?**

a) Si la diferencia de una progresión aritmética es menor que 0, la progresión es decreciente.

b) No puede haber una progresión geométrica que tenga todos los términos negativos.

c) Si multiplicamos, término a término, dos progresiones aritméticas, se obtiene una progresión geométrica.

d) La razón de una progresión geométrica puede ser un número menor que 0.

e) Si una progresión geométrica tiene razón negativa a partir de un determinado término, los siguientes son todos negativos.

a) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Si $d < 0 \rightarrow d = -k \rightarrow a_n = a_1 - (n - 1) \cdot k \rightarrow a_n < a_1 \rightarrow$ La progresión es decreciente $\rightarrow$ Verdadero.

b) Si el primer término de una progresión geométrica es negativo y la razón es positiva $\rightarrow$ $\rightarrow$ Todos los términos de la progresión son negativos $\rightarrow$ Falso.

c) Falso.

Contraejemplo:

Sea $a_n = 2, 4, 6, 8, \ldots \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = 2$.

Sea $b_n = 1, 4, 7, 10, \ldots \rightarrow$ Progresión aritmética con $d = 3$.

Entonces $a_n \cdot b_n = \underset{c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots}{2, 16, 42, 80, \ldots}$ vemos que no es una progresión geométrica ya que

$\left.\begin{array}{l} c_2 : c_1 = 16 : 2 = 8 \\ c_3 : c_2 = 42 : 16 \neq 8 \end{array}\right\rangle$ No es una progresión geométrica.

d) Verdadero.

Ejemplo: sean los términos $\dfrac{-25}{3}; 5; -3; \dfrac{9}{5}; \dfrac{-27}{25}$

Pertenecen a una progresión geométrica de razón $-\dfrac{3}{5} < 0$

e) Falso.

En la progresión del ejemplo anterior la razón es negativa y los términos van alternando el signo.

5 PROGRESIONES

Página 87

Resuelve

1 **¿Cuál de estas igualdades asocias al enunciado del montón de trigo que aparece en el papiro egipcio? ¿Cuántas *medidas* tiene ese *montón*?**

Ⅰ $\boxed{x - \frac{1}{3} - 5 = \frac{1}{2}}$ Ⅱ $\boxed{x - \frac{x}{3} - 5 = \frac{x}{2}}$ Ⅲ $\boxed{\frac{x}{3} + 5 = \frac{x}{2}}$

La igualdad II.

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 5 \rightarrow \frac{6x - 2x - 3x}{6} = 5 \rightarrow \frac{x}{6} = 5 \rightarrow x = 30$$

El montón tiene 30 medidas.

2 **Completa en tu cuaderno la igualdad que relaciona las áreas de las dos figuras geométricas que tienes en la página anterior: $a^2 - b^2 = \ldots$**

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

3 **Traduce a lenguaje algebraico (al estilo actual) el enunciado del problema de *la cosa*, descrito más arriba. Después, averigua el valor de dicha *cosa*. Si no sabes resolver la ecuación, halla la incógnita tanteando.**

$16x + 35 = 3x \cdot x \rightarrow 3x^2 - 16x - 35 = 0$

La cosa vale 7.

1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

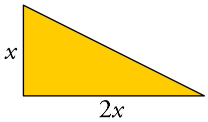
Página 88

1 **Describe mediante una expresión algebraica o una ecuación cada uno de los enunciados siguientes:**

a) El doble de un número menos su tercera parte.

b) El doble del resultado de sumarle tres unidades a un número.

c)



El área de este triángulo es 36 cm^2.

d) Gasté en un traje 3/5 de lo que tenía y 60 € en dos camisas. Me queda la mitad de lo que tenía.

a) $2x - \frac{1}{3}x$

b) $2(x + 3)$

c) $\frac{2x \cdot x}{2} = 36$

d) $x - \left(\frac{3}{5}x + 60\right) = \frac{1}{2}x$

2 MONOMIOS

Página 89

1 **¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes monomios?**

a) $-5xy^2z^3$ **b)** $11xy^2$ **c)** -12

a) Su grado es 6. b) Su grado es 3. c) Su grado es 0.

2 **Efectúa las siguientes sumas de monomios:**

a) $5x + 3x^2 - 11x + 8x - x^2 + 7x$ **b)** $6x^2y - 13x^2y + 3x^2y - x^2y$

c) $2x - 5x^2 + 3x + 11y + 2x^3$ **d)** $3yz^3 + y^3z - 2z^3y + 5zy^3$

a) $9x + 2x^2$ b) $-5x^2y$

c) $5x - 5x^2 + 2x^3 + 11y$ d) $yz^3 + 6y^3z$

3 **Efectúa los siguientes productos de monomios:**

a) $\left(\frac{2}{3}x^3\right) \cdot (-6x)$ **b)** $\left(\frac{2}{9}x^2\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}x^3\right)$

c) $(7xy^2) \cdot (2y)$ **d)** $(5xyz) \cdot (-3x^2z)$

a) $-4x^4$ b) $\frac{-2}{15}x^5$

c) $14xy^3$ d) $-15x^3yz^2$

4 **Simplifica cada uno de los siguientes cocientes. ¿Cuál de ellos es monomio?**

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2}$ **b)** $\frac{5x^4y^2}{3x^3y}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4}$

a) $\frac{5x^4y}{3xy^2} = \frac{5x^3}{3y}$ b) $\frac{5x^4y^2}{3x^3y} = \frac{5xy}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}x^2}{5x^4} = \frac{\sqrt{3}}{5x^2}$

3 POLINOMIOS

Página 90

1 **Simplifica, cuando sea posible, cada uno de estos polinomios e indica su grado:**

a) $x^6 - 3x^4 + 2x^2 + 3$

b) $5x^2 + x^4 - 3x^2 - 2x^4 + x^3$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x^3 + x + x^3 - 2$

d) $x - 1 + 3x^2 - 4$

e) $x + x^3 + x^5 - x^3$

a) Su grado es 6.

b) $-x^4 + x^3 + 2x^2$. Su grado es 4.

c) $3x^2 + x - 2$. Su grado es 2.

d) $3x^2 + x - 5$. Su grado es 2.

e) $x^5 + x$. Su grado es 5.

2 **Sean** $A = 5x^3 - 2x + 1$, $B = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$, $C = x^3 - 1$ **y** $D = x^4 - x^3 + x^2$.

Realiza las siguientes operaciones:

a) Colocándolos uno encima de otro:

i) $A + B$ **ii)** $A - B$ **iii)** $A + C$ **iv)** $C - D$

b) Agrupando los monomios semejantes:

i) $A + B - C$ **ii)** $A + B + C + D$ **iii)** $A - C + D$

a)

i)
$$\begin{array}{rrrrr}
 & 5x^3 & & -\,2x & +\,1 \\
x^4 & & -\,2x^2 & +\,2x & -\,2 \\
\hline
x^4 & +\,5x^3 & -\,2x^2 & & -\,1
\end{array}$$

ii)
$$\begin{array}{rrrrr}
 & 5x^3 & & -\,2x & +\,1 \\
-\,x^4 & & +\,2x^2 & -\,2x & +\,2 \\
\hline
-\,x^4 & +\,5x^3 & +\,2x^2 & -\,4x & +\,3
\end{array}$$

iii)
$$\begin{array}{rrr}
5x^3 & -\,2x & +\,1 \\
x^3 & & -\,1 \\
\hline
6x^3 & -\,2x &
\end{array}$$

iv)
$$\begin{array}{rrrr}
 & x^3 & & -\,1 \\
-\,x^4 & +\,x^3 & -\,x^2 & \\
\hline
-\,x^4 & +\,2x^3 & -\,x^2 & -\,1
\end{array}$$

b)

i) $5x^3 - 2x + 1 + x^4 - 2x^2 + 2x - 2 - x^3 + 1 = x^4 + 4x^3 - 2x^2$

ii) $5x^3 - 2x + 1 + x^4 - 2x^2 + 2x - 2 + x^3 - 1 + x^4 - x^3 + x^2 = 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2$

iii) $5x^3 - 2x + 1 - x^3 + 1 + x^4 - x^3 + x^2 = x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x + 2$

Página 91

3 **Siendo** $P = 4x^2 + 3$, $Q = 5x^2 - 3x + 7$ **y** $R = 5x - 8$, **calcula:**

a) $P \cdot Q$ **b)** $P \cdot R$ **c)** $Q \cdot R$

a)
$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 4x^2 & & +\ 3 \\
 & & 5x^2 & -\ 3x & +\ 7 \\
\hline
 & & 28x^2 & & +\ 21 \\
 & -\ 12x^3 & & -\ 9x & \\
20x^4 & & +\ 15x^2 & & \\
\hline
20x^4 & -\ 12x^3 & +\ 43x^2 & -\ 9x & +\ 21
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrr}
 & 4x^2 & & +\ 3 \\
 & & 5x & -\ 8 \\
\hline
 & -\ 32x^2 & & -\ 24 \\
20x^3 & & +\ 15x & \\
\hline
20x^3 & -\ 32x^2 & +\ 15x & -\ 24
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrrr}
 & 5x^2 & -\ 3x & +\ 7 \\
 & & 5x & -\ 8 \\
\hline
 & -\ 40x^2 & +\ 24x & -\ 56 \\
25x^3 & -\ 15x^2 & +\ 35x & \\
\hline
25x^3 & -\ 55x^2 & +\ 59x & -\ 56
\end{array}$$

4 **Opera y simplifica la expresión resultante.**

a) $x(5x^2 + 3x - 1) - 2x^2(x - 2) + 12x^2$

b) $5(x - 3) + 2(y + 4) - \frac{7}{3}(y - 2x + 3) - 8$

c) $15 \cdot \left[\frac{2(x-3)}{3} - \frac{4(y-x)}{5} + \frac{x+2}{15} - 7\right]$

d) $(x^2 - 2x + 7)(5x^3 + 3) - (2x^5 - 3x^3 - 2x + 1)$

a) $5x^3 + 3x^2 - x - 2x^3 + 4x^2 + 12x^2 = 3x^3 + 19x^2 - x$

b) $5x - 15 + 2y + 8 - \frac{7}{3}y + \frac{14}{3}x - 7 - 8 = \frac{29}{3}x - \frac{1}{3}y - 22$

c) $10(x - 3) - 12(y - x) + (x + 2) - 105 = 10x - 30 - 12y + 12x + x + 2 - 105 = 23x - 12y - 133$

d) $5x^5 + 3x^2 - 10x^4 - 6x + 35x^3 + 21 - 2x^5 + 3x^3 + 2x - 1 = 3x^5 - 10x^4 + 38x^3 + 3x^2 - 4x + 20$

5 Desarrolla los siguientes cuadrados:

a) $(x + 4)^2$ **b)** $(2x - 5)^2$ **c)** $(1 - 6x)^2$

d) $\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$ **e)** $\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $(ax + b)^2$

a) $x^2 + 16 + 8x$

b) $4x^2 + 25 - 20x$

c) $1 + 36x^2 - 12x$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{16} + \frac{3x}{4} = \frac{1}{16}(4x^2 + 9 + 12x)$

e) $4x^4 + \frac{1}{4} - 2x^2 = \frac{1}{4}(16x^4 + 1 - 8x^2)$

f) $a^2x^2 + b^2 + 2abx$

6 Efectúa los siguientes productos:

a) $(x + 1)(x - 1)$ **b)** $(2x + 3)(2x - 3)$

c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)$ **d)** $(ax + b)(ax - b)$

a) $x^2 - 1$

b) $4x^2 - 9$

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{1}{4}$

d) $a^2x^2 - b^2$

4 ▶ IDENTIDADES

Página 92

1 De estas igualdades, ¿cuáles son identidades?

a) $a + a + a = 3a$

b) $3a + 15 = 3 \cdot (a + 5)$

c) $x^2 \cdot x = 27$

d) $a + a + a = 15$

e) $x \cdot x \cdot x = x^3$

f) $a + 5 + a = 2a + 5$

g) $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = 4x - 9$

h) $m^2 - m - 6 = (m + 2) \cdot (m - 3)$

Son identidades a), b), e), f) y h).

2 Completa, de la forma más breve posible, el segundo término de estas igualdades para que resulten identidades:

a) $\dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$

b) $5a - 4 + a - \dfrac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = [?]$

c) $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot b = [?]$

d) $(1 - b) \cdot (1 + b) + b^2 + a - 1 = [?]$

a) a^3

b) $5a - 4 + a - a = 5a - 4$

c) $2ab + ac$

d) $1 - b^2 + b^2 + a - 1 = a$

3 Partiendo de cada una de las siguientes expresiones, llega mediante identidades a los resultados que se indican:

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) \quad \rightarrow \quad 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) \quad \rightarrow \quad x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \quad \rightarrow \quad x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 \quad \rightarrow \quad 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 \quad \rightarrow \quad 4ab$

a) $(x + 3)^2 - (x^2 + x + 6) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - x - 6 = 5x + 3$

b) $(x + 2) \cdot (x + 6) - (x + 2) \cdot (x + 5) = (x^2 + 6x + 2x + 12) - (x^2 + 5x + 2x + 10) = x + 2$

c) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) = x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 - x + x - 1 =$
$= x^4 - 1$

d) $(x^2 - 1) - (x - 1)^2 = (x^2 - 1) - (x^2 - 2x + 1) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

e) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab$

Página 93

4 **Extrae factor común en cada expresión:**

a) $5x^2 - 15x^3 + 25x^4$ **b)** $\dfrac{x^4}{3} - \dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{15}$

c) $2x^3y^5 - 3x^2y^4 + 2x^7y^2 + 7x^3y^3$ **d)** $2x^2y - 5x^3y(2y - 3)$

e) $2(x - 3) + 3(x - 3) - 5(x - 3)$ **f)** $2xy^2 - 6x^2y^3 + 4xy^3$

g) $\dfrac{(x^2 - 3)}{2}(y - 1) - \dfrac{7}{2}(y - 1)$ **h)** $\dfrac{(2x^2 + 1)^2}{3} - \dfrac{4}{3}(2x^2 + 1)$

a) $5x^2(1 - 3x + 5x^2)$ b) $\dfrac{1}{3}\left(x^4 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$

c) $x^2y^2(2xy^3 - 3y^2 + 2x^5 + 7xy)$ d) $x^2y(2 - 10xy + 15x)$

e) $(x - 3)(2 + 3 - 5) = (x - 3) \cdot 0 = 0$ f) $2xy^2(1 - 3xy + 2y)$

g) $(y - 1)\left(\dfrac{x^2 - 3 - 7}{2}\right) = (y - 1)\left(\dfrac{x^2}{2} - 5\right)$ h) $\dfrac{1}{3}(2x^2+1)[(2x^2+1)-4] = \dfrac{1}{3}(2x^2+1)(2x^2-3)$

5 **Expresa en forma de cuadrado de una expresión algebraica o de producto de dos expresiones.**

a) $4x^2 - 25$ **b)** $x^2 + 16 + 8x$ **c)** $x^2 + 2x + 1$

d) $9x^2 + 6x + 1$ **e)** $4x^2 + 25 - 20x$ **f)** $\dfrac{x^2}{4} + x + 1$

g) $144(x^2)^2 - x^2$ **h)** $\dfrac{(x^3)^2}{25} + \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{1}{4}$ **i)** $16x^4 - 9$

j) $\dfrac{x^6}{100} + \dfrac{8x^3}{5} + 64$

a) $(2x + 5)(2x - 5)$ b) $(x + 4)^2$ c) $(x + 1)^2$

d) $(3x + 1)^2$ e) $(2x - 5)^2$ f) $\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)^2$

g) $(12x^2 - x) \cdot (12x^2 + x)$ h) $\left(\dfrac{x^3}{5} + \dfrac{1}{2}\right)^2$ i) $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 + 3)$

j) $\left(\dfrac{x^3}{10} + 8\right)^2$

6 **Completa estas igualdades para que sean identidades:**

a) $x^2 - \ldots + 1 = (x - \ldots)^2$ **b)** $4x^2 + \ldots + 36 = (\ldots + 6)^2$

c) $9x^2 - \ldots = (3x + \ldots)(\ldots - 5)$ **d)** $\dfrac{1}{4}x^2 + x + \ldots = (\ldots x + \ldots)^2$

a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ b) $4x^2 + 24x + 36 = (2x + 6)^2$

c) $9x^2 - 25 = (3x + 5) \cdot (3x - 5)$ d) $\dfrac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(x + \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right)\right)^2$

7 **Simplifica las expresiones siguientes:**

a) $(x-2)(x+2)-(x^2+4)$ **b)** $(3x-1)^2-(3x+1)^2$

c) $(x+3)^2-[x^2+(x-3)^2]$

a) $x^2-4-x^2-4=-8$

b) $(9x^2-6x+1)-(9x^2+6x+1)=9x^2-6x+1-9x^2-6x-1=-12x$

c) $(x^2+6x+9)-[x^2+(x^2-6x+9)]=x^2+6x+9-x^2-x^2+6x-9=-x^2+12x$

8 **Asocia cada expresión algebraica de la izquierda con el factor común que se puede extraer de ella en la derecha:**

$12x^3-8x^5+4x^2y^2-\frac{4}{3}x^2$	$2(x-2)$
$(x^2-1)+(x^2-2x+1)-(4x-4)$	$3x$
$6(x^2-4x+4)-(2x^2-8)+(30x-60)$	$x-1$
$9x^2-18xy^2-6xyz+6x$	$4x^2$

Obtén las expresiones simplificadas después de extraer los factores.

$12x^3-8x^5+4x^2y^2-\frac{4}{3}x^2=4x^2\left(3x-2x^3+y^2-\frac{1}{3}\right)$

$(x^2-1)+(x^2-2x+1)-(4x-4)=(x-1)\,[(x+1)+(x-1)-4]=(x-1)(2x-4)$

$6(x^2-4x+4)-(2x^2-8)+(30x-60)=2(x-2)\,[3(x-2)-(x+2)+15]=2(x-2)(2x+7)$

$9x^2-18xy^2-6xyz+6x=3x(3x-6y^2-2yz+2)$

9 **Multiplica y simplifica el resultado.**

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{8}-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}$ **por 8** **b)** $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ **por 9**

c) $\frac{(2x-4)^2}{8}-\frac{x(x+1)}{2}-5$ **por 8** **d)** $\frac{3(x+2)}{4}+\frac{3x+5}{2}-\frac{5(4x+1)}{6}+\frac{25}{12}$ **por 12**

a) $4x+2x+x-6x-2=x-2$

b) $9x+2x-3+3(x-1)-(12x+4)=9x+2x-3+3x-3-12x-4=2x-10$

c) $(2x-4)^2-4x(x+1)-40=(4x^2-16x+16)-4x^2-4x-40=$

$=4x^2-16x+16-4x^2-4x-40=-20x-24$

d) $9(x+2)+6(3x+5)-10(4x+1)+25=9x+18+18x+30-40x-10+25=-13x+63$

5 ▸ COCIENTE DE POLINOMIOS

Página 96

1 **Halla el cociente y el resto de estas divisiones:**

a) $(x^5 - 7x^4 + 3x^2 - 8) : (x^2 - 3x + 1)$ **b)** $(6x^4 + 3x^3 - 2x) : (3x^2 + 2)$

c) $(3x^5 - 2x^4 + 4x - 5) : (x^3 - 2x + 1)$ **d)** $(x^4 + 3x^3 + 2) : (x^4 + 3x)$

a)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & -7x^4 & & +3x^2 & & -8 & x^2-3x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +3x^4 & -x^3 & & & & x^3-4x^2-13x-32 \\ \cline{1-3}
 & -4x^4 & -x^3 & +3x^2 & & -8 & \\
 & +4x^4 & -12x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -13x^3 & +7x^2 & & -8 & \\
 & & +13x^3 & -39x^2 & +13x & & \\ \cline{3-5}
 & & & -32x^2 & +13x & -8 & \\
 & & & +32x^2 & -96x & +32 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -83x & +24 &
\end{array}$$

Cociente: $x^3 - 4x^2 - 13x - 32$; Resto: $-83x + 24$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & +3x^3 & & -2x & & 3x^2+2 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & & -4x^2 & & & 2x^2+x-4/3 \\ \cline{1-3}
 & 3x^3 & -4x^2 & -2x & & \\
 & -3x^3 & & -2x & & \\ \cline{2-4}
 & & -4x^2 & -4x & & \\
 & & +4x^2 & & +8/3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -4x & +8/3 &
\end{array}$$

Cociente: $2x^2 + x - \frac{4}{3}$; Resto: $-4x + \frac{8}{3}$

c)
$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -2x^4 & & & +4x & -5 & x^3-2x+1 \\ \cline{7-7}
-3x^5 & & +6x^3 & -3x^2 & & & 3x^2-2x+6 \\ \cline{1-4}
 & -2x^4 & +6x^3 & -3x^2 & +4x & -5 & \\
 & 2x^4 & & -4x^2 & +2x & & \\ \cline{2-5}
 & & 6x^3 & -7x^2 & +6x & -5 & \\
 & & -6x^3 & & +12x & -6 & \\ \cline{3-6}
 & & & -7x^2 & +18x & -11 &
\end{array}$$

Cociente: $3x^2 - 2x + 6$; Resto: $-7x^2 + 18x - 11$

d)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +3x^3 & & +2 & x^4+3x \\ \cline{5-5}
-x^4 & & -3x & & 1 \\ \cline{1-4}
 & 3x^3 & -3x & +2 &
\end{array}$$

Cociente: 1; Resto: $3x^3 - 3x + 2$

2 **Calcula por Ruffini el cociente y el resto de cada una de las siguientes divisiones:**

a) $(3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 3) : (x + 1)$ **b)** $(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6) : (x - 2)$

c) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$ **d)** $(x^3 - x^2 + 2x - 8) : (x + 2)$

a)

	3	2	–1	5	–3
–1		–3	1	0	–5
	3	–1	0	5	–8

Cociente: $3x^3 - x^2 + 5$; Resto: –8

b)

	1	–2	2	–1	–6
2		2	0	4	6
	1	0	2	3	0

Cociente: $x^3 + 2x + 3$; Resto: 0

c)

	5	6	–11	13
2		10	32	42
	5	16	21	55

Cociente: $5x^2 + 16 + 21$; Resto: 55

d)

	1	–1	2	–8
–2		–2	6	–16
	1	–3	8	–24

Cociente: $x^2 - 3x + 8$; Resto: –24

3 **Indica si alguno de los polinomios siguientes es divisible por $(x + 1)$ o por $(x - 2)$:**

a) $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

b) $Q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

c) $R(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 4$

d) $S(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

$\to$ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & & 2 & 6 & 14 & 30 \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 15 & \boxed{31} \end{array}$$

$\to$ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x - 2)$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ -1 & & -1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & -2 & \boxed{4} \end{array}$$

$\to$ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 12 & 26 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & \boxed{20} \end{array}$$

$\to$ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x - 2)$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ -1 & & -1 & 3 & -1 & -5 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 5 & \boxed{-9} \end{array}$$

$\to$ El resto no es cero, luego no es divisible entre $(x + 1)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\to$ Es divisible entre $(x - 2)$

d)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 0 & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\to$ Es divisible entre $(x + 1)$

$\to$ Es divisible entre $(x - 2)$

4 **En estos apartados se ha aplicado la regla de Ruffini para realizar divisiones. Indica en cada caso el dividendo, el divisor, el cociente y el resto, y exprésalos de esta forma:**

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

a)

	1	–1	–2	9	3
–2		–2	6	–8	–2
	1	–3	4	1	1

b)

	2	0	0	–2	1
1		2	2	2	0
	2	2	2	0	1

c)

	1	–2	0	–9
3		3	3	9
	1	1	3	0

a) $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 9x + 3$

$Q(x) = x + 2$

$C(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$

$R(x) = 1$

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 9x + 3}{x + 2} = (x^3 - 3x^2 + 4x + 1) + \frac{1}{x + 2}$$

b) $P(x) = 2x^4 - 2x + 1$

$Q(x) = x - 1$

$C(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x$

$R(x) = 1$

$$\frac{2x^4 - 2x + 1}{x - 1} = (2x^3 + 2x^2 + 2x) + \frac{1}{x - 1}$$

c) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$

$Q(x) = x - 3$

$C(x) = x^2 + x + 3$

$R(x) = 0$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 9}{x - 3} = x^2 + x + 3$$

6 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Página 97

1 **Utiliza los productos notables y la extracción de factor común para factorizar estos polinomios:**

a) $P(x) = 3x^3 - 6x^2 + 12x$ **b)** $P(x) = 4x^4 + 6x^2$

c) $P(x) = 4x^2 - 24x + 36$ **d)** $P(x) = 9x^2 + 6x + 1$

a) $3x^3 - 6x^2 + 12x = 3x(x^2 - 2x + 4)$ b) $4x^4 + 6x^2 = 2x^2(2x^2 + 3)$

c) $4x^2 - 24x + 36 = 4(x^2 - 6x + 9) = 4(x - 3)^2 = 4(x - 3)(x - 3)$

d) $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$

2 **Transforma los siguientes polinomios en producto de factores. Ayúdate de la regla de Ruffini:**

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

b) $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ **(extrae factor común** x**)**

c) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$

d) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 4 & -11 & -30 & \\
3 & & 3 & 21 & 30 & \\
\hline
 & 1 & 7 & 10 & \boxed{0} & \to (x-3) \text{ es factor} \\
-5 & & -5 & -10 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & & \to (x+5) \text{ es factor}
\end{array}$$

$P(x) = (x-3)(x+5)(x+2)$

b) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^3 - x^2 - 4x + 4)$
$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & -1 & -4 & 4 & \\
1 & & 1 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} & \to (x-1) \text{ es factor} \\
2 & & 2 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & & \to (x-2) \text{ es factor}
\end{array}$$

$P(x) = x(x-1)(x-2)(x+2)$

c)
$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & -3 & -15 & 19 & 30 & \\
2 & & 2 & -2 & -34 & -30 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -17 & -15 & \boxed{0} & \to (x-2) \text{ es factor} \\
-3 & & -3 & 12 & 15 & & \\
\hline
 & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} & & \to (x+3) \text{ es factor} \\
-1 & & -1 & 5 & & & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} & & & \to (x+1) \text{ es factor}
\end{array}$$

$P(x) = (x-2)(x+3)(x+1)\ (x-5)$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & \\
1 & & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{0} & \to (x-1) \text{ es factor} \\
-2 & & -2 & 0 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & & \to (x+2) \text{ es factor}
\end{array}$$

$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1)$

7 FRACCIONES ALGEBRAICAS

Página 99

1 Simplifica las fracciones siguientes:

a) $\dfrac{5x^2}{5x^2(x-1)}$ **b)** $\dfrac{5(x-1)^2}{10(x-1)}$

c) $\dfrac{5(x+2)-(x+2)}{2(x+2)}$ **d)** $\dfrac{2x^2(x+3)}{4x(x+3)^2}$

a) $\dfrac{1}{(x-1)}$

b) $\dfrac{5(x-1)(x-1)}{5\cdot 2(x-1)} = \dfrac{(x-1)}{2}$

c) $\dfrac{(x+2)(5-1)}{2(x+2)} = \dfrac{4}{2} = 2$

d) $\dfrac{2\cdot x\cdot x(x+3)}{2\cdot 2\cdot x(x+3)(x+3)} = \dfrac{x}{2(x+3)}$

2 Opera y simplifica.

a) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{x-2}{x}$ **b)** $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)^2}-\dfrac{2}{x}$

c) $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{3x}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{1}{x-2}$

a) $\dfrac{4}{2x}+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{2(x-2)}{2x} = \dfrac{7+2x-4}{2x} = \dfrac{2x+3}{2x}$

b) $\dfrac{3x}{x(x+1)}+\dfrac{2}{x(x+1)}-\dfrac{2(x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{x}{x(x+1)}$

c) $\dfrac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{3x}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x}{(x-2)(x+2)}$

3 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x} : (x+1)$ **b)** $6x^2\cdot\dfrac{x-3}{x^3}$

c) $\dfrac{2x}{x-1} : \dfrac{4x^2}{2(x-1)}$ **d)** $\dfrac{x+5}{10}\cdot\dfrac{5}{(x+5)^2}$

e) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} : \dfrac{18(x-1)}{3x}$ **f)** $\dfrac{2x^2}{3x}\cdot\dfrac{6x}{4x^3}$

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\cdot\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x+1}{x}$

b) $\dfrac{6x^2(x-3)}{x^3} = \dfrac{6(x-3)}{x} = \dfrac{6x-18}{x}$

c) $\dfrac{2x}{x-1}\cdot\dfrac{2(x-1)}{(2x)^2} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$

d) $\dfrac{5(x+5)}{10(x+5)^2} = \dfrac{1}{2(x+5)}$

e) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} = \dfrac{3x}{18(x-1)} = \dfrac{9x}{8x^2} = \dfrac{1}{2x}$

f) $\dfrac{12x^3}{12x^4} = \dfrac{1}{x}$

4 **Ten en cuenta las identidades notables antes de operar y simplificar.**

a) $\dfrac{x^2-1}{x} : (x+1)$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x} : \dfrac{x^2-4}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x} : \dfrac{x-1}{x}$

d) $\dfrac{3x-3}{x^2} \cdot \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$

a) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{x} : (x+1) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x} \cdot \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x-1)}{x}$

b) $\dfrac{x(x-2)}{x} : \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = (x-2) \cdot \dfrac{1}{(x-2)} = 1$

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x} : \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{(x-1)^2}{x} \cdot \dfrac{x}{x-1} = x-1$

d) $\dfrac{3(x-1)}{x^2} \cdot \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{3}{x}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 100

1. Expresiones algebraicas

Hazlo tú

- **Expresa en lenguaje algebraico la siguiente afirmación: «La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será 60 cm²».**

$x \to$ Altura $\to (x + 5)(x - 2) = 60$

2. Utilización de identidades

Hazlo tú

- **Simplifica a) y transforma en producto b).**

a) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{3x^3 - 15x^2}$ **b)** $(x - 1) \cdot x^2 - (x - 1) \cdot 4$

a) $\dfrac{(x-5)^2}{3x^2(x-5)} = \dfrac{x-5}{3x^2}$ b) $(x - 1)(x^2 - 4)$

3. Transforman en producto

Hazlo tú

- **Transforma en producto.**

a) $180x^3 - 80x$ **b)** $x^3 - 3x - 2$

a) $20x(9x^2 - 4) = 20x(3x + 2)(3x - 2)$

b)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & & -3 & -2 \\
2 & & 2 & 4 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \to (x-2) \\ \\ \to (x+1)
\end{array}
$$

$(x - 2)(x + 1)(x + 1) = (x - 2)(x + 1)^2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 101

Practica

Traducción a lenguaje algebraico

1 **Expresa en lenguaje algebraico utilizando una sola incógnita.**

a) El doble de un número más su cuadrado.

b) El producto de dos números consecutivos.

c) La mitad de un número aumentado en 3.

d) Un múltiplo de 3 menos 7.

e) El precio de una raqueta después de aplicarle una rebaja del 20 %.

f) El precio de un libro después de cargarle un 4 % de IVA.

a) $2x + x^2$ b) $x(x + 1)$ c) $\dfrac{(x + 3)}{2}$

d) $3x - 7$ e) $0{,}8x$ f) $1{,}04x$

2 **Utiliza dos incógnitas para expresar en lenguaje algebraico estos enunciados:**

a) Un número más la mitad del cuadrado de otro.

b) El cuadrado de la diferencia de dos números.

c) La suma de las edades de una madre y su hijo hace 5 años.

d) La edad de Andrea, dentro de 7 años, será el doble que la que tenga Lucía.

e) En una empresa se han envasado 1 500 litros de aceite en garrafas de dos tamaños: unas de 2,5 litros y otras de 5 litros.

f) En un test de matemáticas te dan 4 puntos por cada acierto y te restan 1 punto por cada error. Luis obtuvo 60 puntos.

g) El cubo de la diferencia de dos números es 8.

a) $x + \dfrac{y^2}{2}$ b) $(x - y)^2$ c) $(x - 5) + (y - 5)$

d) Edad de Andrea $\rightarrow x$
Edad de Lucía $\rightarrow y$
$x + 7 = 2(y + 7)$

e) $x \rightarrow$ N.º de garrafas de 2,5 litros
$y \rightarrow$ N.º de garrafas de 5 litros
$2{,}5x + 5y = 1\,500$

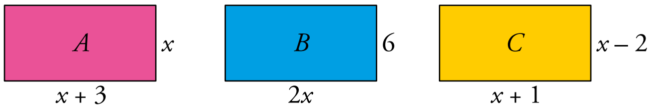
f) $x \rightarrow$ Aciertos
$y \rightarrow$ Errores
$4 \cdot x + 1 \cdot y = 60$

g) $(x - y)^3 = 8$

3 **Asocia cada una de las siguientes expresiones al perímetro y al área de los rectángulos A, B y C que tienes debajo:**

a) $12x$ **b)** $4x - 2$ **c)** $4x + 6$

d) $4x + 12$ **e)** $x^2 + 3x$ **f)** $x^2 - x - 2$



a) $12x$ es el área de B

b) $4x - 2$ es el perímetro de C.

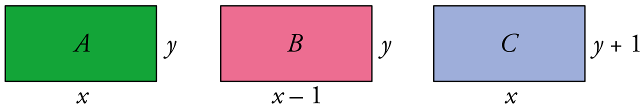
c) $4x + 6$ es el perímetro de A.

d) $4x + 12$ es el perímetro de B.

e) $x^2 + 3x$ es el área de A.

f) $x^2 - x - 2$ es el área de C.

4 **Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos rectángulos:**



a) $A\ \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y) = 2x + 2y \\ \text{Área} = xy \end{cases}$

b) $B\ \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x - 1 + y) = 2x + 2y - 2 \\ \text{Área} = (x - 1)y = xy - y \end{cases}$

c) $C\ \begin{cases} \text{Perímetro} = 2(x + y + 1) = 2x + 2y + 2 \\ \text{Área} = x(y + 1) = xy + x \end{cases}$

Monomios y polinomios

5 **En cada uno de los siguientes monomios, indica el coeficiente, el grado y su valor numérico para $x = -2$ e $y = 1/3$. ¿Cuáles son semejantes?**

a) $-5xy$ **b)** $(-7x)^3$ **c)** $8x$ **d)** $(xy)^2$

e) $\dfrac{2}{3}$ **f)** $\dfrac{4}{5}x^3$ **g)** $\dfrac{-3y^2x^2}{5}$ **h)** $\dfrac{1}{2}x$

a) Coeficiente $\to -5$
Grado $\to 2$
Valor numérico $\to \dfrac{10}{3}$

b) Coeficiente $\to -343$
Grado $\to 3$
Valor numérico $\to -8$

c) Coeficiente $\to 8$
Grado $\to 1$
Valor numérico $\to -16$

d) Coeficiente $\to 1$
Grado $\to 4$
Valor numérico $\to \dfrac{4}{9}$

e) Coeficiente $\to \dfrac{2}{3}$
Grado $\to 0$
Valor numérico $\to \dfrac{2}{3}$

f) Coeficiente $\to \dfrac{4}{5}$
Grado $\to 3$
Valor numérico $\to -\dfrac{32}{5}$

g) Coeficiente $\to -\dfrac{3}{5}$
Grado $\to 4$
Valor numérico $\to -\dfrac{4}{15}$

g) Coeficiente $\to \dfrac{1}{2}$
Grado $\to 1$
Valor numérico $\to -1$

6 **Simplifica estos polinomios:**

a) $\frac{5}{2}x - x^2 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$ **b)** $2x - 7y - 3x + 6y + x$

c) $x^2y^2 - 3x^2y - 5xy^2 + x^2y + xy^2$

a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$ b) $-y$ c) $x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2$

7 **Efectúa los siguientes productos de monomios:**

a) $(6x^2)(-3x)$ **b)** $(2xy^2)(4x^2y)$ **c)** $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right)$

a) $6x^2\,(-3x) = -18x^3$ b) $(2xy^2)(4x^2y) = 8x^3y^3$

c) $\left(\frac{3}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{2}x^3\right) = \frac{3}{8}x^6$ d) $\left(\frac{1}{4}xy\right)\left(\frac{3xz}{2}\right) = \frac{3}{8}x^2yz$

8 **Efectúa, reduce y di cuál es el grado del polinomio resultante en cada caso:**

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1)$ **b)** $5x^2(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x$

a) $x(x^2 - 5) - 3x^2(x + 2) - 7(x^2 + 1) = x^3 - 5x - 3x^3 - 6x^2 - 7x^2 - 7 =$

$= -2x^3 - 13x^2 - 5x - 7 \;\rightarrow\;$ Grado 3.

b) $5x^2\,(-3x + 1) - x(2x - 3x^2) - 2 \cdot 3x = -15x^3 + 5x^2 - 2x^2 + 3x^3 - 6x =$

$= -12x^3 + 3x^2 - 6x \;\rightarrow\;$ Grado 3.

9 **Considera estos polinomios:**

$A = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$ $B = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$ $C = -x^3 + 3x^2 - 7x$

Halla: $A + B$; $A - C$; $A - B + C$

$A + B = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + 2x^4 + x^3 - 2x + 4 = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$

$A - C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (-x^3 + 3x^2 - 7x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 1 + x^3 - 3x^2 + 7x =$

$= 4x^3 - 8x^2 + 8x - 1$

$A - B + C = (3x^3 - 5x^2 + x - 1) - (2x^4 + x^3 - 2x + 4) + (-x^3 + 3x^2 - 7x) =$

$= 3x^3 - 5x^2 + x - 1 - 2x^4 - x^3 + 2x - 4 - x^3 + 3x^2 - 7x =$

$= -2x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x - 5$

10 Opera y simplifica.

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2)$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12)$

d) $(x^3 - 13x + 2) \cdot (x^2 - 1)$

e) $(-x^2 + 2) \cdot (x^3 - 14x^2)$

f) $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 2) \cdot (4x - 1)$

a) $(2x^2 + 3)(x - 1) - x(x - 2) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 - x^2 + 2x = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

b) $(x^2 - 5x + 3)(x^2 - x) - x(x^3 - 3) = x^4 - x^3 - 5x^3 + 5x^2 + 3x^2 - 3x - x^4 + 3x = -6x^3 + 8x^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{6}\right)(6x - 12) = 3x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 20x + x - 2 = 3x^3 + 4x^2 - 19x - 2$

d) $(x^3 - 13x + 2)(x^2 - 1) = x^5 - x^3 - 13x^3 + 13x + 2x^2 - 2 = x^5 - 14x^3 + 2x^2 + 13x - 2$

e) $(-x^2 + 2)(x^3 - 14x^2) = -x^5 + 14x^4 + 2x^3 - 28x^2$

f) $(2x^2 + x - 1)(4x - 1) = 8x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

11 Piensa y sustituye en tu cuaderno los huecos por los números que faltan.

$$(2x^2 - \square x) \cdot (\square x + 2) = 10x^3 - 11x^2 - 6x$$

$(2x^2 - 3x) \cdot (5x + 2) = 10x^3 - 11x^2 - 6x$

Página 102

12 Reduce las siguientes expresiones:

a) $6\left(\dfrac{5x-4}{6}+\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{x-1}{3}\right)$

b) $12\left(\dfrac{x+6}{3}-\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}\right)$

c) $20\left[\dfrac{2(x-1)}{10}-\dfrac{x(x+1)}{5}+\dfrac{1}{4}\right]$

a) $6\left(\dfrac{5x-4}{6}+\dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{x-1}{3}\right)=5x-4+3(2x-3)-2(x-1)=$

$=5x-4+6x-9-2x+1=9x-12$

b) $12\left(\dfrac{x+6}{3}-\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{3x-1}{4}\right)=4(x+6)-6(x+1)+3(3x-1)=$

$=4x+24-6x+6+9x-3=7x+15$

c) $20\left[\dfrac{2(x-1)}{10}-\dfrac{x(x+1)}{5}+\dfrac{1}{4}\right]=4(x-1)-4x(x+1)+5=4x-4-4x^2-4x+5=-4x^2+1$

13 Multiplica cada expresión por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica el resultado:

a) $\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}$

b) $\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{3x-3}{5}-\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{2}$

a) $\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}=24\left(\dfrac{3+x}{8}-\dfrac{5-x}{6}-\dfrac{x+1}{12}\right)=3(3+x)-4(5-x)-2(x+1)=$

$=9+3x-20+4x-2x-2=5x-13$

b) $\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}=12\left(\dfrac{3}{4}(x-1)-\dfrac{1}{3}(x+1)+\dfrac{1}{6}\right)=$

$=3\cdot 3(x-1)-4(x+1)+2=9x-9-4x-4+2=5x-11$

c) $\dfrac{3x-3}{5}-\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{2}=30\left[\dfrac{3x-3}{5}-\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{1}{2}\right]=6(3x-3)-10(x+1)+15=$

$=18x-18-10x-10+15=8x-13$

Identidades notables. Factor común

14 **Desarrolla estas expresiones:**

a) $(x+6)^2$ **b)** $(7-x)^2$ **c)** $(3x-2)^2$

d) $(5x+9)^2$ **e)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ **f)** $(x-2y)^2$

g) $\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}y\right)^2$ **h)** $(x^2-2x)^2$ **i)** $(2x^2-3y^2)^2$

a) $(x+6)^2 = x^2+36+12x$

b) $(7-x)^2 = 49+x^2-14x$

c) $(3x-2)^2 = 9x^2+4-12x$

d) $25x^2+90x+81$

e) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+\frac{1}{4}+x$

f) $(x-2y)^2 = x^2+4y^2-4xy$

g) $\frac{4}{25}x^2-2\left(\frac{2}{5}x\cdot\frac{1}{3}y\right)+\frac{1}{9}y^2 = \frac{4}{25}x^2-2\left(\frac{2}{15}xy\right)+\frac{1}{9}y^2 = \frac{4}{25}x^2-\frac{4}{15}xy+\frac{1}{9}y^2$

h) $x^4-4x^3+4x^2$

i) $4x^4-12x^2y^2+9y^4$

15 **Expresa como diferencia de cuadrados.**

a) $(x+7)(x-7)$ **b)** $(3+x)(3-x)$ **c)** $(3+4x)(3-4x)$

d) $(x^2+1)(x^2-1)$ **e)** $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ **f)** $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)$

a) $(x+7)(x-7) = x^2-49$

b) $(3+x)(3-x) = 9-x^2$

c) $(3+4x)(3-4x) = 9-16x^2$

d) $(x^2+1)(x^2-1) = x^4-1$

e) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{1}{4}x^2-1$

f) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{x^2}$

16 **Completa con el término que falta para que cada expresión sea el cuadrado de una suma o el de una diferencia:**

a) $x^2+\ldots+4x$ **b)** $x^2+\ldots-10x$

c) $x^2+9+\ldots$ **d)** $x^2+16-\ldots$

e) $4x^2+1+\ldots$ **f)** $9x^2+\ldots+12x$

g) $25x^2+y^2-\ldots$ **h)** $x^2+\ldots+x$

a) x^2+4+4x

b) $x^2+25-10x$

c) x^2+9+6x

d) $x^2+16-8x$

e) $4x^2+1+4x$

f) $9x^2+4+12x$

g) $25x^2+y^2-10xy$

h) $x^2+\frac{1}{4}+x$

17 **Extrae factor común.**

a) $12x^3-8x^2-4x$ **b)** $-3x^3+x-x^2$

c) $2xy^2-4x^2y+x^2y^2$ **d)** $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x$

a) $12x^3-8x^2-4x = 4x(3x^2-2x-1)$

b) $-3x^3+x-x^2 = x(-3x^2+1-x)$

c) $2xy^2-4x^2y+x^2y^2 = xy(2y-4x+xy)$

d) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x = \frac{1}{3}x(2x+x^2-5)$

18 **Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia, como en el ejemplo.**

- $\boldsymbol{x^2 + 25 + 10x = x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5x = (x + 5)^2}$

a) $\boldsymbol{x^2 + 49 - 14x}$ **b)** $\boldsymbol{x^2 + 1 - 2x}$

c) $\boldsymbol{4x^2 + 1 + 4x}$ **d)** $\boldsymbol{x^2 + 12x + 36}$

e) $\boldsymbol{25x^2 + 49 + 70x}$ **f)** $\boldsymbol{100x^2 - 60x + 9}$

a) $x^2 + 49 - 14x = x^2 + 7^2 - 2 \cdot 7x = (x - 7)^2$

b) $x^2 + 1 - 2x = x^2 + 1^2 - 2x = (x - 1)^2$

c) $4x^2 + 1 + 4x = (2x)^2 + 1^2 + 2 \cdot 2x = (2x + 1)^2$

d) $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \cdot 6x + 6^2 = (x + 6)^2$

e) $(5x)^2 + (7)^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5x = (5x + 7)^2$

f) $(10x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 10x + (3)^2 = (10x - 3)^2$

19 **Reconoce las identidades notables y transfórmalas en productos.**

a) $\boldsymbol{49x^2 - 16}$ **b)** $\boldsymbol{4x^2 - 49}$

c) $\boldsymbol{x^2 - 18x + 81}$ **d)** $\boldsymbol{121 - 100x^2}$

e) $\boldsymbol{9x^2 + 12x + 4}$ **f)** $\boldsymbol{9x^2 - 24x + 16}$

g) $\boldsymbol{25 - 100y^2}$ **h)** $\boldsymbol{4x^2 + 16x + 16}$

i) $\boldsymbol{36x^2 - 1}$ **j)** $\boldsymbol{16x^2 + 25 - 40x}$

a) $(7x)^2 + (4) = (7x + 4)(7x - 4)$

b) $(2x)^2 - (7)^2 = (2x - 7)(2x + 7)$

c) $x^2 - 2 \cdot 9 \cdot x + (9)^2 = (x - 9)^2$

d) $(11) - (10x)^2 = (11 - 10x)(11 + 10x)$

e) $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3x + (2)^2 = (3x + 2)^2$

f) $9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3x + (4)^2 = (3x - 4)^2$

g) $(5)^2 - (10y)^2 = (5 - 10y)(5 + 10y)$

h) $(2x)^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2x + (4)^2 = (2x + 4)^2$

i) $(6x)^2 - 1 = (6x + 1)(6x - 1)$

j) $(4x)^2 + (5)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4x = (4x - 5)^2$

20 **Extrae factor común y transforma en producto, como se hace en el ejemplo.**

- $\boldsymbol{x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2}$

a) $\boldsymbol{x^3 - 4x}$ **b)** $\boldsymbol{4x^3 - 4x^2 + x}$

c) $\boldsymbol{x^4 - x^2}$ **d)** $\boldsymbol{3x^4 - 24x^3 + 48x^2}$

a) $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2)$

b) $4x^3 - 4x^2 + x = x(4x^2 - 4x + 1) = x(2x - 1)^2$

c) $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x + 1)(x - 1)$

d) $3x^4 - 24x^3 + 48x^2 = 3x^2(x^2 - 8x + 16) = 3x^2(x - 4)^2$

21 **Reduce las siguientes expresiones:**

a) $18\left[\dfrac{(2x-5)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{6}\right]$ **b)** $8\left[\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x+2)}{4}-\dfrac{(3x+2)^2}{8}\right]$

c) $30\left[\dfrac{x(x-2)}{15}-\dfrac{(x+1)^2}{6}+\dfrac{1}{2}\right]$

a) $18\left[\dfrac{(2x-5)^2}{9}-\dfrac{(x+1)^2}{6}\right]=2(2x-5)^2-3(x+1)^2=8x^2-40x+50-3x^2-6x-3=$

$=5x^2-46x+47$

b) $8\left[\dfrac{x(x-3)}{2}+\dfrac{x(x+2)}{4}-\dfrac{(3x+2)^2}{8}\right]=4x(x-3)+2x(x+2)-(3x+2)^2=$

$=4x^2-12x+2x^2+4x-9x^2-12x-4=$

$=-3x^2-20x-4$

c) $30\left[\dfrac{x(x-2)}{15}-\dfrac{(x+1)^2}{6}+\dfrac{1}{2}\right]=2x(x-2)-5(x^2+1+2x)+15=$

$=2x^2-4x-5x^2-5-10x+15=-3x^2-14x+10$

División de polinomios. Regla de Ruffini

22 **Efectúa las siguientes divisiones:**

a) $(12x^2-9x):3x$ **b)** $(25x^3+15x^2-5x):5x$

c) $(18x^5-12x^3+3x^2):6x^2$

a)
$$\begin{array}{rr|l}
12x^2 & -\ 9x & 3x \\ \cline{3-3}
-\ 12x^2 & & 4x-3 \\ \cline{1-2}
 & -\ 9x & \\
 & 9x & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrr|l}
25x^3 & +\ 15x^2 & -\ 5x & 5x \\ \cline{4-4}
-\ 25x^3 & & & 5x^2+3x-1 \\ \cline{1-2}
 & 15x^2 & -\ 5x & \\
 & -\ 15x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -\ 5x & \\
 & & 5x & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rrr|l}
18x^5 & -\ 12x^3 & +\ 3x^2 & 6x^2 \\ \cline{4-4}
-\ 18x^5 & & & 3x^3-2x+1/2 \\ \cline{1-2}
 & -\ 12x^3 & +\ 3x^2 & \\
 & 12x^3 & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x^2 & \\
 & & -\ 3x^2 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

División de polinomios. Regla de Ruffini

23 **Halla el cociente y el resto de estas divisiones:**

a) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$ **b)** $(x^3 - 3x^2 + 5) : (x + 1)$

c) $(2x^3 - 4x + 7) : (x - 1)$ **d)** $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10) : (x + 2)$

e) $(-x^2 + 3x - 7) : (x - 3)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Cociente: $x - 3$; Resto: 0

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 4x + 4$; Resto: 1

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & & 2 & 2 & -2 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & 5 \end{array}$$

Cociente: $2x^2 + 2x - 2$; Resto: 5

d)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ -2 & & -2 & 12 & -10 \\ \hline & 1 & -6 & 5 & 0 \end{array}$$

Cociente: $x^2 - 6x + 5$; Resto: 0

e)
$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 3 & -7 \\ 3 & & -3 & 0 \\ \hline & -1 & 0 & -7 \end{array}$$

Cociente: $-x$; Resto: -7

24 **Ayúdate de la regla de Ruffini para comprobar si los números –1, 1, 2 y 3 son raíces de alguno de estos polinomios:**

a) $x^3 - 7x + 6$ **b)** $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ **c)** $x^3 - 3x^2 - x + 3$

a)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 12 \end{array} \rightarrow x = -1 \text{ no es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \rightarrow x = 1 \text{ es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 2 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow x = 2 \text{ es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 3 & & 3 & 9 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 12 \end{array} \rightarrow x = 3 \text{ no es raíz.}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 4 & -12 \\ -1 & & -1 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -20 \end{array} \rightarrow x = -1 \text{ no es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & -10 \end{array} \rightarrow x = 1 \text{ no es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 2 & & 2 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -8 \end{array} \rightarrow x = 2 \text{ no es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 4 & -12 \\ 3 & & 3 & 0 & 12 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \rightarrow x = 3 \text{ es raíz.}$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & & -1 & 4 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \boxed{0} \end{array} \to x = -1 \text{ es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \end{array} \to x = 1 \text{ es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & & 2 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & \boxed{-3} \end{array} \to x = 2 \text{ no es raíz.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & & 3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array} \to x = 3 \text{ es raíz.}$$

25 **¿Cuáles de estas divisiones son exactas?:**

a) $(3y^2 - 7y + 2) : (y - 2)$

b) $(3b^3 + 13b^2 + 5b) : (b + 4)$

c) $(-m^3 + 2m - 6) : (m + 2)$

d) $(a^4 + 3a^3 - a - 3) : (a + 3)$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -7 & 2 \\ 2 & & 6 & -2 \\ \hline & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array} \to \text{Resto} = 0 \to \text{División exacta.}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 13 & 5 \\ -4 & & -12 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & \boxed{1} \end{array} \to \text{Resto} \neq 0 \to \text{División no exacta.}$$

c)
$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 2 & -3 \\ -2 & & 2 & -8 \\ \hline & -1 & 4 & \boxed{-14} \end{array} \to \text{Resto} \neq 0 \to \text{División no exacta.}$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & & -3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array} \to \text{Resto} = 0 \to \text{División no exacta.}$$

26 **Comprueba si los siguientes polinomios son divisibles por $(x-2)$ o por $(x+1)$:**

a) $x^2 - x - 2$ **b)** $4x^3 + x^2 - 2x + 1$

c) $x^4 - 5x^2 + x + 2$ **d)** $x^4 - 2x^3 + 5x - 4$

a)

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow \text{Es divisible por } (x-2).$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow \text{Es divisible por } (x+1).$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & & 8 & 18 & 32 \\ \hline & 4 & 9 & 16 & \boxed{33} \end{array} \rightarrow \text{No es divisible por } (x-2).$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & & -4 & 3 & -1 \\ \hline & 4 & -3 & 1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow \text{Es divisible por } (x+1).$$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow \text{Es divisible por } (x-2).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & -1 & -4 & 5 & \boxed{-3} \end{array} \rightarrow \text{No es divisible por } (x+1).$$

d)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 5 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 5 & \boxed{6} \end{array} \rightarrow \text{No es divisible por } (x-2).$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & & -1 & 3 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & 2 & \boxed{-6} \end{array} \quad \text{No es divisible por } (x+1).$$

27 Calcula el cociente y el resto de estas divisiones:

a) $(2x^2 - 2x + 5) : (x^2 - 3)$ **b)** $(3x^2 - 7x - 4) : (x^2 + 2x - 3)$

c) $(5x^3 + 3x^2 - 2x + 4) : (x^2 + x + 1)$ **d)** $(-x^4 + 6x^2 - 4) : (x^2 - 2x)$

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^2 & -\ 2x & + & 5 & x^2 + 3 \\ \cline{6-6}
- & 2x^2 & & + & 6 & 2 \\ \cline{1-5}
 & & -\ 2x & + & 11 &
\end{array}$$

Cociente $\rightarrow$ 2; Resto $\rightarrow$ $-2x + 11$

b)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 3x^2 & -\ 7x & + & 4 & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{6-6}
- & 3x^2 & -\ 6x & + & 9 & 3 \\ \cline{1-5}
 & & -\ 13x & + & 5 &
\end{array}$$

Cociente $\rightarrow$ 3; Resto $\rightarrow$ $-13x + 5$

c)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 5x^3 & +\ 3x^2 & -\ 2x & +\ 4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{6-6}
- & 5x^3 & -\ 5x^2 & -\ 5x & & 5x - 2 \\ \cline{1-4}
 & & -\ 2x^2 & -\ 7x & +\ 4 & \\
 & & 2x^2 & +\ 2x & +\ 2 & \\ \cline{3-5}
 & & & -\ 5x & 6 &
\end{array}$$

Cociente $\rightarrow$ $5x - 2$; Resto $\rightarrow$ $-5x + 6$

d)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
- & x^4 & & +\ 6x^2 & -\ 4 & x^2 - 2x \\ \cline{6-6}
 & x^4 & -\ 2x^3 & & & -x^2 - 2x \\ \cline{1-3}
 & & -\ 2x^3 & +\ 6x^2 & -\ 4 & \\
 & & 2x^3 & -\ 4x^2 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2x^2 & -\ 4 &
\end{array}$$

Cociente $\rightarrow$ $-x^2 - 2x$; Resto $\rightarrow$ $2x^2 - 4$

28 Halla el cociente y el resto de estas divisiones:

a) $(x^3 + 2x^2 + 1) : (x^2 + 1)$

b) $(2x^3 - x^2 - x + 1) : (x^2 - 1)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 2) : (x^2 + x - 1)$

d) $(x^4 - 5x^3 + 2x) : (x^2 - 2x + 1)$

a)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,2x^2 & & +\,1 & x^2 + 1 \\ \cline{5-5}
-\,x^3 & & -\,x & & x + 2 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & -\,x & +\,1 & \\
 & -\,2x^2 & & -\,2 & \\ \cline{2-4}
 & & -\,x & -\,1 &
\end{array}$$

Cociente $\to$ $x + 2$; Resto $\to$ $-x - 1$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -\,x^2 & -\,x & +\,1 & x^2 - 1 \\ \cline{5-5}
-\,2x^3 & & +\,2x & & 2x - 1 \\ \cline{1-4}
 & -\,x^2 & +\,x & +\,1 & \\
 & x^2 & & -\,1 & \\ \cline{2-4}
 & & x & &
\end{array}$$

Cociente $\to$ $2x - 1$; Resto $\to$ x

c)
$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,3x^2 & +\,2x & -\,2 & x^2 + x - 1 \\ \cline{5-5}
-\,x^3 & -\,x^2 & +\,x & & 2x - 4 \\ \cline{1-4}
 & -\,4x^2 & +\,3x & -\,2 & \\
 & 4x^2 & +\,4x & -\,4 & \\ \cline{2-4}
 & & 7x & -\,6 &
\end{array}$$

Cociente $\to$ $x - 4$; Resto $\to$ $7x - 6$

d)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -\,5x^3 & & +\,2x & & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & +\,2x^3 & -\,x^2 & & & x^2 - 3x - 7 \\ \cline{1-4}
 & -\,3x^3 & -\,x^2 & +\,2x & & \\
 & 3x^3 & -\,6x^2 & +\,3x & & \\ \cline{1-4}
 & & -\,7x^2 & +\,5x & & \\
 & & 7x^2 & -\,14x & +\,7 & \\ \cline{3-5}
 & & & -\,9x & +\,7 &
\end{array}$$

Cociente $\to$ $x^2 - 3x - 7$; Resto $\to$ $-9x + 7$

Factorización de polinomios

29 Aplica la regla de Ruffini para transformar en producto los polinomios siguientes:

a) $x^2 + 2x - 3$

b) $x^2 - 4x - 5$

c) $2x^2 - 5x + 2$

d) $x^2 - x - 6$

e) $2x^2 - x - 3$

f) $x^3 - x^2 - 4x + 4$

a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ -3 & & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+3)$$

$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

b)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & -5 \\ -1 & & -1 & 5 \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+1)$$

$x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$

c)
$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & 2 \\ 2 & & 4 & -2 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x-2)$$

$2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$

d)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -6 \\ 3 & & 3 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x-3)$$

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$

e)
$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -1 & -3 \\ -1 & & -2 & 3 \\ \hline & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+1)$$

$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$

f)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow (x-1) \\ \\ \rightarrow (x-2) \end{array}$$

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$

30 **Factoriza estos polinomios:**

a) $x^3 - 3x^2 + 2x$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

e) $4x^2 + 13x - 12$

f) $x^2 - 17x + 72$

g) $3x^3 - 9x^2 - 30x$

h) $-2x^4 - 8x^3 + 24x^2$

a) $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x-1)$$

$x(x-1)(x-2)$

b) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = x^2(x^2 - 2x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & -3 \\ -1 & & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+1)$$

$x^2(x+1)(x-3)$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x-3)(x+1)(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -5 & -3 \\ 3 & & 3 & 6 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow (x-3) \\ \\ \rightarrow (x+1) \end{array}$$

$(x-3)(x+1)(x+1)$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x+2)(x-3)(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -9 & -18 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & \boxed{0} \\ 3 & & 3 & 9 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow (x+2) \\ \\ \rightarrow (x-3) \end{array}$$

$(x+2)(x-3)(x+3)$

e) $4x^2 + 13x - 12 = (x+4)(4x-3)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & 13 & -12 \\ -4 & & -16 & 12 \\ \hline & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+4)$$

$(x+4)(4x-3)$

f) $x^2 - 17x + 72 = (x-2)(x-9)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -17 & 72 \\ 8 & & 8 & -72 \\ \hline & 1 & -9 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x-8)$$

$(x-2)(x-9)$

g) $3x^3 - 9x^2 - 30x = 3x(x^2 - 3x - 10)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & -10 \\ -2 & & -2 & 10 \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x+2)$$

$3x(x+2)(x-5)$

h) $-2x^4 - 8x^3 + 24x^2 = 2x^2(-x^2 - 4x + 12)$

$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & -4 & 12 \\ 2 & & -2 & -12 \\ \hline & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x-2)$$

$2x^2(x-2)(-x-6)$

Fracciones algebraicas

31 **Simplifica estas fracciones algebraicas:**

a) $\frac{9x}{12x^2}$ **b)** $\frac{x(x+1)}{5(x+1)}$ **c)** $\frac{x^2(x+2)}{2x^3}$

d) $\frac{x+5}{(x+5)^2}$ **e)** $\frac{2x^2-4x}{x-2}$ **f)** $\frac{x^2-2x}{3x}$

a) $\frac{9x}{12x^2} = \frac{3}{4x}$ b) $\frac{x(x+1)}{5(x+1)} = \frac{x}{5}$ c) $\frac{x^2(x+2)}{2x^3} = \frac{x+2}{2x^3}$

d) $\frac{x+5}{(x+5)^2} = \frac{1}{x+5}$ e) $\frac{2x^2-4x}{x-2} = \frac{2x(x-2)}{(x-2)} = 2x$

f) $\frac{x^2-2x}{3x} = \frac{x(x-2)}{3x} = \frac{x-2}{3}$

32 **Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. Para ello, saca factor común:**

a) $\frac{x^2-4x}{x^2}$ **b)** $\frac{3x}{x^2+2x}$ **c)** $\frac{3x+3}{(x+1)^2}$

d) $\frac{2x^2+4x}{x^3+2x^2}$ **e)** $\frac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2}$ **f)** $\frac{5x^3+5x}{x^4+x^2}$

a) $\frac{x^2-4x}{x^2} = \frac{x(x-4)}{x^2} = \frac{x-4}{x}$ b) $\frac{3x}{x^2+2x} = \frac{3x}{x(x+2)} = \frac{3}{x+2}$

c) $\frac{3x+3}{(x+1)^2} = \frac{3(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1}$ d) $\frac{2x^2+4x}{x^3+2x^2} = \frac{2x(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{2}{x}$

e) $\frac{8x^3-4x^2}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2(2x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2}{2x-1}$ f) $\frac{5x^3+5x}{x^4+x^2} = \frac{5x(x^2+1)}{x^2(x^2+1)} = \frac{5}{x}$

33 **Simplifica. Para ello, transforma en producto el numerador y el denominador.**

a) $\frac{2x+4}{3x^2+6x}$ **b)** $\frac{x+1}{x^2-1}$ **c)** $\frac{x-2}{x^2+4-4x}$

d) $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ **e)** $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$ **f)** $\frac{x^3+2x^2+x}{3x+3}$

a) $\frac{2x+4}{3x^2+6x} = \frac{2(x+2)}{3x(x+2)} = \frac{2}{3x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

c) $\frac{x-2}{x^2+4-4x} = \frac{x-2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2}$ d) $\frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x}{x+3}$

e) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x-2}{x+2}$

f) $\frac{x^3+2x^2+x}{3x+3} = \frac{x(x^2+2x+1)}{3(x+1)} = \frac{x(x+1)^2}{3(x+1)} = \frac{x(x+1)}{3}$

34 Simplifica.

a) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^4-9x^2}$

b) $\dfrac{4x^4+4x^3+x^2}{4x^2-1}$

c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^3-x^2-4x+4}$

d) $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2}{x^3-4x^2-5x}$

a) $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^4-9x^2}=\dfrac{x(x^2-6x+9)}{x(x^2-9x)}=\dfrac{(x^2-6x+9)}{x^2-9x}=\dfrac{(x^2)-2\cdot 3\cdot x+(3)^2}{x(x+3)(x-3)}=$

$=\dfrac{(x-3)^2}{x(x+3)(x-3)}=\dfrac{x-3}{x(x+3)}$

b) $\dfrac{4x^4+4x^3+x^2}{4x^2-1}=\dfrac{x^2(4x^2+4x+1)}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{x^2((2x)^2+2\cdot 2x+1^2)}{(2x-1)(2x+1)}=$

$=\dfrac{x^2(2x+1)^2}{(2x-1)(2x+1)}=\dfrac{x^2(2x+1)}{2x-1}$

c) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^3-x^2-4x+4}=\dfrac{x(x^2-3x+2)}{(x-1)(x^2-4)}=\dfrac{x(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\dfrac{x}{x+2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} * & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array} \;\to\; (x-1)$$

$(x-1)(x^2-4)$

$$\begin{array}{r|rrr} * & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array} \;\to\; (x-2)$$

$(x-2)(x-1)$

d) $\dfrac{x^4-2x^3-3x^2}{x^3-4x^2-5x}=\dfrac{x^2(x^2-2x-3)}{x(x^2-4x-5)}=\dfrac{x^2(x+1)(x-3)}{x(x+1)(x-5)}=\dfrac{x(x-3)}{(x-5)}$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & -3 \\ -1 & & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array} \;\to\; (x+1)$$

$(x+1)(x-3)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & -5 \\ -1 & & -1 & 5 \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array} \;\to\; (x+1)$$

$(x+1)(x-5)$

35 Reduce a mínimo común denominador y opera estas expresiones:

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

b) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{2x}-\dfrac{5}{3x}$

c) $\dfrac{5}{2x}-\dfrac{3}{x^2}$

d) $\dfrac{3-x}{x}+\dfrac{x-1}{x^2}$

a) $\dfrac{x+2}{x^2}$

b) $\dfrac{18+3-10}{6x}=\dfrac{11}{6x}$

c) $\dfrac{5x-6}{2x^2}$

d) $\dfrac{x(3-x)+x-1}{x^2}=\dfrac{-x^2+4x-1}{x^2}$

36 Opera y reduce.

a) $\frac{x+2}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$

b) $\frac{x-3}{2x} \cdot \frac{x^2}{x-3}$

c) $\frac{3}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{2}$

d) $\frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$

e) $\frac{5}{x-2} : \frac{x-1}{x-2}$

f) $\frac{x+5}{5x} : \frac{x+5}{x^2}$

a) $\frac{x+2}{3(x+2)} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{x^2(x-3)}{2x(x-3)} = \frac{x}{2}$

c) $\frac{3(x+2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{3}{2(x-2)}$

d) $\frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x}$

e) $\frac{5(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{5}{x-1}$

f) $\frac{x^2(x+5)}{5x(x+5)} = \frac{x}{5}$

37 Opera, y simplifica si es posible.

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2}$

a) $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{3x}{(x+1)x^2} = \frac{3}{(x+1)x}$

b) $\frac{3x+2}{x-1} : \frac{x+1}{x} = \frac{x(3x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+2x}{x^2-1}$

c) $\frac{3}{(x-1)^2} : \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)^2} = \frac{3}{2(x-1)}$

d) $(x+1) : \frac{x^2-1}{2} = \frac{2(x+1)}{x^2-1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x-1}$

Página 104

Resuelve problemas

38 **Expresa en lenguaje algebraico:**

a) La cantidad de agua que queda en un depósito del que se sacan 1/3 y después los 2/5 de lo que queda.

b) Lo que pagué por un bocadillo, un refresco y una chocolatina, si el bocadillo cuesta el triple que el refresco y el refresco 1 € más que la chocolatina.

a) Se sacan $\frac{1}{3} \to 1-\frac{1}{3}$.

Se sacan de lo que queda $\frac{2}{5} \to -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$.

Luego $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$.

Sea $x \to$ La cantidad de agua del depósito $\to x-\frac{x}{3}-\frac{4x}{15} \to \frac{2x}{5}$.

b) Sea $x \to$ Lo que cuesta la chocolatina.

El refresco cuesta $\to x+1$.

El bocadillo $\to 3(x+1)$.

Luego en total $\to x+(x+1)+3(x+1)=5x+4$.

39 **Con el dinero que tiene Laura, puede comprar tres cómics del mismo precio y le sobran 8 €. Al día siguiente ve que los cómics han bajado 2 € y piensa que con el dinero que tenía ayer podría comprar 5 cómics a este precio. Escribe de forma algebraica este enunciado.**

Sea $x \to$ Lo que cuestan los cómics el primer día.

Luego $\to 3x+8=5(x-2)$.

40 ***La mitad de un número es 20 unidades menor que su triple.* Elige la expresión de este enunciado.**

a) $\frac{x-20}{2}=3x$ **b)** $\frac{x}{2}-20=3x$ **c)** $\frac{x}{2}+20=3x$

Es la c).

41 **Si Jorge tiene 12 años y su madre 38, ¿cuántos años, x, tienen que pasar para que la edad de su madre sea el doble de la de Jorge? Indica la igualdad que representa esta situación.**

a) $2(x+38)=x+12$ **b)** $38=2(x+12)$ **c)** $38+x=2(12+x)$

c) $38+x=2(12+x)$.

42 **Un grupo de amigos quiere comprar un regalo para María y les toca a 12 € cada uno. Si fueran tres amigos más, les tocaría a 4 € menos cada uno. ¿Cuál de estas igualdades representa este enunciado?**

a) $12(x - 4) = 8(x + 3)$ **b)** $12x = 8(x + 3)$ **c)** $12x = 9(x + 4)$

La igualdad b).

43 **La expresión $10a + b$ representa un número de dos cifras. Escribe en forma algebraica:**

a) Un número de tres cifras.

b) El siguiente y el anterior al que has escrito en a).

c) La diferencia entre un número de tres cifras y el que resulta de invertir sus cifras.

a) $100a + 10b + c$

b) $100a + 10b + c + 1$ y $100a + 10b + c - 1$

c) $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$

44 **Si mezclamos 6 kg de pintura con 9 kg de otra que cuesta 3 € menos por kilo, la mezcla nos sale a 5,20 €/kg. Si x es el precio de la pintura cara, rellena la tabla y expresa algebraicamente este enunciado.**

	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
PINTURA 1	6	x	$6x$
PINTURA 2	9		
MEZCLA		5,20	

	CANTIDAD (KG)	PRECIO (€/KG)	COSTE (€)
PINTURA 1	**6**	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{6x}$
PINTURA 2	**9**	$x - 3$	$9(x - 3)$
MEZCLA	15	**5,20**	$6x + 9(x - 3)$

Coste de la mezcla $\rightarrow \dfrac{6x + 9(x - 3)}{15} = 5{,}20$ €

45 **Si a un número de dos cifras le sumamos 10, se obtiene el doble del número obtenido al invertir sus cifras. Escribe este enunciado de forma algebraica.**

Sea $x \rightarrow$ Cifra de las decenas
Sea $y \rightarrow$ Cifra de las unidades

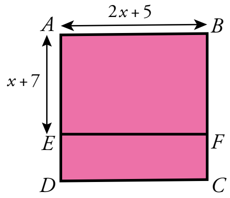
$10x + y + 10 = 2(10y + x)$

46 **Dos ciclistas salen a la misma hora, una de A hacia B a 22 km/h y la otra de B hacia A a 18 km/h. La distancia entre A y B es 30 km. Si llamamos x al tiempo que tardan en encontrarse, ¿cuál es la expresión que representa este enunciado?**

a) $22x = 18(30 - x)$ **b)** $40x = 30$ **c)** $\dfrac{x}{22} + \dfrac{30 - x}{18} = x$

$x \rightarrow$ Tiempo que tardará en encontrarse $\rightarrow 22x + 18x = 30 \rightarrow (22 + 18)x = 30 \rightarrow$
$\rightarrow 40x = 30 \rightarrow$ La b).

47 ***ABCD* es un cuadrado de lado $2x + 5$ m. Al trazar una paralela a *AB* (que llamamos *EF*) a una distancia $x + 7$ m de *AB*, obtenemos dos rectángulos *EFCD* y *ABFE*.**



a) Expresa en función de x las áreas del cuadrado y del rectángulo *EFCD*.

b) Indica qué representa en la figura esta expresión: $(2x + 5)^2 – (2x + 5) \cdot (x – 2)$

c) ¿Y la expresión $6x + 6$?

a) Área del cuadrado $\rightarrow A_{ABCD} = l^2 \rightarrow A_{ABCD} = (2x + 5)^2$

Área del rectángulo $\rightarrow b \cdot h$

Base de *EFCD* $\rightarrow 2x + 5$

Altura de *EFCD* $\rightarrow (2x + 5) – (x + 7)$

$A_{EFCD} = (2x + 5)[(2x + 5) – (x + 7)] = (2x + 5)(x – 2) = 2x^2 – 4x + 5x – 10 =$
$= 2x^2 + x – 10 \text{ m}^2$

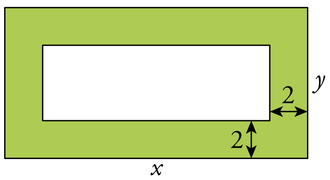
b) $(2x – 5)^2 \rightarrow$ Área del cuadrado *ABCD*.

$(2x + 5)(x – 2) \rightarrow$ Área del rectángulo *EFCD*.

Luego $(2x + 5)^2 – (2x + 5)(x – 2) \rightarrow$ Área del rectángulo *ABFE*.

c) $6x + 6 = (2x + 4x) + (10 – 4) = (2x – 4) + (4x + 10) = 2(x – 2) + 2(2x + 5) \rightarrow$ Perímetro de *EFCD*.

48 **Expresa algebraicamente el área de la parte coloreada.**



$A = xy – (x – 4)(x – 4) = xy – (xy – 4x – 4y + 16) = 4x + 4y – 16$

49 **Piensa en tres números consecutivos. Resta al cuadrado del mayor el cuadrado del menor. Divide el resultado por el del medio. ¡Obtienes siempre 4!**

Justifícalo utilizando el lenguaje algebraico.

Tres números consecutivos son x; $x + 1$; $x + 2$

$(x + 2)^2 – x^2 = x^2 + 4x + 4 – x^2 = 4x + 4$

$$\frac{4x + 4}{x + 1} = \frac{4(x + 1)}{x + 1} = 4$$

50 **Escribe tres números impares consecutivos. Suma 3 al menor y elévalo al cuadrado. Réstale el producto de los otros dos. ¿Qué obtienes?**

Tres números impares consecutivos: $2x – 1$, $2x + 1$, $2x + 3$

$(2x – 1 + 3)^2 – (2x + 1)(2x + 3) = (2x + 2)^2 – (2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + 8x + 4 – 4x^2 – 8x – 3 = 1$

Siempre se obtiene 1.

51 **Piensa un número cualquiera, multiplícalo por 2, réstale 10, réstale el número pensado, súmale 3 y dime el resultado.**

Razona por qué obtengo el número inicial sumando 7 al resultado que me des.

Llamamos x al número pensado.

Multiplícalo por 2: $2x$

Réstale 10: $2x - 10$

Réstale el número pensado: $2x - 10 - x = x - 10$

Súmale 3: $x - 10 + 3 \rightarrow x - 7$

Si al resultado le sumo 7, obtengo x.

52 **Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, resta 4, divide por 2 y dime el resultado.**

¿Cómo puedo saber el número que has pensado?

Llamamos x al número pensado.

Le sumamos 7: $x + 7$

Multiplicamos por 2: $2x + 14$

Restamos 4: $2x + 10$

Dividimos por 2: $x + 5$

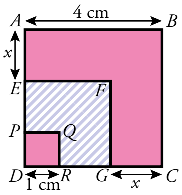
Si restamos 5 al resultado, obtenemos x.

Página 105

Resuelve: un poco más difícil

53 **En la figura *ABCD*, *EFGD* y *PQRD* son cuadrados.**

a) Expresa en función de *x* las longitudes de *DG* y *RG*, y el área de *EFGD*.



b) ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al área de la parte rayada?

$A_1 = 16 - (4 - x)^2$ $\quad\quad$ $A_2 = (4 - x)(3 - x)$

$A_3 = (4 - x)^2 - 1$

c) Copia el dibujo en tu cuaderno y señala en él qué representan las otras dos expresiones.

a) $DG = AB - GC \rightarrow DG = 4 - x$

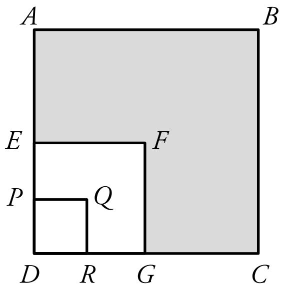
$RG = AB - DR - GC \rightarrow RG = 4 - 1 - x \rightarrow RG = 3 - x$

$RG = AB - DR - GC \rightarrow RG = 4 - 1 - x \rightarrow RG = 3 - x$

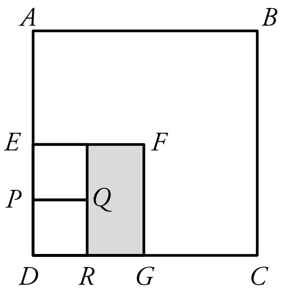
Área $EFGD = (DG)^2 \rightarrow$ Área $EFGD = (4 - x)^2$

b) El área de la parte rayada es el Área *EFGD* menos Área *PQRD* $\rightarrow (4 - x)^2 - 1^2 \rightarrow A_3$

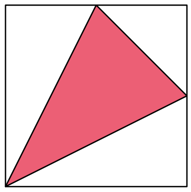
c) $A_1 = 16 - (4 - x)^2 \rightarrow$



$A_2 = (4 - x)(3 - x) \rightarrow$



54 **Expresa algebraicamente el área y el perímetro de la parte coloreada.**



x

Dos de los vértices del triángulo coinciden con puntos medios de los lados del cuadrado.

Calculamos el lado mayor del triángulo, L:

$$L^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow L = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2}$$

Calculamos el lado menor del triángulo, l:

$$l = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Calculamos la altura que corresponde al lado menor del triángulo, h:

$$h^2 = L^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}x^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5x^2}{4} - \frac{x^2}{8} = \frac{10x^2 - x^2}{8} = \frac{9x^2}{8} \rightarrow h = \frac{3x}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Perímetro} = 2L + l = \sqrt{5}x + \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}x + \frac{\sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5}x + \sqrt{2}x}{2} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}x$$

$$\text{Área} = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3x}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{8}x^2$$

55 **¿Cuántos números de dos cifras verifican que sumando sus dos cifras más el producto de estas nos da el número inicial?**

Suponemos que el número es ab.

$$a + b + a \cdot b = 10a + b \rightarrow ab = 9a \rightarrow b = 9$$

Los números que acaben en 9 cumplirán esta regla.

56 **Observa:**

1 + 3 = 4 = 2²

1 + 3 + 5 = 9 = 3²

1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4²

¿Cuál será el valor de 1 + 3 + 5 + … + 19?

¿Y de 1 + 3 + 5 + … + *n*?

Expresa con palabras esta propiedad e intenta demostrarla.

$1 + 3 + 5 + \ldots + 19$ es la suma de los 10 primeros términos de la progresión 1, 3, 5, 7…
$a_n = 2n - 1$

$$S_{10} = \frac{1+19}{2} \cdot 10 = 100 = 10^2$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + n \rightarrow S_n = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = n^2$$

La suma de los n primeros números impares es igual a n^2.

57 **Si $a \cdot b = 9$, $b \cdot c = 16$ y $a \cdot c = 25$, ¿cuánto vale $a \cdot b \cdot c$?**

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 9 \\ b \cdot c = 16 \\ a \cdot c = 25 \end{array}\right\rangle\ ab \cdot bc \cdot ac = 9 \cdot 16 \cdot 25 \ \to\ a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (3)^2 \cdot (4)^2 \cdot (5)^2 \ \to$$

$\to\ a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 5$

Reflexiona

58 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) El grado de la suma de dos polinomios de grados 2 y 3 es siempre 3.

b) Al multiplicar dos polinomios de grados 2 y 3 se obtiene otro de grado 5.

c) El producto de un binomio por un monomio es un binomio.

d) Si multiplicamos dos monomios, obtenemos un binomio.

e) Si la suma de dos monomios es positiva, también lo es su producto.

a) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q(x) = ex^2 + fx + g$

$P(x) + Q(x) = ax^3 + (b + e)x^2 + (c + f)x + (d + g) \ \to$ Grado 3.

Verdadero.

b) $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$Q(x) = ex^2 + fx + g$

$P(x) + Q(x) = (a \cdot e)ax^{3+2} + (a \cdot f + b \cdot e)x^4 + ((a \cdot g) + (b \cdot f) + (c \cdot e))x^3 +$
$+ ((d \cdot e) + (c \cdot f) + (b \cdot g))x^2 + ((c \cdot g) + (d \cdot g))x + d \cdot g \ \to$ Grado 5.

Verdadero.

c) ax^n

$(by^m + cz^p)$

$ax^n(by^m + cz^p) = abx^ny^m + acx^ny^p \ \to$ Binomio.

Verdadero.

d) $2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4 \ \to$ Monomio.

Falso.

e) $-2x^2$

$3x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Suma} \ \to\ -2x^2 + 3x^2 = x^2 \\ \text{Producto} \ \to\ -2x^2 \cdot 3x^2 = -6x^4 \end{array}\right. \ \to\ \text{Falso.}$$

59 **Expresa algebraicamente y comprueba si estas afirmaciones son verdaderas:**

a) La suma de un número par y otro impar es siempre impar.

b) La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es siempre un número impar.

c) Si multiplicas dos números impares consecutivos y sumas 1, obtienes siempre un múltiplo de 4.

a) Número par $\rightarrow 2n$

Número impar $\rightarrow 2n + 1$

Suma $\rightarrow 2n + 2n + 1 = 4n + 1 \rightarrow$ Impar.

Verdadero.

b) Número entero $\rightarrow n$

El número entero siguiente $\rightarrow n + 1$

$(n)^2 + (n + 1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2(n^2 + n) + 1 \rightarrow$ Impar.

Verdadero.

c) Número impar $\rightarrow 2n + 1$

El número impar siguiente $\rightarrow 2n + 3$

$(2n + 1)(2n + 3) + 1 = 4n^2 + 8n + 4 = 4(n^2 + 2n + 2) \rightarrow$ Múltiplo de 4.

Verdadero.

60 **Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.**

a) $(x + a)^2 = (-x - a)^2$ **b)** $(x - a)^2 = (a - x)^2$ **c)** $-(x)^2 = x^2$

a) Verdadero. Por ejemplo: $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25 = (-3 - 2)^2 = (-5)^2 = 25$

$(-x - a)^2 = [-(x + a)]^2 = (x + a)^2$

b) Verdadero. Por ejemplo: $(8 - 5)^2 = 3^2 = 9 = (5 - 8)^2 = (-3)^2$

$(x - a)^2 = [-(-x + a)]^2 = (-x + a)^2 = x^2 + a^2 - 2ax$

c) Falso. Por ejemplo: $-(2)^2 = -4 \neq 2^2$

61 **¿Cuál debe ser el valor de k para que –2 sea raíz del polinomio $x^3 - 5x^2 - 7x + k$? Justifica tu respuesta.**

Para que –2 sea raíz de ese polinomio, al dar a x ese valor el polinomio debe ser igual a 0. Por tanto:

$(-2)^3 - 5\,(-2)^2 - 7\,(-2) + k = 0 \rightarrow -8 - 20 + 14 + k = 0 \rightarrow k = 14$

62 **a) Simplifica la expresión $(a + 1)^2 - (a - 1)^2$.**

b) Halla, sin utilizar la calculadora, el valor de:

$$2\,501^2 - 2\,499^2$$

a) $(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a^2 + 1 + 2a) - (a^2 + 1 - 2a) = a^2 + 1 + 2a - a^2 - 1 + 2a = 4a$

b) $2\,501^2 - 2\,499^2 = 4 \cdot 2\,500 = 10\,000$

63 Averigua cuál debe ser el valor de a, en cada caso, para que las dos expresiones sean idénticas:

a) $(3x + a)(3x - a) + 7$ y $9x^2 - 18$ **b) $(x - a)^2 + 2xa - 46$ y $x^2 + 18$**

a) $(3x + a)(3x - a) + 7 = 9x^2 - a^2 + 7$

Si $9x^2 - a^2 + 7 = 9x^2 - 18 \rightarrow -a^2 + 7 = -18 \rightarrow a^2 = 25 \begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases}$

b) $(x - a)^2 + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 2xa + 2xa - 46 = x^2 + a^2 - 46$

Si $x^2 + a^2 - 46 = x^2 + 18 \rightarrow a^2 - 46 = 18 \rightarrow a^2 = 64 \begin{cases} a = 8 \\ a = -8 \end{cases}$

64 Al simplificar la fracción algebraica $\dfrac{6x^4 - 8x^3}{12x^2}$, ¿cuál de estas fracciones se obtiene? Justifícalo.

a) $\dfrac{3x^2 - 4x}{2}$ **b) $\dfrac{x^2 - 8x^3}{6}$** **c) $\dfrac{3x^2 - 4x}{6}$**

La c): $\dfrac{6x^4 - 8x^3}{12x^2} = \dfrac{2x^2(3x^2 - 4x)}{12x^2} = \dfrac{3x^2 - 4x}{6}$

65 El polinomio $P(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2x + 1)$ puede descomponerse en cuatro factores de primer grado. ¿Cuáles son?

$(x^2 - 4) = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow (x + 1)$$

$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 1)(x + 1)$

66 Piensa y completa en tu cuaderno sin hacer operaciones.

a) $x^4 - 16 = (x^2 + \square)(x + \square)(x - \square)$

b) $(2x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (\square x - 1)(x + \square)$

a) $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

b) $((2x + 1) + (x - 2))((2x + 1) - (x - 2)) = (3x - 1)(x + 3)$

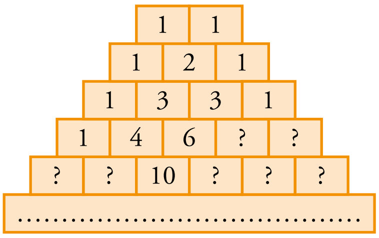
Página 106

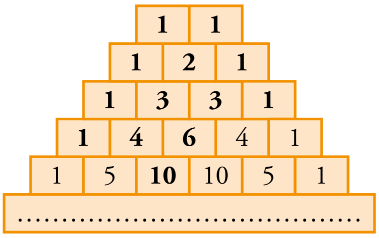
Investiga

Un triángulo curioso

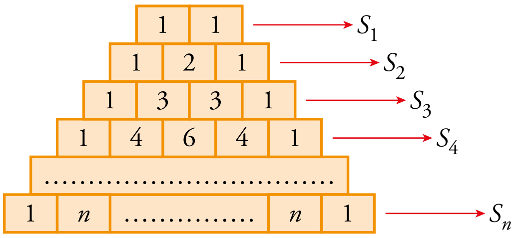
La colección de números que tienes a la derecha, que se abre indefinidamente hacia abajo, tiene multitud de regularidades curiosas, pero, antes que nada, averigua cómo se construye.

¿Podrías completar las casillas vacías?





- **Suma los números de cada fila y completa la tabla:**

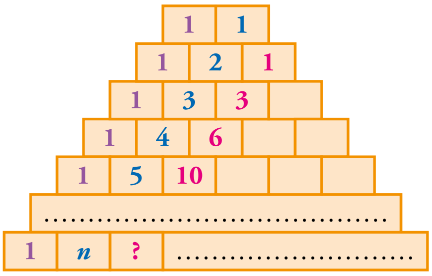


S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	4	8			…	

Escribe una expresión algebraica para calcular la suma de los términos de la fila enésima, S_n.

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	…	S_n
2	4	8	16	32	…	2^n

- **Fíjate en estas tres escaleras de números:**



Observa que:

3 = 1 + 2

6 = 1 + 2 + 3

10 = ...

¿Cuál es el tercer número de la 6.ª fila? | 1 | 6 | ? |

¿Y el de la número 20 (vigésima)? | 1 | 20 | ? |

Escribe una expresión algebraica para la tercera casilla de la enésima fila: | 1 | *n* | ? |

Los números de la tercera escalera coinciden con las sucesivas sumas de los primeros números naturales.

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Así: $a_{20} = 1 + 2 + \ldots + 20 = \dfrac{(1 + 20) \cdot 20}{2} = 210$

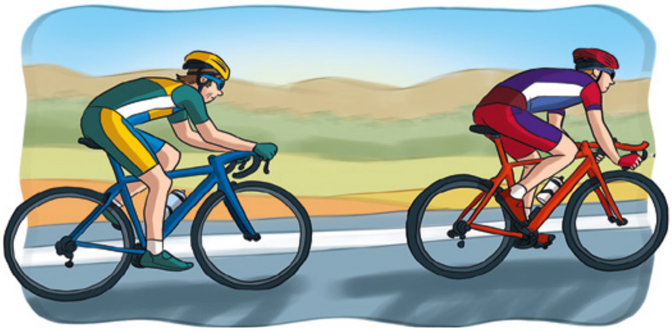
Y, por fin: $a_n = \dfrac{(1 + n) \cdot n}{2}$

Página 107

Entrénate resolviendo problemas

- **Dos ciclistas parten del mismo lugar, a la misma hora y en el mismo sentido. Sus velocidades respectivas son 30 km/h y 24 km/h.**

  ¿Qué ventaja le sacará el primero al segundo cuando haya transcurrido una hora y cuarenta minutos?

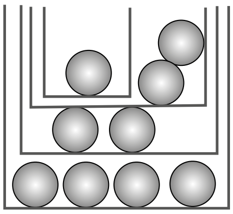


Los ciclistas se distancian a una velocidad de $\rightarrow$ $30 - 24 = 6$ km/h

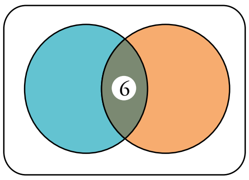
$$1 \text{ h } 40 \text{ min} = 1 \text{ h} + \frac{4}{6} \text{ h} = \frac{10}{6} \text{ h} = \frac{5}{3} \text{ h}$$

En $\frac{5}{3}$ h se distancian $\rightarrow$ $6 \cdot \frac{5}{3} = 10$ km

- **Después de la clase de Educación Física, hemos guardado en 4 cajas los 9 balones que teníamos. Cada caja contiene un número impar de balones y en ningún caso coinciden el número de balones de dos cajas. ¿Cómo es posible?**



- **De 30 jóvenes a los que se entrevistó en una sala de baile, 15 declararon ser aficionados al rock, y 13, al electro-latino. De ellos, 6 aseguraron ser aficionados a ambos ritmos musicales.**



Rock
Electro-latino
Ni rock ni electro-latino

¿Cuántos no son aficionados ni a lo uno ni a lo otro?

Como hay 6 a quienes les gusta el rock y el electro-latino, a los chicos y a las chicas que les gusta uno de los dos estilos o ambos a la vez son: $15 + 13 - 6 = 22$.

Como en total hay 30, a quienes no les gusta ni lo uno ni lo otro son $30 - 22 = 8$.

AUTOEVALUACIÓN

1 Describe, mediante una expresión algebraica, los enunciados siguientes:

a) El precio de la pintura que se obtiene al mezclar 5 kg de una de 3 €/kg con 7 kg de otra de x €/kg.

b) Lo que tenemos que pagar por un helado, un refresco y un café, si el helado cuesta el triple que el café y el refresco la mitad que el helado.

c) El área total y el volumen de un prisma de base cuadrada de lado x y de 5 cm de altura.

a) El precio es $\dfrac{3 \cdot 5 + 7 \cdot x}{5 + 7} = \dfrac{15 + 7x}{12}$

b) Si x es el precio de un café, $x + 3x + \dfrac{3}{2}x = \dfrac{2x + 6x + 3x}{2} = \dfrac{11}{2}x$

c) Área total $= 2x^2 + 4 \cdot 5x = 2x^2 + 20x$

Volumen $= x^2 \cdot 5 = 5x^2$

2 Efectúa y reduce.

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x$ **b)** $4\left[(x - 2)^2 - \dfrac{3}{4}x^2 - 4\right]$

a) $x(3x - 2)^2 - (x - 3)(2x - 1)x = 9x^3 - 12x^2 + 4x - 2x^3 + 7x^2 - 3x = 7x^3 - 5x^2 + x$

b) $\left[(x - 2)^2 - \dfrac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4\left[x^2 - 4x + 4 - \dfrac{3}{4}x^2 - 4\right] = 4x^2 - 16x + 16 - 3x^2 - 16 = x^2 - 16x$

3 Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

$$\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x-1)}{2}$$

$$36\left(\frac{5(x-1)}{9} + \frac{7x-2}{12} - \frac{x(x-1)}{2}\right) = 20(x-1) + 3(7x-2) - 18x(x-1) =$$

$$= 20x - 20 + 21x - 6 - 18x^2 + 18x = -18x^2 + 59x - 26$$

4 Transforma en productos el numerador y el denominador y simplifica la fracción siguiente:

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9}$$

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x^2 - 9} = \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{2x-3}{2x+3}$$

5 **Calcula el cociente y el resto en cada caso:**

a) $(3x^4 - x^3 + 2x^2 + 4) : (x^2 + x)$ **b)** $(x^3 + 3x^2 - 2x + 2) : (x + 2)$

a)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -\ x^3 & +\ 2x^2 & & +\ 4 & x^2 + x \\
\cline{6-6}
-\ 3x^4 & -\ 3x^3 & & & & 3x^2 - 4x + 6 \\
\cline{1-2}
 & -\ 4x^3 & +\ 2x^2 & & +\ 4 & \\
 & +\ 4x^3 & +\ 4x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 6x^2 & & +\ 4 & \\
 & & -\ 6x^2 & -\ 6x & +\ 4 & \\
\cline{3-5}
 & & & -\ 6x & +\ 4 &
\end{array}
$$

Cociente: $3x^2 - 4x + 6$; Resto: $-6x + 4$

b)
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -2 & 2 \\
-2 & & -2 & -2 & 8 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & 10
\end{array}
$$

Cociente: $x^2 + x - 4$; Resto: 10

6 **Extrae factor común, localiza identidades notables y busca las raíces para factorizar estos polinomios:**

a) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

b) $3x^4 - 30x^3 + 75x^2$

c) $x^3 + 3x^2 - 4$

d) $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$

a)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -9 & 7 & 6 \\
2 & & 4 & -10 & -6 \\ \hline
 & 2 & -5 & -3 & \boxed{0} \;\to\; (x-2) \\
3 & & 6 & 3 & \\ \hline
 & 2 & 1 & \boxed{0} \;\to\; (x-3) &
\end{array}$$

$(x - 2)(x - 3)(2x + 1)$

b) $3x^4 - 30x^3 + 75x^2 = x^2\,(3x^2 - 30x + 75)$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & -30 & 75 \\
5 & & 15 & -75 \\ \hline
 & 3 & -15 & \boxed{0} \;\to\; (x-5)
\end{array}$$

$x^2(x - 5)(3x - 15) = 3x^2(x - 5)(x - 5) = 3x^2(x - 5)^2$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
1 & & 1 & 4 & 4 \\ \hline
 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \;\to\; (x-1) \\
-2 & & -2 & -4 & \\ \hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} \;\to\; (x+2) &
\end{array}$$

$(x - 1)(x + 2)(x + 2) = (x - 1)(x + 2)^2$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 3 & -15 & -19 & 30 \\
1 & & 1 & 4 & -11 & -30 \\ \hline
 & 1 & 4 & -11 & -30 & \boxed{0} \;\to\; (x-1) \\
-2 & & -2 & -4 & 30 & \\ \hline
 & 1 & 2 & -15 & \boxed{0} \;\to\; (x+2) & \\
3 & & 3 & 15 & & \\ \hline
 & 1 & 5 & \boxed{0} \;\to\; (x-3) & &
\end{array}$$

$(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 5)$

7 **Opera y simplifica.**

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

b) $\dfrac{x-2}{x} \cdot 3x$

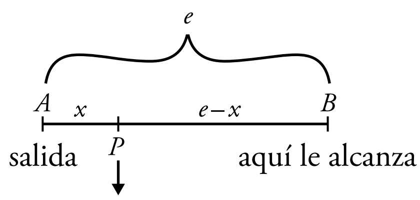
a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x-2}{x^2}$

$\downarrow$

m.c.m. $= x^2$

b) $\dfrac{x-2}{x} \cdot 3x = \dfrac{(x-2)\cdot 3\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot (x-2)\cdot 3 = 3x = 6$

8 **Un autobús que va a 90 km/h ha recorrido x km cuando sale un coche a 120 km/h en la misma dirección. Expresa en función de x el tiempo que tardará en alcanzarlo.**



(aquí se encuentra el bus cuando sale el coche)

$v = \frac{e}{t} \rightarrow e = v \cdot t$

Sea t = tiempo que tarda en alcanzarlo.

En el tiempo t el coche se desplaza de A a B.

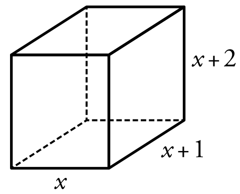
En el tiempo t el bus se desplaza de p a B.

$v = \frac{e}{t} \rightarrow e = v \cdot t$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Bus: } t = \dfrac{e-x}{90} \\ \text{Coche: } t = \dfrac{e-x}{120} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{e-x}{90} = \frac{e}{120} \rightarrow 120e - 120x = 90e \rightarrow 30e = 120e \rightarrow e = 4x \rightarrow$$

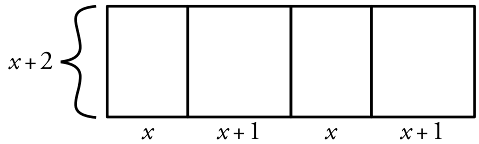
$$\rightarrow t = \frac{e}{120} = \frac{4x}{120} = \frac{x}{30} \rightarrow t = \frac{x}{30} \text{ horas}$$

9 **Escribe de forma algebraica el área y el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son tres números naturales consecutivos.**



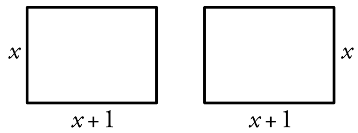
Área total = Área de las caras laterales + Área de las bases

1.º Calculamos el área de la cara lateral:



$A_l = (x + x + 1 + x + x + 1) \cdot (x + 2) = (4x + 2) \cdot (x + 2)$

2.º Calculamos el área de las bases:



$A_b = 2x(x + 1)$

Luego el área total es:

$A_t = (4x + 2) \cdot (x + 2) + 2x \cdot (x + 1) = 4x^2 + 2x + 8x + 4 + 2x^2 + 2x$

$A_t = 6x^2 + 12x + 4$

Volumen = $A_{base} \cdot$ altura $\to V = x(x + 1) \cdot (x + 2) \to V = (x^2 + x)(x + 2) \to$

$\to V = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x \to V = x^3 + 3x^2 + 2x$

10 **Vendo 1/5 de mi colección de minerales y luego compro 54 más. Ahora tengo el doble que al principio. Expresa algebraicamente este enunciado.**

x = n.º minerales.

1) Vende $\frac{1}{5}x \to$ Le quedan $\frac{4}{5}x$

2) Compra 54 $\to$ ahora tiene $\frac{4}{5}x + 54$

Luego tiene el doble que al principio $\to \frac{4}{5}x + 54 = 2x$

6 ECUACIONES

Página 109

Resuelve

1 **Traduce a lenguaje algebraico y resuelve por tanteo el problema del papiro egipcio: *El montón más un séptimo del montón…***

$x + \frac{x}{7} = 24 \rightarrow x = 21$

2 **Selecciona, entre las siguientes ecuaciones, la traducción algebraica del problema de los elefantes. Resuélvela primero por tanteo e intenta después resolverla aplicando algún otro método de resolución que conozcas.**

I $\boxed{x + x^2 + x^4 = 2x}$ II $\boxed{x + 2x + 4x = x^2}$ III $\boxed{x + 2x + 4x = (6x)^2}$

$x + 2x + 4x = x^2 \rightarrow x = 7$ (por tanteo)

$7x = x^2 \rightarrow x^2 - 7x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 7) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no es solución)} \\ x = 7 \end{cases}$

3 **¿Cuál de las siguientes ecuaciones resuelve el epitafio de Diofanto?**

I $\boxed{\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x}$ II $\boxed{\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{5}{x} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x} = 1}$

¿A qué edad murió?

Supongamos que la vida entera de Diofanto duró x años. Entonces:

- Juventud: $\frac{x}{6}$
- Su mejilla se cubrió de vello: $+\frac{x}{12}$
- Antes de casarse: $+\frac{x}{7}$
- Tuvo un hijo: +5
- Su hijo murió a los $\frac{x}{2}$ años.
- Diofanto vivió luego: +4

Por tanto, Diofanto vivió:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \rightarrow x = \frac{14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336}{84} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{75x + 756}{84} \rightarrow 84x = 75x + 756 \rightarrow$$

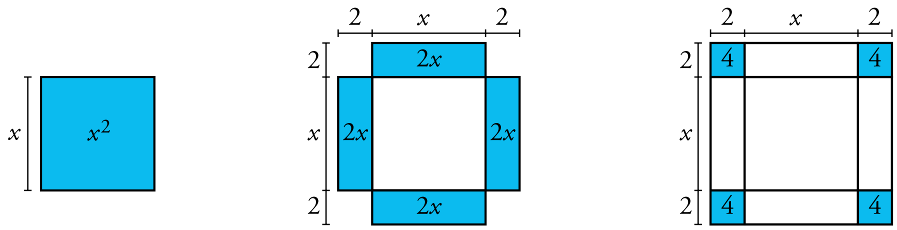
$$\rightarrow 9x = 756 \rightarrow x = 84$$

Diofanto murió a los 84 años.

4 **Resuelve mediante el método geométrico expuesto arriba:**

a) $x^2 + 8x = 84$ **b)** $x^2 + 20x = 69$

a) $x^2 + 8x = 84$

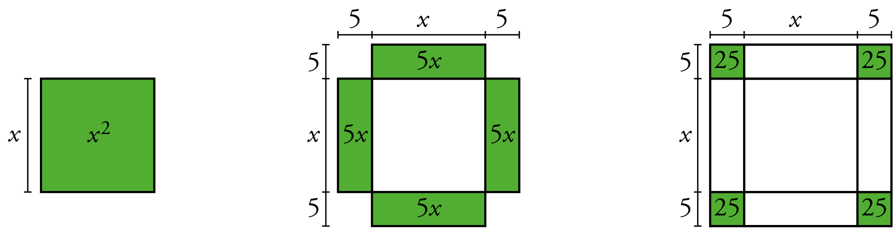


ÁREA: x^2 ÁREA: $x^2 + 8x(= 84)$ ÁREA: $84 + 4 \cdot 4 = 100$

El área del último cuadrado es 100. Por tanto, su lado mide 10. Así:

$2 + x + 2 = 10 \rightarrow x = 6$

b) $x^2 + 20x = 169$



ÁREA: x^2 ÁREA: $x^2 + 20x(= 169)$ ÁREA: $169 + 4 \cdot 25 = 269$

El área del último cuadrado es 269. Por tanto, su lado mide 16,4.

$5 + x + 5 = 16{,}4 \rightarrow x = 6{,}4$

1 ▶ ECUACIONES. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Página 110

1 **¿Es 5 solución de alguna de las siguientes ecuaciones? Justifica tu respuesta:**

a) $8x + 3 = 11x - 12$ **b)** $x^4 - x^3 = 500$ **c)** $3x - 7 = x^2 - 10$

d) $1^x = 5$ **e)** $x^2 - 12 = 4x - 7$ **f)** $2^{x-1} = 16$

g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$ **h)** $10x + 25 = x^3$ **i)** $x^2 - 20 = 2x - 5$

j) $\sqrt{3x+1} = 16$ **k)** $(2x - 3)^2 = 144$ **l)** $3(x^2 + 3) - 84 = 0$

a) $\left.\begin{array}{l} 8 \cdot 5 + 3 = 43 \\ 11 \cdot 5 - 12 = 43 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

b) $\left.\begin{array}{l} 5^4 - 5^3 = 500 \\ 500 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

c) $\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 5 - 7 = 8 \\ 5^2 - 10 = 15 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

d) $\left.\begin{array}{l} 1^5 = 1 \\ 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

e) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 12 = 13 \\ 4 \cdot 5 - 7 = 13 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

f) $\left.\begin{array}{l} 2^{5-1} = 16 \\ 16 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

g) $\left.\begin{array}{l} 5^3 + 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 161 \\ 161 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

h) $\left.\begin{array}{l} 10 \cdot 5 + 25 = 75 \\ 5^3 = 125 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

i) $\left.\begin{array}{l} 5^2 - 20 = 5 \\ 2 \cdot 5 - 5 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

j) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 4 \\ 16 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

k) $\left.\begin{array}{l} (2 \cdot 5 - 3)^2 = 49 \\ 144 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ no es solución de la ecuación.

l) $\left.\begin{array}{l} 3(5^2 + 3) - 84 = 0 \\ 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5$ es solución de la ecuación.

2 **En el ejercicio anterior hay varias ecuaciones polinómicas. Escríbelas y di cuál es su grado.**

a) $8x + 3 = 11x - 12$ → Ecuación polinómica de grado 1.

b) $x^4 - x^3 = 500$ → Ecuación polinómica de grado 4.

c) $3x - 7 = x^2 - 10$ → Ecuación polinómica de grado 2.

e) $x^2 - 12 = 4x - 7$ → Ecuación polinómica de grado 2.

g) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 161$ → Ecuación polinómica de grado 3.

h) $10x + 25 = x^3$ → Ecuación polinómica de grado 3.

i) $x^2 - 20 = 2x - 5$ → Ecuación polinómica de grado 2.

k) $(2x - 3)^2 = 144$ → Ecuación polinómica de grado 2.

l) $3(x^2 + 3) - 84 = 0$ → Ecuación polinómica de grado 2.

Página 111

3 Tanteando, halla la solución entera de las ecuaciones siguientes:

a) $2x^2 = 50$ **b)** $2x^3 + x^2 = 20$ **c)** $4 \cdot 10^x = 40\,000$

d) $(x - 12)^4 = 81$ **e)** $(3 + x)^{(x-6)} = 121$ **f)** $\sqrt[3]{x - 23} = 2$

g) $x^3 + x^2 = 150$ **h)** $3^x = 2\,187$ **i)** $x^x = 46\,656$

j) $\sqrt{7x + 4} = 9$ **k)** $5^{x+1} = 15\,625$ **l)** $\sqrt{x - 12} = x - 8$

a) $x = 5 \rightarrow 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$

b) $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2^3 + 2^2 = 2 \cdot 8 + 4 = 16 + 4 = 20$

c) $x = 4 \rightarrow 4 \cdot 10^4 = 40\,000$

d) $x = 15 \rightarrow (15 - 12)^4 = 3^4 = 81$

e) $x = 8 \rightarrow (3 + 8)^{(8-6)} = 11^2 = 121$

f) $x = 31 \rightarrow \sqrt[3]{31 - 23} = \sqrt[3]{8} = 2$

g) Si $x = 4$, entonces $4^3 + 4^2 = 64 + 16 = 80$. Por tanto, la solución no es válida.

Sin embargo, si $x = 5$, entonces $5^3 + 5^2 = 125 + 25 = 150$. Luego $x = 5$ es la solución.

h) Si $x = 5$, entonces $3^5 = 243$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 6$, entonces $3^6 = 729$. Por tanto, la solución no es válida.

Sin embargo, si $x = 7$, entonces $3^7 = 2\,187$. Luego $x = 7$ es la solución.

i) Si $x = 7$, entonces $7^7 = 823\,543$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 6$, entonces $6^6 = 46\,656$. Luego $x = 6$ es la solución.

j) A esta solución es fácil llegar, ya que lo de dentro de la raíz debe valer 81 para que al hacer la raíz salga 9. Si probamos con $x = 10$, tendríamos 74 dentro de la raíz, que no vale. Sin embargo, con $x = 11$, obtenemos $77 + 4 = 81$, por lo tanto, $x = 11$ es la solución.

k) Si $x = 6$, entonces $5^{6+1} = 5^7 = 78\,125$. Por tanto, la solución no es válida.

Si $x = 5$, entonces $5^{5+1} = 5^6 = 15\,625$. Luego $x = 5$ es la solución.

l) Lo primero que vemos es que $x > 12$, ya que si no saldría la raíz de un número negativo, lo cual es imposible. Si probamos con $x = 13$, tendríamos $1 = 5$, que no vale. Si probamos con $x = 16$, tendríamos $2 = 8$, que no vale. Podemos observar que según probemos con números más altos, más dispares van a ser las igualdades. Podemos concluir que esta ecuación no tiene solución.

4 **Encuentra la solución, aproximando hasta las décimas, de las siguientes ecuaciones. Hazlo por tanteo ayudándote de la calculadora.**

a) $x^2 = 1\,000$ **b)** $x^3 + 1 = 100$ **c)** $x^5 = 1\,500$

d) $x^6 - 40 = 1\,460$ **e)** $(x - 3)^4 = 35\,027$ **f)** $x^4 + x^2 = 40$

g) $x^3 + x^2 = 200$ **h)** $x^3 - x^2 = 200$ **i)** $\sqrt{x^2 - x} = 5$

j) $x^{x+1} = 250$

a) Damos valores enteros a x:

$31^2 = 961 < 1\,000$

$32^2 = 1\,024 > 1\,000$

Por tanto, x es mayor que 31 pero menor que 32.

Damos a x los valores 31,5; 31,6; 31,7; …

$31{,}5^2 = 992{,}25 < 1\,000$

$31{,}6^2 = 998{,}56 < 1\,000$

$31{,}7^2 = 1\,004{,}89 > 1\,000$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 31{,}6$.

b) Es lo mismo que hallar $x^3 = 99$.

Damos valores enteros a x:

$4^3 = 65 < 99$

$5^3 = 126 > 99$

Por tanto, x es mayor que 4 pero menor que 5.

Damos a x los valores 4,5; 4,6; 4,7; …

$4{,}5^3 = 92{,}125 < 99$

$4{,}6^3 = 98{,}336 < 99$

$4{,}7^3 = 104{,}823 > 99$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}6$.

c) Damos valores enteros a x:

$4^5 = 1\,024 < 1\,500$

$5^5 = 3\,125 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 4 y menor que 5.

Damos a x los valores 4,2; 4,3; 4,4; …

$4{,}2^5 = 1\,306{,}912… < 1\,500$

$4{,}3^5 = 1\,470{,}084… < 1\,500$

$4{,}4^5 = 1\,649{,}162… > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 4{,}3$.

d) Es lo mismo que hallar $x^6 = 1\,500$.

Damos valores enteros a x:

$3^6 = 729 < 1\,500$

$4^5 = 4\,096 > 1\,500$

Por tanto, x es mayor que 3 y menor que 4.

Damos a x los valores 3,3; 3,4; 3,5; …

$3{,}3^6 = 1\,291{,}467\ldots < 1\,500$

$3{,}4^6 = 1\,544{,}804\ldots > 1\,500$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 3{,}3$.

e) Damos valores enteros a x:

$(16 - 3)^4 = 28\,561 < 35\,027$

$(17 - 3)^4 = 38\,416 > 35\,027$

Por tanto, x es mayor que 16 pero menor que 17.

Damos a x los valores 16,5; 16,6; 16,7; …

$(16{,}5 - 3)^4 \approx 33\,215{,}06 < 35\,027$

$(16{,}6 - 3)^4 \approx 34\,210{,}2 < 35\,027$

$(16{,}7 - 3)^4 \approx 35\,227{,}54$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 16{,}6$.

f) Damos valores enteros a x:

$2^4 + 2^2 = 20 < 40$

$3^4 + 3^2 = 90 > 40$

Por tanto, x es mayor que 2 pero menor que 3.

Damos a x los valores 2,3; 2,4; 2,5; …

$2{,}3^4 + 2{,}3^2 \approx 33{,}27 < 40$

$2{,}4^4 + 2{,}4^2 \approx 38{,}94 > 40$

$2{,}5^4 + 2{,}5^2 \approx 45{,}31 > 40$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 2{,}4$.

g) Damos valores enteros a x:

$5^3 + 5^2 = 150 < 200$

$6^3 + 6^2 = 252 > 200$

Por tanto, x es mayor que 5 y menor que 6.

Damos a x los valores 5,3; 5,4; 5,5; …

$5{,}3^3 + 5{,}3^2 = 176{,}967 < 200$

$5{,}4^3 + 5{,}4^2 = 186{,}624 < 200$

$5{,}5^3 + 5{,}5^2 = 196{,}625 < 200$

$5{,}6^3 + 5{,}6^2 = 206{,}976 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 5{,}5$.

h) Damos valores enteros a x:

$6^3 - 6^2 = 180 < 200$

$7^3 - 7^2 = 294 > 200$

Por tanto, x es mayor que 6 y menor que 7.

Damos a x los valores 6,1; 6,2; 6,3; …

$6{,}1^3 - 6{,}1^2 = 189{,}771 < 200$

$6{,}2^3 - 6{,}2^2 = 199{,}888 < 200$

$6{,}3^3 - 6{,}3^2 = 210{,}357 > 200$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 6{,}2$.

i) Damos valores enteros a x:

$\sqrt{5^2 - 5} = 4{,}47 < 5$

$\sqrt{6^2 - 6} \approx 5{,}48 > 5$

Por tanto, x es mayor que 5 pero menor que 6.

Damos a x los valores 5,4; 5,5; 5,6; …

$\sqrt{5{,}4^2 - 5{,}4} \approx 4{,}87 < 5$

$\sqrt{5{,}5^2 - 5{,}5} \approx 4{,}97 < 5$

$\sqrt{5{,}6^2 - 5{,}6} \approx 5{,}08 > 5$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 5{,}5$.

j) Damos valores enteros a x:

$3^4 = 81 < 250$

$4^5 = 1\,024 > 250$

Por tanto, x es mayor que 3 pero menor que 4.

Damos a x los valores 3,3; 3,4; 3,5; …

$3{,}3^{4{,}3} \approx 169{,}67 < 250$

$3{,}4^{4{,}4} \approx 218{,}03 < 250$

$3{,}5^{4{,}5} = 280{,}74 > 250$

Por tanto, aproximando a las décimas, $x = 3{,}4$.

2 ▶ ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Página 112

1 Encuentra el error en cada transformación:

a) $3(x+1)=21 \rightarrow 3(x)=21-1$ **b)** $5(x-2)+3=10 \rightarrow (x-2)+3=10/5$

c) $3-x/2=6 \rightarrow 3-x=6\cdot 2$ **d)** $(4x-9)/3=5 \rightarrow 4x/3=5+9$

e) $10(x+3)=40-x \rightarrow x+3=40/10-x$

a) $3(x+1)=21 \rightarrow 3x+3=21 \rightarrow 3x=21-3$

b) $5(x-2)+3=10 \rightarrow 5(x-2)=10-3=(x-2)=\dfrac{10-3}{5}$

c) $3-x/2=6 \rightarrow \dfrac{6}{2}-\dfrac{x}{2}=6 \rightarrow \dfrac{6-x}{2}=6 \rightarrow 6-x=6\cdot 2$

d) $(4x-9)/3=5 \rightarrow \dfrac{4x}{3}-\dfrac{9}{3}=5 \rightarrow \dfrac{4x}{3}=5+\dfrac{9}{3}$

e) $10(x+3)=40-x \rightarrow (x+3)=\dfrac{40-x}{10}$

Página 113

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

d) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

e) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

f) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

g) $\frac{x}{2} - \frac{2(x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$

h) $\frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$

i) $\frac{(1+x)^2}{5} = \frac{2x+4}{25} + \frac{x^2}{5} + \frac{1}{5}$

j) $\frac{x-4}{8} + \frac{9-x}{12} - \frac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

k) $x + \frac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

l) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \frac{3(4x^2+1)}{12} - x$

m) $(x-3)(x+3) = \frac{3(x-1)}{2} + x^2$

n) $\frac{x-7}{4} + \frac{25(x-2)}{3} = \frac{5x+35}{4} + \frac{5}{2}(x-7)$

a) $\frac{3x}{15} - x = -\frac{3x}{3} + \frac{9}{5}$

$3x - 15x = -15x + 27$

$3x - 15x + 15x = 27$

$3x = 27$

$x = 9$

b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} - \frac{4x}{27} = \frac{11}{27} - \frac{x}{9}$

$9x + 3x - 4x = 11 - 3x$

$9x + 3x - 4x + 3x = 11$

$11x = 11$

$x = 1$

c) $\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8} + \frac{2x+2}{16} = \frac{x-2}{2}$

$8x + 2(x-3) + 2x + 2 = 8(x-2)$

$8x + 2x - 6 + 2x + 2 = 8x - 16$

$8x + 2x + 2x - 8x = -16 + 6 - 2$

$4x = -12$

$x = -3$

d) $\frac{13+x}{20} - \frac{5x}{2} = \frac{10+x}{5} + \frac{1-12x}{10}$

$13 + x - 50x = 4(10+x) + 2(1-12x)$

$13 + x - 50x = 40 + 4x + 2 - 24x$

$x - 50x - 4x + 24x = 40 + 2 - 13$

$-29x = 29$

$x = -1$

e) $3x - \frac{x+3}{4} = 13$

$12x - (x+3) = 52$

$12x - x - 3 = 52$

$12x - x = 52 + 3$

$11x = 55$

$x = 5$

f) $4 - \frac{x+2}{4} = x - 4$

$16 - (x+2) = 4(x-4)$

$16 - x - 2 = 4x - 16$

$-x - 4x = -16 - 16 + 2$

$-5x = -30$

$x = 6$

g) $\frac{x}{2} - \frac{2(x+2)}{7} = \frac{x-3}{4}$

$14x - 8(x+2) = 7(x-3)$

$14x - 8x - 16 = 7x - 21$

$14x - 8x - 7x = -21 + 16$

$-x = -5$

$x = 5$

h) $\frac{1-x}{25} - \frac{x}{6} + \frac{x+7}{9} = \frac{2}{5} - \frac{3x}{15}$

$18(1-x) - 75x + 50(x+7) = 180 - 90x$

$18 - 18x - 75x + 50x + 350 = 180 - 90x$

$-18x - 75x + 50x + 90x = 180 - 18 - 350$

$47x = -188$

$x = -4$

i) $\dfrac{(1+x)^2}{5} = \dfrac{2x+4}{25} + \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{1}{5}$

$5(1+x)^2 = 2x + 4 + 5x^2 + 5$

$5(1 + 2x + x^2) = 2x + 5x^2 + 9$

$5 + 10x + 5x^2 = 2x + 5x^2 + 9$

$10x + 5x^2 - 2x - 5x^2 = 9 - 5$

$8x = 4 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{x-4}{8} + \dfrac{9-x}{12} - \dfrac{2x-7}{24} + 5 = x - 8$

$3(x-4) + 2(9-x) - (2x-7) + 120 = 24(x-8)$

$3x - 12 + 18 - 2x - 2x + 7 + 120 = 24x - 192$

$3x - 2x - 2x - 24x = -192 + 12 - 18 - 7 - 120$

$-25x = -325$

$x = 13$

k) $x + \dfrac{9(5+x)}{5} = 9 - x$

$5x + 9(5+x) = 5(9-x)$

$5x + 45 + 9x = 45 - 5x$

$5x + 9x + 5x = 45 - 45$

$19x = 0$

$x = 0$

l) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{4} = \dfrac{3(4x^2+1)}{12} - x$

$3(4x^2 - 1) = 3(4x^2 + 1) - 12x$

$12x^2 - 3 = 12x^2 + 3 - 12x$

$12x^2 - 12x^2 + 12x = 3 + 3$

$12x = 6$

$x = \dfrac{1}{2}$

m) $(x-3)(x+3) = \dfrac{3(x-1)}{2} + x^2$

$2(x^2 - 9) = 3(x-1) + 2x^2$

$2x^2 - 18 = 3x - 3 + 2x^2$

$2x^2 - 3x - 2x^2 = -3 + 18$

$-3x = 15$

$x = -5$

n) $\dfrac{x-7}{4} + \dfrac{25(x-2)}{3} = \dfrac{5x+35}{4} + \dfrac{5}{2}(x-7)$

$3(x-7) + 100(x-2) = 3(5x+35) + 30(x-7)$

$3x - 21 + 100x - 200 = 15x + 105 + 30x - 210$

$3x + 100x - 15x - 30x = 105 - 210 + 21 + 200$

$58x = 116$

$x = 2$

3 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Página 114

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ **b)** $9x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ **d)** $5x^2 - 7x + 3 = 0$

e) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ **f)** $6x^2 - 5x + 1 = 0$

g) $x^2 - 3x + 15 = 0$ **h)** $x^2 - 0{,}1x + 0{,}2 = 0$

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} \rightarrow x_1 = 3 \text{ y } x_2 = 2$

b) $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \dfrac{-6 \pm 0}{18} \rightarrow x = \dfrac{-1}{3}$ Solución doble.

c) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \dfrac{6 \pm 0}{18} = \dfrac{1}{3}$ Solución doble.

d) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 60}}{10} = \dfrac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$ No tiene solución.

e) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2} \text{ y } x_2 = -3$

f) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{12} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \dfrac{5 \pm 1}{12} \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2} \text{ y } x_2 = \dfrac{1}{3}$

g) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 60}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-51}}{2}$ No tiene solución.

h) $x = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}2}}{2} = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 0{,}8}}{2} = \dfrac{0{,}1 \pm \sqrt{-0{,}79}}{2}$ No tiene solución.

Página 115

2 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $7x^2 - 28 = 0$

b) $7x^2 + 28 = 0$

c) $4x^2 - 9 = 0$

d) $3x^2 + 42x = 0$

e) $3x^2 = 42x$

f) $11x^2 - 37x = 0$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14(x + 4)$

h) $7x^2 + 5 = 68$

a) $7x^2 - 28 = 0$

$7x^2 = 28$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

b) $7x^2 + 28 = 0$

$7x^2 = -28$

$x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4} \rightarrow$ No tiene solución

c) $4x^2 - 9 = 0$

$4x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $3x^2 + 42x = 0$

$3x(x + 14) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = -14$

e) $3x^2 = 42x$

$3x^2 - 42x = 0$

$3x(x - 14) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = 14$

f) $11x^2 - 37x = 0$

$x(11x - 37) = 0 \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{37}{11}$

g) $2(x + 5)^2 + (x - 3)^2 = 14x + 56$

$2(x^2 + 10x + 25) + (x^2 - 6x + 9) = 14x + 56$

$2x^2 + 20x + 50 + x^2 - 6x + 9 = 14x + 56$

$3x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -1 \rightarrow$ No tiene solución.

h) $7x^2 + 5 = 68$

$7x^2 = 63$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

Página 116

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(2x-3)(3x-2)+2x+3=0$ **b)** $3(x-1)^2+5x=5$

c) $(x+1)(x+2)=2(x+2)$ **d)** $1+(1-x)(2x+1)=x^2$

e) $3x^2-2(x+5)=(x+3)^2-19$ **f)** $(3x+4)(5x-7)=(2x+7)^2+53$

g) $(2x+4)(x-1)+(3x+5)^2=3(2x+5)^2+x$ **h)** $(x-2)(4x+2)+(3-3x)^2=4(5x+1)^2-(x-1)$

a) $(2x-3)(3x-2)+2x+3=0 \rightarrow 6x^2-4x-9x+6+2x+3=0$

$6x^2-11x+9=0$

$x=\dfrac{11\pm\sqrt{121-4\cdot6\cdot9}}{12}=\dfrac{11\pm\sqrt{-95}}{12} \rightarrow$ No tiene solución.

b) $3(x-1)^2+5x=5 \rightarrow 3(x^2-2x+1)+5x=5$

$3x^2-6x+3+5x-5=0 \rightarrow 3x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot3\cdot(-2)}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{6}=\dfrac{1\pm5}{6} \rightarrow x_1=1$ y $x_2=\dfrac{-4}{6}=\dfrac{-2}{3}$

c) $(x+1)(x+2)=2(x+2) \rightarrow x^2+2x+x+2=2x+4$

$x^2+x-2=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2} \rightarrow x_1=1$ y $x_2=-2$

d) $1+(1-x)(2x+1)=x^2 \rightarrow 1+2x+1-2x^2-x=x^2$

$2+x-2x^2=x^2 \rightarrow 3x^2-x-2=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4\cdot3\cdot(-2)}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{6}=\dfrac{1\pm5}{6} \rightarrow x_1=1$ y $x_2=\dfrac{-4}{6}=\dfrac{-2}{3}$

e) $3x^2-2x-10=x^2+6x+9-19 \rightarrow 2x^2-8x=0 \rightarrow 2x\cdot(x-4)=0 \rightarrow x_1=0$ y $x_2=4$

f) $(3x+4)(5x-7)=(2x+7)^2+53$

$15x^2-21x+20x-28=4x^2+28x+49+53$

$15x^2-4x^2-21x+20x-28x-28-49-53=0 \rightarrow 11x^2-29x-130=0$

$x=\dfrac{29\pm\sqrt{841-4\cdot11\cdot(-130)}}{22}=\dfrac{29\pm\sqrt{841+5720}}{22}=\dfrac{29\pm\sqrt{6561}}{22}=\dfrac{29\pm81}{22} \rightarrow$

$x_1=5$ y $x_2=\dfrac{-52}{22}=\dfrac{-26}{11}$

g) $2x^2-2x+4x-4+9x^2+30x+25=12x^2+60x+75+x$

$11x^2+32x+21=12x^2-61x+75 \rightarrow x^2+29x+54=0$

$x=\dfrac{-29\pm\sqrt{29^2-4\cdot1\cdot54}}{2}=\dfrac{-29\pm\sqrt{841-216}}{2}=\dfrac{-29\pm\sqrt{625}}{2}=\dfrac{-29\pm25}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x_1=-2$ y $x_2=-27$

h) $4x^2+2x-8x-4+9-18x+9x^2=100x^2+40x+4-x+1$

$13x^2-24x+5=100x^2+39x+5 \rightarrow 87x^2+63x=0 \rightarrow 3x\cdot(29x+21)=0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1=0$ y $x_2=-\dfrac{21}{29}$

4 **Resuelve estas ecuaciones manualmente y con calculadora. Comprueba que los resultados coinciden.**

a) $3x(x+1)-\dfrac{(x-2)^2}{2}=(x+1)(x-1)+15$

b) $\dfrac{(x+1)^2}{2}-\dfrac{3(x-1)}{4}+\dfrac{3x(x+1)}{2}=\dfrac{3}{2}$

c) $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{x}{3}-1+\dfrac{1}{x}=1-\dfrac{2}{3x}$

a) $3x(x+1)-\dfrac{(x-2)^2}{2}=(x+1)(x-1)+15$

$$3x^2+3x-\frac{(x-2)^2}{2}=x^2-x+x-1+15$$

$$6x^2+6x-x^2+4x-4=2x^2-2x+2x-2+30$$

$$3x^2+10x-32=0$$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-4\cdot 3\cdot(-32)}}{6}=\frac{-10\pm\sqrt{484}}{6}=\frac{-10\pm 22}{6}\ \to\ x_1=2\ \text{ y }\ x_2=\frac{-32}{6}=\frac{-16}{3}$$

b) $\dfrac{(x+1)^2}{2}-\dfrac{3(x-1)}{4}+\dfrac{3x(x+1)}{2}=\dfrac{3}{2}$

$$2(x+1)^2-3(x-1)+6x(x+1)=6$$

$$2(x^2+2x+1)-3x+3+6x^2+6x=6$$

$$2x^2+4x+2-3x+3+6x^2+6x-6=0$$

$$8x^2+7x-1=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot 8\cdot(-1)}}{16}=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{16}=\frac{-7\pm 9}{16}\ \to\ x_1=\frac{1}{8}\ \text{ y }\ x_2=-1$$

c) $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}\ \to\ 2x\cdot\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{x}\right)=2x\cdot\dfrac{3}{2}\ \to\ 3x^2-2=3x\ \to\ 3x^2-3x-2=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{3\pm\sqrt{9+24}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{33}}{6}\ \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{6} \\[2mm] x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{6} \end{cases}$$

d) $\dfrac{x}{3}-1+\dfrac{1}{x}=1-\dfrac{2}{3x}\ \to\ 3x\cdot\left(\dfrac{x}{3}-1+\dfrac{1}{x}\right)=3x\cdot\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)\ \to\ x^2-3x+3=3x-2\ \to$

$$\to\ x^2-3x-3x+3+2=0\ \to\ x^2-6x+5=0$$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}\ \to$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{6+4}{2}\ \to\ x=\dfrac{10}{2}\ \to\ x=5 \\[2mm] x=\dfrac{6-4}{2}\ \to\ x=\dfrac{2}{2}\ \to\ x=1 \end{cases}$$

4 ECUACIONES POLINÓMICAS DE GRADO MAYOR QUE DOS

Página 118

1 Resuelve sacando factor común.

a) $\mathbf{x^5 + x^4 - 2x^3 = 0}$ **b)** $\mathbf{18x^3 - 39x^2 - 15x = 0}$

c) $\mathbf{3x^4 - 5x^4 + 2x^2 = 0}$ **d)** $\mathbf{2x^4 - 30x^3 + 12x^5 = 0}$

a) $x^5 + x^4 - 2x^3 = 0 \rightarrow x^3(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \end{cases}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

b) $18x^3 - 39x^2 - 15x = 0 \rightarrow 3x(6x^2 - 13x - 5) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 6x^2 - 13x - 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 6 \cdot (-5)}}{12} = \dfrac{13 \pm 17}{12} \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{30}{12} = \frac{5}{2};\ x_3 = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

c) $3x^4 - 5x^4 + 2x^2 = 0 \rightarrow -2x^4 + 2x^2 = 0 \rightarrow -2x^2(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_2 = 1;\ x_3 = -1 \end{cases}$$

d) $2x^4 - 30x^3 + 12x^5 = 0 \rightarrow -2x^3(x - 15 + 6x^2) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x^3 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 6x^2 + x - 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-15)}}{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{361}}{12} = \dfrac{-1 \pm 19}{12} \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2};\ x_3 = \frac{-20}{12} = \frac{-5}{3}$$

2 **Resuelve con ayuda de la regla de Ruffini.**

a) $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 25x - 30 = 0}$

a) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & -13 & 15 \\
1 & & 1 & -2 & -15 \\
\hline
 & 1 & -2 & -15 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & 15 & \\
\hline
 & 1 & -5 & \boxed{0} & \\
5 & & 5 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \to x_1 = 1 \\ \\ \to x_2 = -3 \\ \\ \to x_3 = 5
\end{array}$$

b) $x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 25x - 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -6 & 4 & 25 & -30 \\
-2 & & -2 & 16 & -40 & 30 \\
\hline
 & 1 & -8 & 20 & -15 & \boxed{0} \\
3 & & 3 & -15 & 15 & \\
\hline
 & 1 & -5 & 5 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \to x_1 = -2 \\ \\ \to x_2 = 3
\end{array}$$

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \to x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} x_3 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \\ x_4 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Página 119

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ **b)** $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ **d)** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

e) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ **f)** $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

g) $x^4 - x^2 = 0$

a) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow z^2 - 2z - 8 = 0$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{cases} z_1 = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2 \\ z_2 = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow x^2 = -2 \text{ Sin solución.} \end{cases}$$

b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \rightarrow z^2 - 9z + 20 = 0$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} \begin{cases} z_1 = 5 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x_1 = \sqrt{5};\ x_2 = -\sqrt{5} \\ z_2 = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_3 = 2;\ x_4 = -2 \end{cases}$$

c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow z^2 + 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{-13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} z_1 = -4 \rightarrow x^2 = -4 \text{ Sin solución.} \\ z_2 = -9 \rightarrow x^2 = -9 \text{ Sin solución.} \end{cases}$$

d) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \rightarrow z^2 - 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} z_1 = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -3 \\ z_2 = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_3 = 2;\ x_4 = -2 \end{cases}$$

e) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1 \\ z_2 = -4 \rightarrow x^2 = -4 \text{ Sin solución.} \end{cases}$$

f) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \rightarrow z^2 - 8z + 16 = 0$

$$z = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2$$

g) $x^4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1;\ x_3 = -1 \end{cases}$

4 **¿Verdadero o falso?**

a) Una ecuación bicuadrada puede tener cuatro soluciones como máximo.

b) Una ecuación bicuadrada puede no tener ninguna solución.

c) Una ecuación bicuadrada no puede tener soluciones negativas.

d) Para que una ecuación bicuadrada tenga solución, la ecuación cuadrática que se resuelve con la variable *z* debe tener al menos una solución no negativa.

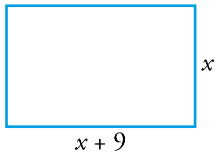
a) Verdadero. b) Verdadero.

c) Falso. d) Verdadero.

5 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ECUACIONES

Página 120

1 **La base de un rectángulo es 9 cm mayor que su altura. Su área mide 400 cm^2. Calcula las dimensiones de este rectángulo.**



$$x \cdot (x + 9) = 400$$

$$x^2 + 9x - 400 = 0 \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = -25 \end{cases}$$

- $x_1 = 16$ La altura es de 16 cm y la base es de 16 + 9 = 25 cm.
- $x_2 = -25$ No es una solución válida, porque los lados no pueden tener una medida negativa.

2 **Un parque circular de 22 686,5 m^2 tiene un camino que lo rodea. Si el área total del camino es 2 185,44 m^2, ¿cuál es su anchura? (Toma π = 3,14.)**

- Calculamos el radio, r, del parque:

  $S = \pi \cdot r^2 \rightarrow 22686{,}5 = 3{,}14 \cdot r^2 \rightarrow r^2 = 7225 \rightarrow r = 85$ m

- Llamamos x a la anchura del camino:

  $22686{,}5 + 2185{,}44 = 3{,}14(85 + x)^2 \rightarrow 24871{,}94 = 3{,}14(7225 + 170x + x^2) \rightarrow$

  $$\rightarrow x^2 + 170x - 696 = 0 \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -174 \end{cases}$$

  El camino tiene 4 m de anchura.

Página 121

3 **Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg de peso y 80 % de pureza, junto con otro lingote de oro de 1 kg de peso. ¿Cuál era la pureza del segundo, si la de la mezcla resultante es del 67 %?**

Peso puro del primer lingote $\to$ $3 \cdot 0{,}8 = 2{,}4$ kg

Peso total de la mezcla $\to$ 4 kg

Peso puro de la mezcla $\to$ $4 \cdot 0{,}67 = 2{,}68$ kg

Kilos puros del segundo lingote $\to$ $2{,}68 - 2{,}4 = 0{,}28$ kg

Pureza del segundo lingote $\to$ $\dfrac{0{,}28}{1} \cdot 100 = 28\,\%$

4 **Un coche tarda 5 h en cubrir el trayecto A-B. Un camión, que ha salido a la misma hora, y realiza el trayecto B-A, tarda 2 h y 55 min en cruzarse con el coche. ¿Cuánto durará el viaje completo del camión?**

5 h = 300 min; 2 h 55 min = 175 min

Cuando se cruzan, al coche le faltan 125 min para recorrer el mismo espacio que el camión en 175 min. Por tanto:

$$\frac{175}{125} = \frac{x}{175} \to x = \frac{175^2}{125} = \frac{30\,625}{125} = 245 \text{ min}$$

El viaje completo del camión dura 245 + 175 = 420 min = 7 h.

5 **Dos albañiles que trabajan asociados reciben 1 400 € como pago de cierto trabajo. ¿Cuánto debe cobrar cada uno si el primero trabajó las dos quintas partes de lo que trabajó el otro?**

Llamamos x al tiempo que trabajó uno de los albañiles, entonces, el otro albañil trabajó $\dfrac{2}{5}x$.

$$x + \frac{2}{5}x = 1\,400 \to \frac{5x + 2x}{5} = 1\,400 \to \frac{7}{5}x = 1\,400 \to x = \frac{1\,400 \cdot 5}{7} = 200 \cdot 5 \to x = 1\,000$$

Uno de los albañiles debe cobrar 1 000 € y el otro, debe cobrar, $1\,000\dfrac{2}{5} = 400$ €.

6 **El suelo de mi salón tiene 1 210 baldosas cuadradas. Si el lado de cada baldosa aumentara 1 cm, solo se necesitarían 1 000 baldosas. ¿Qué dimensión tiene cada baldosa?**

Llamamos x al lado de la baldosa original, en centímetros:

$$1\,210x^2 = 1\,000(x+1)^2 \to 1\,210x^2 = 1\,000x^2 + 2\,000x + 1\,000 \to$$

$$\to 21x^2 - 200x - 100 = 0 \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -\dfrac{10}{21} \end{cases}$$

Como x es una distancia, ha de ser positiva.

Por tanto, el lado de cada baldosa mide 10 cm.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 122

Hazlo tú

- **Unos amigos ponen 15 € cada uno para comprar un regalo. Se suman 4 amigos más y así ponen un 20 % menos cada uno. ¿Cuántos son a repartir?**

Llamamos x al número inicial de amigos.

$15x = 15 \cdot 0{,}8(x + 4) \;\rightarrow\; x = 0{,}8x + 3{,}2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3{,}2}{0{,}2} = 16$

Al principio son 16 amigos. Después, 20.

Hazlo tú

- **Un grifo tarda tres veces más que otro en llenar un depósito. Si se abren los dos a la vez, lo llenan en 3 h. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?**

Llamamos x a lo que tarda uno de los grifos en llenar el depósito.

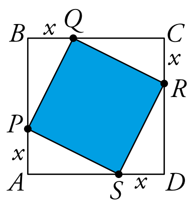
En 1 hora llena $\dfrac{1}{x}$ de depósito. El otro grifo llena $\dfrac{1}{3x}$ de depósito en 1 hora.

Por tanto: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x} = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; 3 + 1 = x \;\rightarrow\; x = 4$

Un grifo tarda 4 horas, y el otro, 12 horas.

Hazlo tú

- **En esta misma figura, calcula el valor de x para que el lado del cuadrado coloreado sea igual a $\sqrt{26}$ cm.**



$x^2 + (6 - x)^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 \;\rightarrow\; 2x^2 - 12x + 10 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Hay dos soluciones válidas: $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$.

Hazlo tú

- **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir su orden, obtenemos 18. ¿Cuál es el número si acaba en 3?**

Número de dos cifras que acaba en 3 $\rightarrow$ $10x + 3$

Si invertimos sus cifras $\rightarrow$ $3 \cdot 10 + x = 30 + x$

Por tanto:

$(10x + 3) - (30 + x) = 18 \;\rightarrow\; 10x + 3 - 30 - x = 18 \;\rightarrow\; 9x = 45 \;\rightarrow\; x = 5$

El número buscado es 53.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 123

Practica

Ecuaciones de primer grado

1 **Resuelve mentalmente estas ecuaciones:**

a) $1 = 3 - 4x$ **b)** $2x + 1 = 187$ **c)** $8 - \frac{x}{3} = 5$

d) $\frac{x}{2} - 3 = 4$ **e)** $7 - \frac{x+2}{3} = 5$ **f)** $\frac{5x+1}{8} = 2$

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = \frac{186}{2} = 93$ c) $\frac{x}{3} = 3 \rightarrow x = 9$

d) $x = 14$ e) $x = 4$ f) $x = 3$

2 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución de cada una:**

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1)$ **b)** $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3)$ **d)** $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x)$

a) $3x - 2(x + 3) = x - 3(x + 1) \rightarrow 3x - 2x - 6 = x - 3x - 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

Comprobación: $3 \cdot 1 - 2(1 + 3) = 1 - 3(1 + 1) \rightarrow -5 = -5$

b) $4 + x - 4(1 - x) + 5(2 + x) = 0 \rightarrow 4 + x - 4 + 4x + 10 + 5x = 0 \rightarrow 10x = -10 \rightarrow x = -1$

Comprobación: $4 - 1 - 4(1 + 1) + 5(2 - 1) = 4 - 1 - 8 + 5 = 0$

c) $2x + 7 - 2(x - 1) = 3(x + 3) \rightarrow 2x + 7 - 2x + 2 = 3x + 9 \rightarrow 0 = 3x \rightarrow x = 0$

Comprobación: $2 \cdot 0 + 7 - 2(0 - 1) = 3 \cdot (0 + 3) \rightarrow 9 = 9$

d) $4(2x - 7) - 3(3x + 1) = 2 - (7 - x) \rightarrow 8x - 28 - 9x - 3 = 2 - 7 + x \rightarrow$

$\rightarrow -2x = 26 \rightarrow x = -13$

Comprobación: $4[2(-13) - 7] - 3[3(-13) + 1] = 2 - [7 - (-13)] \rightarrow$

$\rightarrow -132 + 114 = 2 - 20 \rightarrow -18 = -18$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2$ **b)** $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}$

c) $\frac{3x+4}{5} = \frac{x+2}{2}$ **d)** $\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}$

Comprueba que las soluciones son, respectivamente, 8, 0, 18 y 4.

a) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2 \rightarrow 15\left(\frac{x-3}{5}\right) = 15\left(\frac{x+1}{3} - 2\right)$

$3(x-3) = 5(x+1) - 30 \rightarrow 3x - 9 = 5x + 5 - 30 \rightarrow 16 = 2x \rightarrow x = 8$

b) $1 = \frac{x+3}{3} - \frac{x}{2} \rightarrow 6 \cdot 1 = 6\left(\frac{x+3}{3} - \frac{x}{2}\right) \rightarrow 6 = 2(x+3) - 3x \rightarrow$

$\rightarrow 6 = 2x + 6 - 3x \rightarrow x = 0$

c) $\frac{3x+4}{5} = \frac{x+2}{2} \rightarrow 2(3x-4) = 5(x+2) \rightarrow 6x - 8 = 5x + 10 \rightarrow x = 18$

d) $\frac{5x-16}{6} = -\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3} \rightarrow 12\left(\frac{5x-16}{6}\right) = 12\left(-\frac{x+8}{12} + \frac{x+1}{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 2(5x-16) = -(x+8) + 4(x+1) \rightarrow$

$\rightarrow 10x - 32 = -x - 8 + 4x + 4 \rightarrow 7x = 28 \rightarrow x = 4$

4 **Resuelve y comprueba que dos de estas ecuaciones son equivalentes. ¿Cuáles son?**

a) $\frac{x+2}{2}-\frac{x+3}{3}=-\frac{x-4}{4}+\frac{x-5}{5}$

b) $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-1}{10}+\frac{5x-2}{8}=\frac{x+1}{4}$

c) $\frac{x+5}{5}-\frac{x+5}{24}=\frac{x+6}{10}+\frac{x+4}{60}$

d) $2x-\frac{1}{2}(1+3x)-\frac{3}{5}(x-2)=\frac{1}{4}(3-x)$

a) $\frac{x+2}{2}-\frac{x+3}{3}=-\frac{x-4}{4}+\frac{x-5}{5} \rightarrow 60\left(\frac{x+2}{2}-\frac{x+3}{3}\right)=60\left(-\frac{x-4}{4}+\frac{x-5}{5}\right)$

$30(x+2)-20(x+3)=-15(x-4)+12(x-5) \rightarrow$

$\rightarrow 30x+60-20x-60=-15x+60+12x-60 \rightarrow 37x=0 \rightarrow x=0$

Comprobación: $\frac{0+2}{2}-\frac{0+3}{3}=-\frac{0-4}{4}+\frac{-5}{5} \rightarrow 1-1=1-1 \rightarrow 0=0$

b) $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-1}{10}+\frac{5x-2}{8}=\frac{x+1}{4} \rightarrow 40\left(\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-1}{10}+\frac{5x-2}{8}\right)=40\left(\frac{x+1}{4}\right)$

$8(3x+2)-4(4x-1)+5(5x-2)=10(x+1) \rightarrow$

$\rightarrow 24x+16-16x+4+25x-10=10x+10 \rightarrow 23x=0 \rightarrow x=0$

Comprobación: $\frac{2}{5}-\frac{-1}{10}+\frac{-2}{8}=\frac{2}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

c) $\frac{x+5}{5}-\frac{x+5}{24}=\frac{x+6}{10}+\frac{x+4}{60} \rightarrow 120\left(\frac{x+5}{5}-\frac{x+5}{24}\right)=120\left(\frac{x+6}{10}+\frac{x+4}{60}\right)$

$24(x+5)-5(x+5)=12(x+6)+2(x+4) \rightarrow$

$\rightarrow 24x+120-5x-25=12x+72+2x+8 \rightarrow 5x=-15 \rightarrow x=-3$

Comprobación: $\frac{-3+5}{5}-\frac{-3+5}{24}=\frac{2}{5}-\frac{1}{12}=\frac{19}{60}$

$\frac{-3+6}{6}+\frac{-3+4}{60}=\frac{3}{10}+\frac{1}{60}=\frac{19}{60}$

d) $2x-\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}-\frac{3x}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3}{4}-\frac{x}{4} \rightarrow 20\cdot\left(2x-\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}-\frac{3x}{5}+\frac{6}{5}\right)=20\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{4}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 40x-10-30x-12x+24=15-5x \rightarrow 3x=1 \rightarrow x=\frac{1}{3}$

Comprobación: $2\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{3\cdot\frac{1}{3}}{2}-\frac{3\cdot\frac{1}{3}}{5}+\frac{6}{5}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}=\frac{2}{3}$

$\frac{3}{4}-\frac{\frac{1}{3}}{4}=\frac{2}{3}$

Son equivalentes las ecuaciones a) y b.

5 **Solo una de las siguientes ecuaciones tiene solución única. Resuélvelas y compruébalo.**

a) $\frac{x+1}{2} = 2 + \frac{2x-3}{4}$

b) $\frac{4x-3}{12} - \frac{2x+1}{4} = \frac{x-1}{3} - \frac{3x+1}{6}$

c) $\frac{1+x}{3} - \frac{x+3}{5} = \frac{26}{15} - \frac{4+x}{2}$

a) $4 \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right) = 4 \cdot \left(2 + \frac{2x-3}{4}\right) \to 2x + 2 = 8 + 2x - 3 \to 2x + 2 = 2x + 5 \to 0x = 3 \to$

$\to$ No tiene solución.

b) $12 \cdot \left(\frac{4x-3}{12} - \frac{2x+1}{4}\right) = 12 \cdot \left(\frac{x-1}{3} - \frac{3x+1}{6}\right) \to 4x - 3 - 6x - 3 = 4x - 4 - 6x - 2 \to$

$\to -2x - 6 = -2x - 6 \to 0x = 0 \to$ Tiene infinitas soluciones.

c) $30 \cdot \left(\frac{1+x}{3} - \frac{x+3}{5}\right) = 30 \cdot \left(\frac{26}{15} - \frac{4+x}{2}\right) \to 10 + 10x - 6x - 18 = 52 - 60 - 15x \to$

$\to -8 + 4x = -8 - 15x \to 19x = 0 \to x = 0$

Comprobación: $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{26}{15} - \frac{4}{2} \to \frac{5}{15} - \frac{9}{15} = \frac{52}{30} - \frac{60}{30} \to -\frac{4}{15} = -\frac{4}{15}$

6 **¿Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen solución única? Resuélvelas y compruébalo.**

a) $4(2x + 1) - 3(x + 3) = 5(x - 2)$

b) $2(x - 3) + 1 = 3(x - 1) - (2 + x)$

c) $\frac{3x+1}{2} = 2x - \frac{1-x}{2}$

d) $x + \frac{2x-7}{4} = 2x + \frac{1-x}{2}$

a) $8x + 4 - 3x - 9 = 5x - 10 \to 5x - 5 = 5x - 10 \to 0x = -5 \to$ No tiene solución.

b) $2x - 6 + 1 = 3x - 3 - 2 - x \to 2x - 5 = 2x - 5 \to 0x = 0 \to$ Tiene infinitas soluciones.

c) $2 \cdot \left(\frac{3x+1}{2}\right) = 2 \cdot \left(2x - \frac{1-x}{2}\right) \to 3x + 1 = 4x - 1 + x \to 2 = 2x \to x = 1$

Comprobación: $\frac{3 \cdot 1 + 1}{2} = 2 \cdot 1 - \frac{1-1}{2} \to 2 = 2$

d) $4 \cdot \left(x + \frac{2x-7}{4}\right) = 4 \cdot \left(2x + \frac{x-1}{2}\right) \to 4x + 2x - 7 = 8x + 2x - 2 \to 6x - 7 = 10x - 2 \to$

$\to -4x = 5 \to x = -\frac{5}{4}$

Comprobación: $-\frac{5}{4} - \frac{38}{16} = -\frac{10}{4} - \frac{9}{8} \to -\frac{20}{16} - \frac{38}{16} = -\frac{40}{16} - \frac{18}{16} \to \frac{-58}{16} = \frac{-58}{16}$

7 **Resuelve.**

a) $\frac{2}{3}(x-3)+\frac{1}{5}(x-5)=\frac{3}{5}\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{4x}{15}$ **b)** $2x-\frac{1}{2}(1+3x)=\frac{3}{5}(x-2)+\frac{1}{4}(3-x)$

c) $\frac{4}{3}(2-x)-\frac{3}{4}(2x-1)=4x-7\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}$ **d)** $x(8x-1)-(3x-4)^2=x(7-x)-2(x-4)$

a) $\frac{2x}{3}-\frac{6}{3}+\frac{x}{5}-\frac{5}{5}=\frac{3x}{5}+\frac{6}{15}+\frac{4x}{15} \to 15\cdot\left(\frac{2x}{3}-\frac{6}{3}+\frac{x}{5}-\frac{5}{5}\right)=15\cdot\left(\frac{3x}{5}+\frac{6}{15}+\frac{4x}{15}\right) \to$

$\to 10x-30+3x-15=9x+6+4x \to 13x-45=13x+6 \to$

$\to 0x=51 \to$ No tiene solución.

b) $20\cdot\left(2x-\frac{1}{2}-\frac{3x}{2}\right)=20\cdot\left(\frac{3x}{5}-\frac{6}{5}+\frac{3}{4}-\frac{x}{4}\right) \to 40x-10-30x=12x-24+15-5x \to$

$\to 10x-10=7x-9 \to 3x=1 \to x=\frac{1}{3}$

c) $\frac{8}{3}-\frac{4x}{3}-\frac{6x}{4}+\frac{3}{4}=4x-7x+\frac{7}{2}-\frac{3}{4} \to$

$\to 12\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{4x}{3}-\frac{6x}{4}+\frac{3}{4}\right)=12\cdot\left(4x-7x+\frac{7}{2}-\frac{3}{4}\right) \to$

$\to 32-16x-18x+9=48x-84x+42-9 \to 41-34x=33-36x \to 2x=-8 \to$

$\to x=-\frac{8}{2}=-4$

d) $8x^2-x-(9x^2-24x+16)=7x-x^2-2x+8 \to -x^2+23x-16=-x^2+5x+8 \to$

$\to 18x=24 \to x=\frac{24}{18}=\frac{4}{3}$

8 **Comprueba que las siguientes ecuaciones son de primer grado y halla sus soluciones:**

a) $(4x-3)(4x+3)-4(3-2x)^2=3x$ **b)** $2x(x+3)+(3-x)^2=3x(x+1)$

c) $\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}=\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8}$

a) $(4x-3)(4x+3)-4(3-2x)^2=3x \to 16x^2-9-4(9+4x^2-12x)=3x \to$

$\to 16x^2-9-36-16x^2+48x=3x \to 45x=45 \to x=1$

b) $2x(x+3)+(3-x)^2=3x(x+1) \to 2x^2+6x+9+x^2-6x=3x^2+3x \to$

$\to 9=3x \to x=3$

c) $\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}=\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8} \to 8\left(\frac{x(x+1)}{2}-\frac{(2x-1)^2}{8}\right)=8\left(\frac{3x+1}{4}-\frac{1}{8}\right) \to$

$\to 4x(x-1)-(2x-1)^2=2(3x+1)-1 \to 4x^2-4x-(4x^2+1-4x)=6x+2-1 \to$

$\to -1=6x+1$ 8 $-2=6x \to x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$

Ecuaciones de segundo grado

9 **Resuelve mentalmente.**

a) $x^2 - 100 = 0$ **b)** $2x^2 - 50 = 0$ **c)** $12 - 3x^3 = 0$

d) $(x - 3)^2 = 0$ **e)** $(2x + 1)^2 = 0$ **f)** $\frac{(x+1)^2}{3} - 7 = 5$

a) $x = \pm 10$ b) $x = \pm 5$ c) $x = \pm 2$

d) $x = 3$ e) $x = -\frac{1}{2}$ f) $x_1 = 5$; $x_2 = -7$

10 **Las siguientes ecuaciones de segundo grado son incompletas. Halla sus soluciones sin utilizar la fórmula general.**

a) $3x^2 - 12x = 0$ **b)** $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 5x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

e) $9x^2 - 25 = 0$ **f)** $4x^2 + 100 = 0$

g) $16x^2 = 100$ **h)** $3x^2 - 6 = 0$

a) $3x^2 - 12x = 0 \rightarrow 3x(x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

b) $x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(1 - 3x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1/3 \end{cases}$

c) $2x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(2x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 5/2 \end{cases}$

d) $2x^2 - 8 = 0 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $9x^2 - 25 = 0 \rightarrow 9x^2 = 25 \rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \begin{cases} x = 5/3 \\ x = -5/3 \end{cases}$

f) $4x^2 + 100 = 0 \rightarrow 4x^2 = -100$ No tiene solución.

g) $16x^2 = 100 \rightarrow x^2 = \frac{100}{16} \begin{cases} x = 10/4 = 5/2 \\ x = -10/4 = -5/2 \end{cases}$

h) $3x^2 - 6 = 0 \rightarrow 3x^2 = 6 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

11 Resuelve.

a) $\boldsymbol{x^2 + 4x - 21 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^2 + 9x + 20 = 0}$

c) $\boldsymbol{9x^2 - 12x + 4 = 0}$ **d)** $\boldsymbol{x^2 + x + 3 = 0}$

e) $\boldsymbol{4x^2 + 28x + 49 = 0}$ **f)** $\boldsymbol{x^2 - 2x + 3 = 0}$

g) $\boldsymbol{4x^2 - 20x + 25 = 0}$ **h)** $\boldsymbol{-2x^2 + 3x + 2 = 0}$

a) $x^2 + 4x - 21 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 21 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 20}}{2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -5 \end{cases}$

c) $9x^2 - 12x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \dfrac{12 \pm 0}{18} = \dfrac{2}{3}$

d) $x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

e) $4x^2 + 28x + 49 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-28 \pm \sqrt{784 - 4 \cdot 4 \cdot 49}}{8} = \dfrac{-28 \pm 0}{8} = -\dfrac{7}{2}$

f) $x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3}}{2}$ No tiene solución.

g) $4x^2 - 20x + 25 = 0 \rightarrow x = \dfrac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{8} = \dfrac{20 \pm 0}{8} = \dfrac{5}{2}$

h) $-2x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-2) \cdot 2}}{-4} = \dfrac{-3 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = -2/4 = -1/2 \\ x = 2 \end{cases}$

Página 124

12 Resuelve mentalmente, igualando a cero cada factor:

a) $x(3x-1)=0$ **b)** $3x(x+2)=0$

c) $(x+1)(x+3)=0$ **d)** $(x-5)(x+5)=0$

e) $(x-5)^2=0$ **f)** $(2x-5)^2=0$

a) $x=0;\ 3x-1=0 \to x=\frac{1}{3}$ *Soluciones*: $x=0;\ x=\frac{1}{3}$

b) $3x=0;\ x+2=0 \to x=-2$ *Soluciones*: $x=0;\ x=-2$

c) $x+1=0;\ x+3=0$ *Soluciones*: $x=-1;\ x=-3$

d) $x-5=0;\ x+5=0$ *Soluciones*: $x=5;\ x=-5$

e) $x-5=0$ *Solución*: $x=5$

f) $2x-5=0$ *Solución*: $x=\frac{5}{2}$

13 Opera y resuelve.

a) $(x-2)(3x+2)=(x-4)(2x+1)$ **b)** $(x-1)^2+(1-x)(x+2)=0$

c) $(x+1)^2=(x+1)(2x-3)$ **d)** $(x+4)^2-(2x-1)^2=8x$

a) $3x^2+2x-6x-4=2x^2+x-8x-4 \to 3x^2-4x-4=2x^2-7x-4 \to$

$\to x^2+3x=0 \to x\cdot(x+3)=0 \to x_1=0;\ x_2=-3$

b) $x^2-2x+1+x+2-x^2-2x=0 \to x+3=0 \to x=-3$

c) $x^2+2x+1=2x^2-3x+2x-3 \to x^2+2x+1=2x^2-x-3 \to -x^2+3x+4=0 \to$

$$\to x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot(-1)\cdot 4}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2}=\frac{-3\pm 5}{-2} \to x_1=-1;\ x_2=4$$

d) $(x+4)^2-(2x-1)^2=8x \to x^2+16+8x-4x^2-1+4x=8x \to 3x^2-4x-15=0$

$$\to x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 3\cdot(-15)}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{4\pm 14}{6}\ \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}=0$

b) $\frac{(x-1)(x+2)}{12}-\frac{(x+1)(x-2)}{6}-1=\frac{x-3}{3}$

c) $\frac{(x-1)^2-3x+1}{15}+\frac{x+1}{5}=0$

d) $\frac{x+1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{x+2}{3}+\frac{(x-2)^2}{6}=\frac{1}{6}$

Comprueba que una no tiene solución y las soluciones, no ordenadas, de las otras son 1 y –2; $\pm\sqrt{3}$ y 2.

a) $\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}=0 \rightarrow 12\left(\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}\right) \rightarrow$

$\rightarrow 4x(x-1)-3x(x+1)+3x+4=0 \rightarrow 4x^2-4x-3x^2-3x+3x+4=0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-4x+4=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 4}}{2}=2$

b) $\frac{(x-1)(x+2)}{12}-\frac{(x+1)(x-2)}{6}-1=\frac{x-3}{3} \rightarrow \frac{x^2+x-2}{12}-\frac{x^2-x-2}{6}-1=\frac{x-3}{3} \rightarrow$

$\rightarrow 12\left(\frac{x^2+x-2}{12}-\frac{x^2-x-2}{6}-1\right)=12\left(\frac{x-3}{3}\right) \rightarrow$

$\rightarrow x^2+x-2-2(x^2-x-2)-12=4(x-3) \rightarrow$

$\rightarrow x^2+x-2-2x^2+2x+4-12=4x-12 \rightarrow -x^2-x+2=0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$ $\begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

c) $\frac{(x-1)^2-3x+1}{15}+\frac{x+1}{5}=0 \rightarrow 15\left[\frac{(x-1)^2-3x+1}{15}+\frac{x+1}{5}\right]=0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-2x+1-3x+1+3x+3=0 \rightarrow x^2-2x+5=0 \rightarrow$

$\rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 5}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

d) $\frac{x+1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{x+2}{3}+\frac{(x-2)^2}{6}=\frac{1}{6} \rightarrow$

$\rightarrow 12\left(\frac{x+1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{x+2}{3}+\frac{(x-2)^2}{6}\right)=12\cdot\frac{1}{6} \rightarrow$

$\rightarrow 6(x+1)-3(x^2-2x+1)-4(x+2)+2(x^2-4x+4)=2 \rightarrow$

$\rightarrow 6x+6-3x^2+6x-3-4x-8+2x^2-8x+8=2 \rightarrow$

$\rightarrow -x^2+3=0 \rightarrow x^2=3$ $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

15 Resuelve.

a) $\dfrac{(5x-4)(5x+4)}{4}=\dfrac{(3x-1)^2-9}{2}$ b) $\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{(4-x)^2}{9}=\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{(3x+1)(2x+3)}{21}+\dfrac{x^2+3}{7}=\dfrac{x^2+x-2}{3}$ d) $\dfrac{x^2-4}{3}+\dfrac{(2x-2)^2}{8}=\dfrac{7x^2-10}{12}$

a) $\dfrac{(5x-4)(5x+4)}{4}=\dfrac{(3x-1)^2-9}{2} \to \dfrac{25x^2-16}{4}=\dfrac{2(9x^2+1-6x-9)}{4} \to$

$\to 25x^2-16=18x^2+2-12x-18 \to 7x^2+12x=0 \to$

$\to x(7x+12)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=-12/7 \end{array}\right.$

b) $9\cdot\left(\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{(4-x)^2}{9}\right)=9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right) \to 3x+9-(4-x)^2=3 \to$

$\to 3x+9-16+8x-x^2=3 \to -x^2+11x-10=0 \to$

$\to x=\dfrac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot(-1)\cdot(-10)}}{-2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{81}}{-2}=\dfrac{-11\pm 9}{-2} \to x_1=1;\ x_2=10$

c) $21\cdot\left[\dfrac{(3x+1)(2x+3)}{21}+\dfrac{x^2+3}{7}\right]=21\cdot\left(\dfrac{x^2+x-2}{3}\right) \to$

$\to (3x+1)\cdot(2x+3)+3x^2+9=7x^2+7x-14 \to$

$\to 6x^2+9x+2x+3+3x^2+9=7x^2+7x-14 \to 9x^2+11x+12=7x^2+7x-14 \to$

$\to 2x^2+4x+26=0 \to x^2+2x+13=0 \to x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 13}}{2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{-48}}{2} \to$

$\to$ No tiene solución.

d) $24\cdot\left[\dfrac{x^2-4}{3}+\dfrac{(2x-2)^2}{8}\right]=24\cdot\left(\dfrac{7x^2-10}{12}\right) \to 8x^2-32+3\cdot(2x-2)^2=14x^2-20 \to$

$\to 8x^2-32+12x^2-24x+12=14x^2-20 \to 20x^2-24x-20=14x^2-20 \to$

$\to 6x^2-24x=0 \to 6x(x-4)=0 \to x_1=0;\ x_2=4$

16 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - \frac{3}{x} = \frac{x+1}{x}$

b) $\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$

c) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}$

d) $\frac{15}{x} = \frac{72-6x}{2x^2} + 2$

a) $x \cdot \left(5x - \frac{3}{x}\right) = x \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right) \to 5x^2 - 3 = x + 1 \to 5x^2 - x - 4 = 0 \to$

$\to x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{10} = \frac{1 \pm 9}{10} \to x_1 = 1;\ x_2 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

b) $6x \cdot \left(\frac{x+2}{3} - \frac{1}{x}\right) = 6x \cdot \left(\frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}\right) \to 2x^2 + 4x - 6 = 6x - 18 + 12 - 3x^2 \to$

$\to 5x^2 - 2x = 0 \to x \cdot (5x - 2) = 0 \to x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{5}$

Debemos descartar la solución $x_1 = 0$, ya que anula algunos denominadores.

c) $2x\left(\frac{x+3}{2} - \frac{1}{x}\right) = 2x\left(\frac{x-3}{x} + \frac{4-x^2}{2x}\right) \to x^2 + 3x - 2 = 2x - 6 + 4 - x^2 \to$

$\to 2x^2 + x = 0 \to x(2x+1) = 0 \to x_1 = 0;\ x_2 = \frac{-1}{2}$

Debemos descartar la solución $x_1 = 0$, ya que anula algunos denominadores.

d) $2x^2\left(\frac{15}{x}\right) = 2x^2\left(\frac{72-6x}{2x^2} + 2\right) \to 30x = 72 - 6x + 4x^2 \to 4x^2 - 36x + 72 = 0 \to$

$\to x^2 - 9x + 18 = 0$

$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} \to x_1 = 6;\ x_2 = 3$

Ecuaciones de grado superior a dos

17 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **b)** $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$ **d)** $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

e) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ **f)** $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \to z^2 - 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \to x_1 = 6;\ x_2 = 3 \begin{cases} z_1 = 9 \to x^2 = 9 \to x_1 = 3;\ x_2 = -3 \\ z_2 = 4 \to x^2 = 4 \to x_3 = 1;\ x_4 = -2 \end{cases}$$

b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \to z^2 - 5z + 6 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} z_1 = 3 \to x^2 = 3 \to x_1 = \sqrt{3};\ x_2 = -\sqrt{3} \\ z_2 = 2 \to x^2 = 2 \to x_3 = \sqrt{2};\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0 \to z^2 - 15z - 16 = 0$

$$z = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{15 \pm 17}{2} \begin{cases} z_1 = 16 \to x^2 = 16 \to x_1 = 4;\ x_2 = -4 \\ z_2 = -1 \to x^2 = -1 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$$

d) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0 \to z^2 - 5z - 6 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \begin{cases} z_1 = 6 \to x^2 = 6 \to x_1 = \sqrt{6};\ x_2 = -\sqrt{6} \\ z_2 = -1 \to x^2 = -1 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$$

e) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \to z^2 + 2z + 1 = 0 \to (z + 2)^2 = 0 \to z = -1 \to$

$\to x^2 = -1$ No tiene solución.

f) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0 \to z^2 + 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} z_1 = -4 \to x^2 = -4 \text{ No tiene solución.} \\ z_2 = -9 \to x^2 = -9 \text{ No tiene solución.} \end{cases}$$

18 Se pueden resolver algunas ecuaciones de grado superior a dos si se factoriza y se iguala a cero cada factor. Resuelve así estas ecuaciones:

a) $x^4 - 9x^2 = 0$ **b)** $x^3 - x^2 + 2x = 0$

c) $x^3 - 2x^2 + x = 0$ **d)** $3x^3 - 9x^2 - 30x = 0$

a) $x^4 - 9x^2 = 0 \to x^2(x^2 - 9) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} x^2 = 0 \to x_1 = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \to x^2 = 9 \to x_2 = 3;\ x_3 = -3 \end{cases}$$

b) $x^3 - x^2 + 2x = 0 \to x(x^2 - x + 2) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \to \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

c) $x^3 - 2x^2 + x = 0 \to x(x^2 - 2x + 1) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \to (x - 1)^2 = 0 \to x_2 = 1 \end{cases}$$

d) $3x^3 - 9x^2 - 30x = 0 \to 3x(x^2 - 3x - 10) = 0 \to$

$$\to \begin{cases} 3x = 0 \to x_1 = 0 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \to x_2 = 5;\ x_3 = -2 \end{cases}$$

19 **Resuelve con ayuda de Ruffini:**

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$ **b)** $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ **d)** $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 0 & -3 & 2 & \\
1 & & 1 & 1 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 & \to x_1 = 1 \\
-2 & & -2 & 2 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & 0 & & \to x_2 = -2 \\
1 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & &
\end{array}$$

b) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & -2 & 1 & -2 & \\
2 & & 2 & 0 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & \to x = 2
\end{array}$$

$(x^2 + 1) = 0 \to$ Sin solución.

c) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & -1 & -5 & -3 & \\
-1 & & -1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 0 & \to x_1 = -1 \\
-1 & & -1 & 3 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & 0 & & \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & & \to x_2 = 3
\end{array}$$

d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 2 & -9 & -18 & \\
3 & & 3 & 15 & 18 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 6 & 0 & \to x_1 = 3 \\
-3 & & -3 & -6 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & & \to x_2 = -3 \\
-2 & & -2 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & & & \to x_3 = -2
\end{array}$$

Resolución por tanteo

20 **Busca por tanteo una solución exacta de cada una de las siguientes ecuaciones:**

a) $3^{x-5} = 27$ **b)** $\sqrt{x+9} = 13$ **c)** $(x+1)^3 = -1$

d) $x^3 - x^2 = 48$ **e)** $x^3 - x^2 - x = 15$ **f)** $(x-2)^4 - 625 = 0$

a) $x = 8$ b) $x = 160$ c) $x = -2$

d) $x = 4$ e) $x = 3$ f) $x = 7$

21 Busca por tanteo una solución aproximada de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 = 381$ **b)** $x^4 - x^2 = 54$ **c)** $x - \sqrt{x+5} = 0$

d) $3^{x-1} = 0{,}005$ **e)** $5x = 0{,}32$ **f)** $x^{0{,}75} = 17$

a) $x \approx 7{,}25$ b) $x \approx 4{,}14$ c) $x \approx 3$

d) $x \approx -4$ e) $x \approx -0{,}7$ f) $x \approx 44$

22 Resuelve por tanteo.

a) $\sqrt{x+8} = x - 1$ **b)** $2x^3 - x = 17$

c) $\sqrt{x^2+3} = 2x$ **d)** $2^x = 0{,}04$

a) $x \approx 4{,}58$ b) $x \approx 2{,}12$

c) $x \approx 1$ d) $x \approx -4{,}5$

Resuelve problemas

23 Se reparten 230 € entre tres personas de modo que la segunda recibe 1/3 más que la tercera, y la primera, 10 € más que la segunda. ¿Cuánto recibe cada una?

Llamamos x a lo que recibe la tercera persona.

La segunda persona recibe $\left(x + \frac{x}{3}\right)$.

La primera persona recibe $\left(x + \frac{x}{3} + 10\right)$.

$$x + \left(x + \frac{x}{3}\right) + \left(x + \frac{x}{3} + 10\right) = 230 \rightarrow 3x + \frac{2x}{3} = 220 \rightarrow 11x = 660 \rightarrow x = 60$$

La tercera persona recibe 60 €; la segunda, 80 €, y la primera, 90 €.

24 Un grupo de amigas observan que, para pagar la cuenta de una comida, si ponen 12 € cada una les faltan 8 €, y si ponen un euro más cada una les sobran 2 €. ¿Cuántas son y cuánto costó la comida?

Llamamos x al número de amigas.

$12x + 8 = 13x - 2 \rightarrow 10 = x \rightarrow x = 10$

Son 10 amigas. La comida costó $(12 \cdot 10 + 8) = 128$ €.

25 La longitud de los lados de un rectángulo son dos números enteros consecutivos. ¿Puede ser su perímetro igual a 92 cm? ¿Y a 106 cm? Justifica tu respuesta.

Llamamos x y $x + 1$ a los lados del rectángulo.

- $2(x + x + 1) = 92 \rightarrow 4x = 90 \rightarrow x = 22{,}5$

  El perímetro no puede ser 92 cm porque los lados no son números enteros, como pide el enunciado.

- $2(x + x + 1) = 106 \rightarrow 4x = 104 \rightarrow x = 26$

  El perímetro sí puede ser 106 cm. En este caso, los lados del rectángulo miden 26 cm y 27 cm.

Página 125

26 **La suma de cinco números enteros consecutivos es igual a cinco veces el tercero. ¿Cuántos quintetos de números hay que cumplan esta condición?**

Llamamos x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ y $x + 4$ a los cinco números consecutivos.

$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 = 5(x + 2) \rightarrow 5x + 10 = 5x + 10 \rightarrow 0x = 0$

Hay infinitos quintetos de números que cumplen la condición.

27 **Averigua si existe algún número, x, tal que la tercera parte de x más la sexta parte de x es igual a su mitad aumentada en 1.**

$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{x}{2} + 1 \rightarrow \frac{2x + x}{6} = \frac{3x + 6}{6} \rightarrow 3x = 3x + 6 \rightarrow 0x = 6$

No tiene solución. No hay ningún número que cumpla la condición pedida.

28 **Yago tiene 25 años menos que su padre. Dentro de 10 años, la edad del padre será el doble que la de Yago. ¿Qué edad tiene cada uno?**

Edad actual del padre: x. Edad actual de Yago: $x - 25$

Dentro de 10 años $\rightarrow x + 10 = 2(x - 25 + 10) \rightarrow x + 10 = 2x - 30 \rightarrow x = 40$

Yago tiene $40 - 25 = 15$ años, y su padre, 40 años.

29 **El precio de unos zapatos ha subido un 15 % en diciembre y ha bajado un 20 % en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96 €. ¿Cuál era el precio inicial?**

Llamamos x al precio inicial de los zapatos.

$1{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot x = x - 6{,}96 \rightarrow 0{,}08x = 6{,}96 \rightarrow x = 87$

El precio inicial de los zapatos era 87 €.

30 **En la fiesta benéfica que organizó una guardería se recaudaron 2 136 €. Asistieron 90 personas adultas y 116 niños y niñas. Si la entrada infantil costaba 10 € menos que la adulta, ¿cuál era su precio?**

Llamamos x al precio de la entrada adulta. Por tanto, la infantil costaba $x - 10$.

$90x + 116(x - 10) \rightarrow 2\,136 \rightarrow 206x = 3\,296 \rightarrow x = 16$

La entrada adulta costaba 16 €, y la infantil, 6 €.

31 **Dos hermanas se llevan 3 años y su padre tiene 45. Hace 7 años, la suma de las edades de las hijas era la mitad que la del padre. ¿Qué edad tiene cada hija?**

Edades actuales de las hermanas: x y $x + 3$.

Hace 7 años $\rightarrow (x - 7) + (x + 3 - 7) = \frac{45 - 7}{2} \rightarrow 2x - 11 = 19 \rightarrow x = 15$

Las edades de las hermanas son 15 y 18 años.

32 **Un coleccionista de cómics vendió 2/5 de su colección y luego compró otros 100. Después de esto, tenía 40 cómics más que al principio. ¿Cuántos tenía?**

Llamamos x al número inicial de cómics.

$\frac{3}{5}x + 100 = x + 40 \rightarrow 3x + 500 = 5x + 200 \rightarrow x = 150$

Al principio tenía 150 cómics.

33 **La jefa de estudios de un centro escolar tiene que repartir a los nuevos estudiantes entre las clases de 3.º de ESO. Si añade 5 estudiantes por clase, sobran 3, y si añade 7 por clase, faltan 5. ¿Cuántas clases y cuántos estudiantes nuevos hay?**

Llamamos x al número de clases.

$5x + 3 = 7x - 5 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

Hay 4 clases y $(5 \cdot 4 + 3) = 23$ estudiantes.

34 **Creía tener el dinero justo para comprar 8 entradas de teatro pero el precio de cada una es 4 € más caro de lo que pensaba. Ahora solo puedo comprar 5 y me sobran 7 €. ¿Cuál es el precio actual de una entrada?**

Llamamos x al precio que pensaba que costaba una entrada.

$8x = 5(x + 4) + 7 \rightarrow 8x = 5x + 27 \rightarrow x = 9$

El precio actual de una entrada es $9 + 4 = 13$ €.

35 **De un depósito de agua se sacan 2/7 de su contenido; después, 40 litros y, por último, 5/11 del agua restante. Si quedan aún 60 litros, ¿cuántos había?**

Llamamos x a la cantidad de agua inicial.

Sacamos $\frac{2}{7}x \rightarrow$ quedan $\frac{5}{7}x$

Sacamos 40 L $\rightarrow$ quedan $\frac{5}{7}x - 40$

Sacamos $\frac{5}{11}$ de lo que hay $\rightarrow$ quedan $\frac{6}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right)$

$\frac{6}{11}\left(\frac{5}{7}x - 40\right) = 60 \rightarrow \frac{30x}{77} - \frac{240}{11} = 60 \rightarrow 30x = 6\,300 \rightarrow x = 210$

Había 210 L al principio.

36 **Dos ciudades, A y B, distan 150 km. Un camión sale de A hacia B a 80 km/h. A la misma hora sale de B hacia A un coche que tarda 45 min en encontrarse con el camión. ¿Qué velocidad lleva el coche?**

Llamamos x a la velocidad del coche.

El coche y el camión se aproximan a $(80 + x)$ km/h.

En $\frac{3}{4}$ h recorren 150 km $\rightarrow (80 + x) \cdot \frac{3}{4} = 150 \rightarrow \frac{3x}{4} = 90 \rightarrow x = 120$

El coche lleva una velocidad de 120 km/h.

37 **Contratamos un autobús para una salida al campo. Con todas las plazas ocupadas, el precio del billete es de 12 €; pero quedaron 4 plazas libres, por lo que el viaje costó 13,50 €. ¿Cuántas plazas tiene el autobús?**

Llamamos x al número de plazas del autobús.

$12x = 13{,}5(x - 4) \rightarrow 13{,}5x - 12x = 54 \rightarrow x = 36$

El autobús tiene 36 plazas.

38 **De un depósito de aceite se sacan los 2/3 de su contenido y después se le añaden 25 litros. Al día siguiente se repite esta operación, y la cantidad que queda en el depósito es los 2/3 de lo que había al principio. ¿Cuántos litros de aceite había?**

Llamamos x a los litros de aceite que había.

Cada vez que sacamos $\frac{2}{3}$, queda $\frac{1}{3}$. Por tanto:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3} + 25\right) + 25 = \frac{2}{3}x \rightarrow \frac{100}{3} = \frac{5x}{9} \rightarrow x = 60$$

En el depósito había 60 L de aceite.

39 **Un coche sale de un pueblo a 90 km/h. Media hora después sale otro del mismo lugar y en la misma dirección y tarda dos horas en alcanzar al primero. Calcula la velocidad del segundo coche y la distancia que recorren hasta el alcance.**

Llamamos x a la velocidad del segundo coche.

$90 \cdot 2{,}5 = x \cdot 2 \rightarrow x = 112{,}5$

La velocidad del segundo coche es 112,5 km/h. Recorren 225 km hasta el alcance.

40 **¿Cuántos litros de aceite de orujo de 1,60 €/L tenemos que añadir a 60 L de aceite de oliva de 2,80 €/L para obtener una mezcla de 2,50 €/L?**

x son los litros de aceite de orujo.

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
ORUJO	x	1,6	$1{,}6x$
OLIVA	60	2,8	$2{,}8 \cdot 60$
MEZCLA	$x + 60$	2,5	$2{,}5(x + 60)$

$1{,}6x + 168 = 2{,}5x + 150 \rightarrow$

$\rightarrow 18 = 0{,}9x \rightarrow x = 20\ l$

Tenemos que añadir 20 litros.

41 **Una ciclista sale de A hacia B a las 8 de la mañana. A la misma hora sale de B hacia A un autobús a una velocidad 40 km/h superior a la de la ciclista. Si la distancia entre A y B es 120 km y tardan 1,2 h en cruzarse, ¿cuáles eran sus velocidades?**

Llamamos x a la velocidad del ciclista. Velocidad del autobús: $x + 40$. Se aproximan a una velocidad de $x + x + 40 = 2x + 40$.

$120 = (2x + 40) \cdot 1{,}2 \rightarrow 120 = 2{,}4 + 48 \rightarrow x = 30$

La velocidad del ciclista es 30 km/h, y la del autobús, 70 km/h.

42 Un ciclista que va a 21 km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25 km. ¿Qué velocidad lleva el que va delante?

Llamamos x a la velocidad del ciclista que va delante.

$$\frac{3}{4} \cdot 21 = 2{,}25 + \frac{3}{4}x \rightarrow 0{,}75x = 15{,}75 - 2{,}25 \rightarrow x = \frac{13{,}5}{0{,}75} = 18$$

El ciclista que va delante lleva una velocidad de 18 km/h.

43 Ana sale en su coche a 80 km/h. Se para 15 min para echar gasolina y después conduce un buen rato a 100 km/h. Cuando llega a su destino, comprueba que hizo 250 km en 3 horas, contando la parada. ¿Cuánto tiempo condujo a 80 km/h?

Llamamos x al tiempo que conduce a 80 km/h.

El tiempo del viaje, sin parada, es 3 h – 15 min = 2,75 h. Por tanto, el tiempo que conduce a 100 km/h es $2{,}75 - x$.

El espacio que recorre a 80 km/h es $80x$ y el que recorre a 100 km/h es $100(2{,}75 - x)$. Así:

$$80x + 275 - 100x = 250 \rightarrow -20x = -25 \rightarrow x = \frac{-25}{-20} = 1{,}25$$

Ana conduce 1,25 h a 80 km/h.

44 Al mezclar 30 kg de pintura con 50 kg de otra de calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30 €/kg. Si el precio de la barata es la mitad que el de la otra, ¿cuál es el precio de cada pintura?

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
PINTURA I	30	$2x$	$60x$
PINTURA II	50	x	$50x$
MEZCLA	80	3,30	$80 \cdot 3{,}3$

$$60x + 50x = 264 \rightarrow$$
$$\rightarrow 110x = 264 \rightarrow x = 2{,}4 \text{ €/kg}$$

La pintura cara vale 4,8 €/kg, y la pintura barata, 2,4 €/kg.

45 Una marca de café de 14,15 €/kg se elabora con un 30% de café colombiano de 18 €/kg, y el resto, con otro. ¿Cuál es el precio de ese otro?

Para obtener 1 kg de mezcla, ponemos 0,3 kg de café colombiano y 0,7 kg del otro café.

$$0{,}3 \cdot 18 + 0{,}7x = 1 \cdot 14{,}15 \rightarrow 0{,}7x = 8{,}75 \rightarrow x = 12{,}5 \text{ €/kg}$$

El precio del café barato es 12,5 €/kg.

46 Halla dos números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 145.

Los números son x y $x + 1$.

$$x^2 + (x+1)^2 = 145 \rightarrow x^2 + x^2 + 1 + 2x - 145 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x^2 + 2x - 144 = 0 \rightarrow x^2 + x - 72 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 72 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 8 \\ x = -9 \end{cases}$$

Son 8 y 9, o bien, –9 y –8. Hay dos soluciones.

47 **Si al producto de un número natural por su siguiente le restamos 31, obtenemos el quíntuple de la suma de ambos. ¿De qué número se trata?**

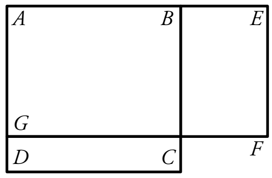
x es el número que buscamos.

$x(x + 1) - 31 = 5(x + x + 1) \rightarrow x^2 + x - 31 = 10x + 5 \rightarrow x^2 - 9x - 36 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{9 \pm 15}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -3 \end{cases}$$

El número puede ser 12, o bien, –3. Hay dos soluciones.

48 **El área del cuadrado *ABCD* es igual a la del rectángulo *AEFG*. Si $\overline{BE}$ = 4 cm y $\overline{GD}$ = 3 cm, ¿cuánto mide el lado del cuadrado?**



Llamamos x al lado del cuadrado *ABCD*.

$x^2 = (x + 4)(x - 3) \rightarrow x^2 = x^2 - 3x + 4x - 12 \rightarrow x = 12$

El lado del cuadrado mide 12 cm.

Página 126

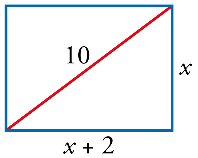
49 **Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?**

Llamamos x al lado del cuadrado.

$(2x)^2 = x^2 + 147 \rightarrow 3x^2 = 147 \rightarrow x = 7$

El lado del cuadrado mide 7 cm.

50 **Calcula los lados de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm y en el que la base mide 2 cm más que la altura.**

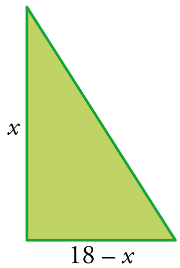


$x^2 + (x + 2)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 100 \rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-48)}}{2} = \dfrac{-2 \pm 14}{2} \begin{cases} x = 6 \\ x = -8. \text{ No vale.} \end{cases}$

La altura mide 6 cm, y la base, 8 cm.

51 **Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es de 40 cm^2. Halla las medidas de los catetos de este triángulo.**

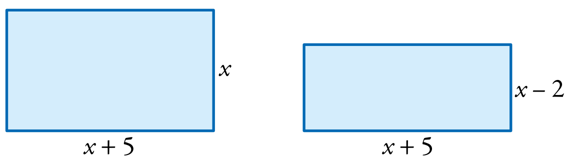


Área: $\dfrac{x(18 - x)}{2} = 40 \rightarrow 18x - x^2 = 80 \rightarrow x^2 - 18x + 80 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{18 \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 80}}{2} = \dfrac{18 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 11 \\ x = 7 \end{cases}$

Los catetos miden 7 cm y 11 cm, respectivamente.

52 **La base de un rectángulo mide 5 cm más que la altura. Si disminuimos la altura en 2 cm, el área del nuevo rectángulo será de 60 cm^2. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?**

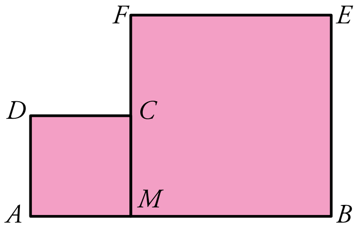


$(x + 5)(x - 2) = 60 \rightarrow x^2 + 3x - 10 = 60 \rightarrow x^2 - 3x - 70 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-70)}}{2} = \dfrac{3 \pm 17}{2} \begin{cases} x = 10 \\ x = -7. \text{ No vale.} \end{cases}$

La altura mide 7 cm, y la base, 12 cm.

53 **Sobre un segmento AB de 10 cm de longitud se construyen dos cuadrados. Expresa la suma de las áreas de los dos cuadrados en función de x ($\overline{AM} = x$).**



a) ¿Cuál debe ser la longitud de AM para que la suma de las áreas sea 52 cm^2?

b) ¿Puede ser la suma de las áreas igual a 40 cm^2?

Área del cuadrado pequeño = x^2

Área del cuadrado grande = $(10 - x)^2$

Área de las áreas = $x^2 + (10 - x)^2$

a) $x^2 + (10 - x)^2 = 52 \rightarrow x^2 + 100 - x^2 - 20x = 52 \rightarrow 20x^2 - 20x + 48 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

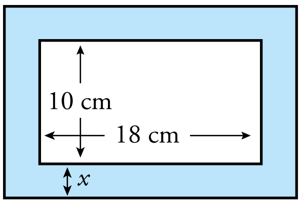
Como x es el lado pequeño, $\overline{AM} = 4$ cm.

b) $x^2 + (10 - x)^2 = 40 \rightarrow 2x^2 - 20x + 60 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 30 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 120}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{2} \text{ Sin solución.}$$

La suma de las área no puede ser igual a 40 cm^2.

54 **¿Cuánto debe valer x para que el área de la parte coloreada de la figura sea 204 cm^2?**



$(10 + 2x)(18 + 2x) - 18 \cdot 10 = 204 \rightarrow 180 + 20x + 36x + 4x^2 - 180 - 204 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2 + 56x - 204 = 0 \rightarrow x^2 + 14x - 51 = 0$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 204}}{2} = \frac{-14 \pm 20}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -17 \text{ No vale} \end{cases}$$

Solución: $x = 3$ cm.

55 **Un padre reparte una cantidad de dinero entre sus tres hijos de forma directamente proporcional a sus edades, que son 12, 18 y 20 años. Al menor le correspondieron 96 € menos que al mayor. Calcula lo que dio a cada uno y la cantidad repartida.**

Llamamos x a la cantidad repartida.

$12 + 18 + 20 = 50 \rightarrow$ Al mayor le corresponden $\dfrac{20}{50}x$.

$\rightarrow$ Al menor le corresponden $\dfrac{12}{50}x$.

Por tanto:

$$\frac{20}{50}x = \frac{12}{50}x + 96 \rightarrow 20x = 12x + 4\,800 \rightarrow x = 600$$

Repartió 600 €. Al hijo mayor le dio 240 €; al mediano, $\dfrac{18}{50} \cdot 600 = 216$ €; y al menor, 144 €.

56 **En un laboratorio de investigación sobre vacunas necesitan mezclar dos sustancias de 30 % y 10 % de concentración, respectivamente. ¿Cuántos litros de cada tipo deben tomar para obtener 20 litros con una concentración del 15 %?**

Llamamos x a la cantidad de la 1.ª sustancia (al 30 %) que usamos en la mezcla. Por tanto, de la 2.ª sustancia usamos $(20 - x)$ L en la mezcla.

$0{,}3x + 0{,}1(20 - x) = 0{,}15 \cdot 20 \rightarrow 0{,}3x + 2 - 0{,}1x = 3 \rightarrow 0{,}2x = 1 \rightarrow x = 5$

Debemos tomar 5 L al 30 % y 15 L al 10 %.

57 **¿Cuántos términos de la progresión 3, 7, 11, … se deben tomar para que la suma de todos ellos sea 820?**

3, 7, 11, … $\rightarrow$ Progresión airtmética con $a_1 = 3$ y $d = 4$.

Término general: $a_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow \frac{3 + (4n - 1)}{2} \cdot n = 820 \rightarrow (4n + 2)n = 1\,640 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4n^2 + 2n - 1\,640 = 0 \rightarrow 2n^2 + n - 820 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 6\,560}}{4} = \frac{-1 \pm 81}{4} \begin{cases} n_1 = 20 \\ n_2 = -20{,}5 \ \text{No vale.} \end{cases}$$

Hay que coger 20 términos.

58 **La diferencia entre invertir una cantidad al 4 % anual durante 3 años o colocarla al 6 % anual durante un año y medio, con periodos de capitalización mensuales, es de 618 €. Calcula dicha cantidad.**

Mira la página 53 de la unidad 3.

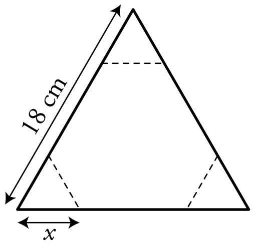
- Llamamos x a la cantidad invertida.
- Si invertimos al 4 % anual durante 3 años, obtenemos $x \cdot (1{,}04)^3$.
- Si invertimos al 6 % anual durante 1,5 años = 18 meses con periodos de capitalización mensual, obtenemos $x \cdot (1 + 0{,}005)^{18}$, pues un 6 % anual equivale a un 6 : 12 = 0,5 % mensual.

  Por tanto:

  $$x \cdot (1{,}04)^3 - x \cdot (1{,}005)^{18} = 618 \rightarrow x = \frac{618}{1{,}04^3 - 1{,}005^{18}} \rightarrow x \approx 19\,977{,}33 \text{ €}.$$

  La cantidad invertida es 19 977,33 €.

59 **En un triángulo equilátero de lado 18 cm se corta en cada esquina un pequeño triángulo equilátero de lado x cm, de forma que la suma de los perímetros de los tres triángulos cortados es igual al perímetro del hexágono que queda. ¿Cuál es el valor de x?**



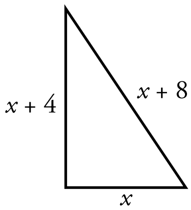
$\rightarrow$ Suma de los tres perímetros: $9x$

Perímetro del hexágono: $3(18 - 2x) + 3x$

Por tanto: $9x = 3(18 - 2x) + 3x \rightarrow 6x = 54 - 6x \rightarrow x = \dfrac{54}{12} = 4{,}5$

Solución: $x = 4{,}5$ cm.

60 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 cm más que el cateto mayor, y este, 4 cm más que el cateto menor. Calcula la medida de los tres lados.**



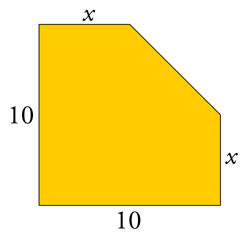
$\rightarrow (x + 8)^2 = (x + 4)^2 + x^2 \rightarrow x^2 + 64 + 16x = x^2 + 16 + 8x + x^2 \rightarrow$

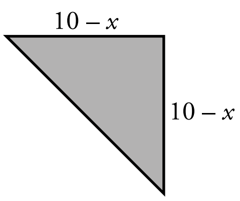
$\rightarrow 64 + 16x = 16 + 8x + x^2 \rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2} \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = -4 \quad \text{No vale.} \end{cases}$$

Los lados miden 12 cm, 16 cm y 20 cm.

61 **¿Cuánto debe valer x para que el área de esta figura sea 82 cm^2?**





El área del triángulo tiene que ser 18 cm^2.

Por tanto:

$$\frac{(10 - x)^2}{2} = 18 \rightarrow 100 - 20x + x^2 = 36 \rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = 16 \quad \text{No vale.} \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Solución: $x = 4$ cm.

62 **Dos números naturales suman 85 y al dividir el cuadrado del mayor entre el cuadrado del menor se obtiene 5 de cociente y 475 de resto. Calcúlalos.**

Si llamamos x a un número, el otro será $85 - x$.

$(85 - x)^2 = 5x^2 + 475 \rightarrow 7225 - 170x + x^2 = 5x^2 + 475 \rightarrow 4x^2 + 170x - 6750 = 0$

$$x = \frac{-170 \pm \sqrt{170^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6750)}}{2 \cdot 4} = \frac{-170 \pm \sqrt{136900}}{8} = \frac{-170 \pm 370}{8} \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = -67,5 \end{cases}$$

La solución $x = -67,5$ no es válida, pues no es un número natural.

Los números son 25 y 60.

63 **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, el resultado es 18. ¿Cuál es el número si la cifra de las unidades es 2?**

Supongamos que el número es ab, y como $b = 2$:

$b + 10a - a - 10b = 18 \rightarrow 9a - 9b = 18 \rightarrow 9a - 18 = 18 \rightarrow 9a = 36 \rightarrow a = 4$

El número es el 42.

64 **Un depósito de agua tiene un grifo de abastecimiento y un desagüe. El grifo llena el depósito en 9 horas. Si además se abre el desagüe, el depósito tarda 36 horas en llenarse. Averigua cuánto tarda el desagüe en vaciar el depósito lleno, estando cerrado el grifo.**

El grifo llena, en 1 hora, $\frac{1}{9}$ del depósito.

El desagüe vacía, en 1 hora, $\frac{1}{x}$ del depósito.

Abriendo los dos, llenan en 1 hora $\frac{1}{36}$ del depósito.

Por tanto:

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{x} = \frac{1}{36} \rightarrow \frac{x-9}{9x} = \frac{1}{36} \rightarrow 36(x-9) = 9x \rightarrow 36x - 324 = 9x \rightarrow$$

$$\rightarrow 27x = 324 \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Tarda en vacias el depósito lleno 12 h.

65 **Un grifo tarda el doble que otro en llenar un depósito. Abriendo los dos a la vez, tardan 8 horas. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en llenarlo?**

Un grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{x}$ del depósito, y el otro grifo llena, en 1 h, $\frac{1}{2x}$ del depósito.

Los dos juntos, en 1 hora, llenan $\frac{1}{8}$.

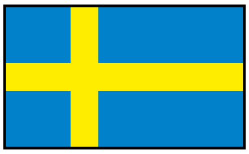
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{3}{2x} = \frac{1}{8} \rightarrow 2x = 24 \rightarrow x = 12 \text{ h}$$

Uno de los grifos tarda 12 h, y el otro, 24 horas en llenar el depósito.

Resuelve: un poco más difícil

66 **La bandera de Suecia es un rectángulo azul con una cruz amarilla como la de la figura. El área de la cruz ocupa los 3/10 de la superficie del rectángulo, y sus dos brazos tienen la misma anchura, *x*.**

Calcula *x* si las dimensiones del rectángulo son 16 dm × 10 dm.



$$\frac{3}{10}(16 \cdot 10) = 48$$

$$16x + 10x - x^2 = 48 \rightarrow x^2 - 26x + 48 = 0$$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 192}}{2} = \frac{26 \pm 22}{2} \begin{cases} x_1 = 24 & \text{No vale.} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Solución: $x = 2$ dm.

Página 127

67 **Un pintor tarda 3 h más que otro en pintar una pared. Trabajando juntos, pintarían la misma pared en 2 h. ¿Cuánto tardaría cada uno en solitario?**

Un pintor tarde x h en pintar una pared. En 1 hora pinta $\frac{1}{x}$ de pared.

El otro tarde $(x+3)$ h. En 1 hora pinta $\frac{1}{x+3}$ de pared.

Trabajando juntos tardan 2 h. En 1 hora pintan $\frac{1}{2}$ de pared.

Por tanto: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \to 2(x+3) + 2x = x(x+3) \to 2x + 6 + 3x = x^2 + 3x \to$

$\to x^2 - x + 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \ \text{ No vale.} \end{array} \right.$$

Un pintor tardaría 3 h, y el otro, 6 h.

68 **Ana, en su camino diario al colegio, ha comprobado que si va andando a 4 km/h llega 5 minutos tarde, pero si se da prisa y va a 5 km/h llega 10 minutos antes de la hora. ¿Cuál es la distancia al colegio? ¿Llegará puntual si hace la mitad del camino a 4 km/h y la otra mitad a 5 km/h?**

- Llamamos x a la distancia al colegio.

  La diferencia entre 25 a 4 km/h y 5 km/h son 5 + 10 = 15 min = 1/4 h.

  $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{1}{4} \to x = 5$

  La distancia al colegio son 5 km.

- $\frac{2,5}{4} + \frac{2,5}{5} = 0,625 + 0,5 = 1,125 \text{ h} = 1 \text{ h } 7 \text{ min.}$

  Si va a 5 km/h tarda 1 h. Así que si va mitad y mitad, llegará 3 min antes.

69 **Luisa y Miguel van a visitar a sus abuelos. Como solo tienen una bicicleta, acuerdan que Miguel la lleve hasta la mitad del camino y la deje allí hasta que Luisa, que sale andando, la recoja. La segunda mitad, Miguel caminará y Luisa irá en bicicleta. De esta forma tardan una hora en llegar a su destino. El que camina va a 4 km/h y el que va en bicicleta, a 12 km/h. ¿Cuál es la distancia que han recorrido? ¿Cuánto tiempo estuvo parada la bicicleta?**

t: tiempo que emplea Miguel en recorrer la mitad del camino en bicicleta.

$12t = 4(1-t) \to 16t = 4 \to t = \frac{1}{4}$ h

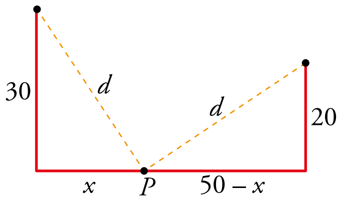
Andando tarda $\frac{3}{4}$ h.

Distancia: $12 \cdot \frac{1}{4} + 4\frac{3}{4} = 3 + 3 = 6$ km

Tiempo de bicicleta parada: La deja cuando ha pasado $\frac{1}{4}$ h y el otro la recoge a los $\frac{3}{4}$ h. Está parada $\frac{1}{2}$ hora.

70 **En las dos orillas de un río hay dos palmeras. La más alta mide 30 codos; la otra, 20 codos, y la distancia entre ambas es de 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Al descubrir los dos pájaros un pez en la superficie del río, se lanzan rápidamente, alcanzando al pez al mismo tiempo.**

¿A qué distancia del tronco de la palmera más alta apareció el pez?



$$\left.\begin{array}{l} d^2 = 20^2 + (50-x)^2 \\ d^2 = 30^2 + x^2 \end{array}\right\}$$ La distancia a P es la misma desde las dos palmeras.

$20^2 + (50-x)^2 = 30^2 + x^2 \to 400 + 2\,500 - 100x + x^2 = 900 + x^2 \to 2\,000 = 100x \to$

$\to x = 20$ codos

A 20 codos de la palmera más alta.

71 **Tenemos tres tetrabriks con forma de prisma rectangular cuyas bases miden 4 cm × 6 cm, 3 cm × 6 cm y 2 cm × 6 cm, y cuyas alturas son, respectivamente, *a*, *b* y *c*. El primero tiene doble capacidad que el segundo; y el segundo, doble que el tercero. Si las alturas suman 39 cm, ¿cuánto medirá cada una?**

Llamamos V_1, V_2 y V_3 a los volúmenes de cada tetrabrik.

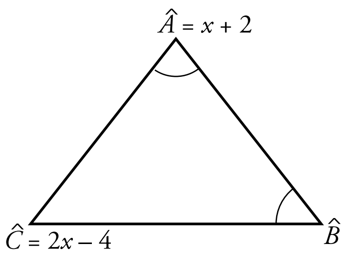
$$\left.\begin{array}{l} V_1 = 4 \cdot 6 \cdot a = 24a \\ V_2 = 3 \cdot 6 \cdot b = 18b \end{array}\right\} \to 24a = 2 \cdot 18b \to a = \frac{36b}{24} \to a = 1{,}5b$$

$$\left.\begin{array}{l} V_2 = 3 \cdot 6 \cdot b = 18b \\ V_3 = 2 \cdot 6 \cdot c = 12c \end{array}\right\} \to 18b = 2 \cdot 12c \to c = \frac{18b}{24} \to c = 0{,}75b$$

$a + b + c = 39 \to 1{,}5b + b + 0{,}75b = 39 \to 3{,}25b = 39 \to b = 12$

$a = 1{,}5 \cdot 12 = 18$ cm; $b = 12$ cm; $c = 0{,}75 \cdot 12 = 9$ cm

72 **En un triángulo *ABC*, el ángulo $\widehat{A}$ mide $x + 2$ grados y el ángulo $\widehat{C}$ mide $2x - 4$ grados. Calcula el valor de x para que el triángulo sea isósceles. María dice que el problema tiene tres soluciones y Pablo dice que solo tiene dos. ¿Quién tiene razón?**



$\to \widehat{B} = 180 - x - 2 - 2x + 4 = 182 - 3x$

- Si $\widehat{A} = \widehat{C} \to x + 2 = 2x - 4 \to x = 6°$

  Entonces: $\widehat{A} = 8°$; $\widehat{B} = 164°$; $\widehat{C} = 8°$
- Si $\widehat{B} = \widehat{C} \to 182 - 3x = 2x - 4 \to x = 37{,}2°$

  Entonces: $\widehat{A} = 39{,}2°$; $\widehat{B} = 70{,}4°$; $\widehat{C} = 70{,}4°$
- Si $\widehat{A} = \widehat{B} \to x + 2 = 182 - 3x \to x = 45°$

  Entonces: $\widehat{A} = 47°$; $\widehat{B} = 47°$; $\widehat{C} = 86°$

Hay tres soluciones. Tiene razón María.

73 **Carmen hace cuentas sobre las compras que ha hecho y observa que el abrigo le ha costado el triple que el bolso; el bolso, 5 € menos que la camisa; la camisa, 6 € más que los deportivos; los deportivos, el doble que el estuche; el estuche, la mitad que el pantalón, y este, 120 € menos que la suma de todos los demás artículos. Calcula el precio de cada compra y el total.**

$A = 3B;\ \ B = C - 5;\ \ C = D + 6;\ \ D = 2E;\ \ E = \frac{P}{2}$

$P = A + B + C + D + E - 120$

$A = 3(C - 5) = 3(D + 6 - 5) = 3(D + 1) = 3(2E + 1) = 3(P + 1) = 3P + 3$

$B = D + 6 - 5 = D + 1 = 2E + 1 = P + 1$

$C = 2E + 6 = P + 6$

$D = P$

$P = 3P + 3 + P + 1 + P + 6 + P + \frac{P}{2} - 120 \ \rightarrow\ 5P + \frac{P}{2} = 110 \ \rightarrow\ \frac{11P}{2} = 110 \ \rightarrow\ P = 20$

$P = 20$ € precio pantalón.

E = 10 € estuche; D = 20 € deportivos; C = 26 € camisa; $B = 21$ € bolso; $A = 63$ € abrigo

Gasto total: 140 €

Reflexiona

74 **¿Verdadero o falso? Razona las respuestas.**

a) La ecuación $5x = 0$ no tiene solución.

b) Si multiplicamos por –3 los dos miembros de una ecuación, su solución no varía.

c) La ecuación $0x = 4$ tiene infinitas soluciones.

d) El discriminante de una ecuación de segundo grado es $-b^2 + 4ac$.

e) La ecuación $ax^2 + c = 0$ no tiene solución si $c > 0$.

f) Una solución de $2^x + 2^{x-1} - 2^{x+1} = -4$ es –2.

g) Si $b^2 - 4ac = -1$, la ecuación de segundo grado no tiene solución.

a) Falso. $x = 0$ es solución de la ecuación.

b) Verdadero. Se obtiene una ecuación equivalente, con las mismas soluciones.

c) Falso. No tiene soluciones. Ningún número multiplicado por 0 da 4.

d) Falso. Es $b^2 - 4ac$.

e) Falso. Si $a < 0$ sí tiene solución.

f) Falso. $2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-1} = -2^{-3} \neq 4$.

g) Verdadero. No existen las raíces cuadradas de números negativos.

75 **En la ecuación $mx - m = x + 3m$:**

a) ¿Cuánto debe valer m para que la solución sea $x = 5$? ¿Y para que no tenga solución?

b) ¿Hay algún valor de m para el que tenga infinitas soluciones?

a) $mx - m = x + 3m$

- Si $x = 5$ es solución $\rightarrow$ $5m - m = 5 + 3m$ $\rightarrow$ $4m = 5 + 3m$ $\rightarrow$ $m = 5$
- $mx - x = x + 3m$ $\rightarrow$ $x(m - 1) = 3m + m$ $\rightarrow$ $x = \dfrac{3m + m}{m - 1}$

  No tiene solución si $m - 1 = 0$ $\rightarrow$ $m = 1$

b) Para que tenga infinitas soluciones, tenemos que buscar un valor de m que haga 0 estas dos expresiones a la vez:

$$\left.\begin{array}{l} 3m + m = 0 \\ m - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{No existe ese valor de } m.$$

76 **Una igualdad de dos expresiones algebraicas es una identidad si:**

a) Se verifica para cualquier valor de las letras.

b) No tiene solución.

c) Se verifica para algunos valores de las letras.

Elige la respuesta correcta y pon ejemplos.

La respuesta correcta es a).

Por ejemplo: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 2$

$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$

78 **Inventa ecuaciones de segundo grado con:**

a) Dos soluciones: $x = 3$ y $x = -\dfrac{2}{3}$

b) Dos soluciones: $x = 0$ y $x = -5$

c) Una solución: $x = 4$

d) Ninguna solución.

a) $(x - 3)\left(x + \dfrac{2}{3}\right) = 0$ $\rightarrow$ $x^2 - \dfrac{7}{3}x - 2 = 0$ $\rightarrow$ $3x^2 - 7x - 6 = 0$

b) $x(x + 5) = 0$ $\rightarrow$ $x^2 + 5x = 0$

c) $(x - 4)^2 = 0$ $\rightarrow$ $x^2 - 8x + 16 = 0$

d) $x^2 + 100 = 0$

79 **En la ecuación $x^2 - 14x + m = 0$:**

a) ¿Qué valor debe tomar m para que tenga dos soluciones iguales?

b) ¿Y para que sean distintas?

c) ¿Y para que no tenga solución?

a) $x^2 - 14x + m = 0$

$\Delta = 142 - 4 \cdot m = 0 \rightarrow 196 - 4m = 0 \rightarrow m = 49$

b) Para que sean distintas, $m \neq 49$ y $m < 49$.

c) Para que no tenga solución, $196 - 4m < 0 \rightarrow 196 < 4m \rightarrow m > 49$.

Página 128

Infórmate

Sabías que...

Ecuación viene del término latino *aequatio*, que, a su vez, se deriva de *aequare* (igualar) o *aequus* (igual).

A la derecha tienes otras palabras del castellano con la misma raíz.

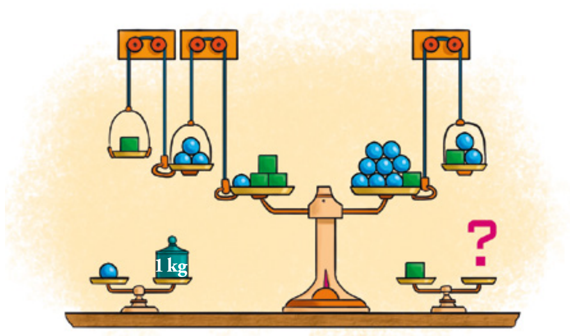
- **Busca otras cuatro palabras que tengan la misma raíz que ecuación.**

  Por ejemplo: equitativo, ecuánime, equilibrio y equinocio.

Utiliza tu ingenio

En perfecto equilibrio

- **Si cada bola pesa un kilo, ¿cuánto pesa cada caja?**



Las poleas sirven para restar peso. Teniendo esto en cuenta, las balanzas y los juegos de poleas dan lugar a la siguiente ecuación (llamamos x al peso de la caja):

$$3x + 1 - (3 - x) = 8 + x - (x + 2)$$

Su solución es $x = 2$. La caja pesa 2 kilogramos.

Usa la equis

- **Completa esta tabla de forma que sumando los números de dos casillas consecutivas obtengas el número de la siguiente:**

5						81

5	x	$5+x$	$5+2x$	$10+3x$	$15+5x$	$25+8x=$ **81**

La solución de la ecuación es $x = 7$. Por tanto, la tabla queda así:

5	7	12	19	31	50	81
1	2	3	4	5	6	7

Ingéniatelas como puedas...

- **… para buscar una solución de esta ecuación:**

$$7+\sqrt{1+\sqrt{5-\sqrt{30-\sqrt{13+\sqrt{x}}}}}=8$$

$x = 144$

Interpreta, describe, exprésate

- **Escribe un número cualquiera de tres cifras, *abc*, e inviértelo, *cba*.**

Resta al mayor el menor y suma las cifras de la diferencia obtenida.

¡Esta suma es siempre 18!

a) Comprueba, con ejemplos, que siempre se cumple la afirmación anterior. ¿Sabrías justificar por qué ocurre?

b) Analiza y explica el proceso que se expone a continuación.

Sea *abc* un número de tres cifras. Supongamos que $a > c$.

PASO 1

	a	b	c
–	c	b	a
			$c-a<0$

PASO 2

	a	$b-1$	$c+10$
–	c	b	a
			$10+c-a$

PASO 3

	$a-1$	$10+b-1$	$c+10$
–	c	b	a
	$a-1-c$	9	$10+c-a$

Sumamos las cifras de la diferencia y…

$824 - 428 = 396$, $3 + 9 + 6 = 18$; $351 - 153 = 198$, $1 + 9 + 8 = 18$

Página 129

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:**

  — Si los envaso por docenas, me sobran 5.

  — Si tuviera uno más, podría envasarlos, exactamente, en cajas de 10.

  — Casi he recogido 100 huevos.

  ¿Cuántos huevos recogió el granjero?

Considerando los puntos tercero y segundo, puede tener 79 u 89 ó 99.

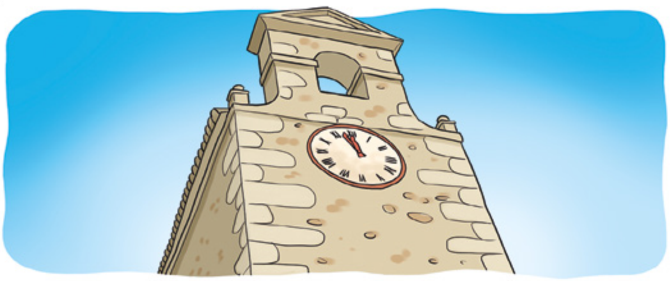
Eliminamos 5 huevos de cada uno de estos grupos (por el punto primero):

74   84   94

La única cantidad que resulta ser múltiplo de 12 es 84.

Por tanto, el granjero recogió 89 huevos.

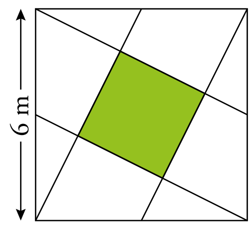
- **El reloj de una torre tarda 15 segundos en dar las seis. ¿Cuánto tardará en dar las doce?**

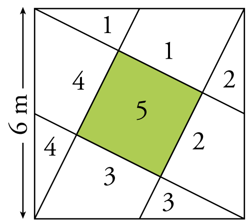


Entre la primera y la sexta campanadas hay 5 intervalos de tiempo. Los 15 segundos se reparten entre 5 y, así, se obtienen 3 segundos entre campanada y campanada.

Por lo tanto, para dar las 12 (11 intervalos de tiempo) el reloj tarda $11 \cdot 3 = 33$ segundos.

- **Calcula la superficie del cuadrado verde.**





Vemos claramente que el cuadrado grande está formado por cinco cuadrados iguales, uno de los cuales es el verde.

La superficie del cuadrado grande es $6^2 = 36 \text{ m}^2$.

La superficie del cuadrado verde será $\frac{36}{5} = 7{,}2 \text{ m}^2$.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones y explica el proceso seguido:**

a) $(x + 13)^2 = 25$ **b)** $\sqrt{x^2 + 15} = 8$

a) La suma que hay dentro del paréntesis debe ser 5, porque es el número que elevado al cuadrado da 25, por lo que $x = -8$.

b) La suma que hay dentro de la raíz debe dar 64, cuya raíz cuadrada es 8. Por ello, x^2 debe ser 49, y el número que elevado al cuadrado da 49 es 7, por lo que $x = 7$.

2 **Resuelve, por tanteo, con ayuda de la calculadora.**

a) $(x - 14)^3 = x + 10$ **b)** $\sqrt{x^4 - x^2} = 5$

a) $x = 17$ b) $x \approx 2{,}37$

3 **Resuelve.**

a) $\dfrac{3x - 2}{5} - \dfrac{3(x + 1)}{10} = \dfrac{3 - x}{4} - \dfrac{9}{10}$ **b)** $\dfrac{x + 1}{2} = x - \dfrac{2x + 3}{4}$

c) $\dfrac{5}{2}x^2 - 2x = 0$ **d)** $4x^2 + 25 = 0$

a) $20\left(\dfrac{3x - 2}{5} - \dfrac{3x + 3}{10}\right) = 20\left(\dfrac{3 - x}{4} - \dfrac{9}{10}\right) \to 12x - 8 - 6x - 6 = 15 - 5x - 18 \to$

$\to 12x - 6x + 5x = 15 - 18 + 8 + 6 \to 11x = 11 \to x = 1$

b) $4\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) = 4\left(x - \dfrac{2x + 3}{4}\right) \to 2x + 2 = 4x - 2x - 3 \to 2x + 2 = 2x - 3 \to 0x = -5.$

No tiene solución.

c) $2 \cdot \left(\dfrac{5}{2}x^2 - 2x\right) = 0 \to 5x^2 - 4x = 0 \to x \cdot (5x - 4) \to x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{4}{5}$

d) $4x^2 = -25 \to x = \sqrt{-\dfrac{25}{4}} \to$ No tiene solución.

4 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $(x+3)(x-3)-25x=9x-298$ **b)** $\dfrac{(x-2)(x-3)}{6}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=2-x$

c) $4x^3+4x^2+x=0$

a) $x^2-9-25x=9x-298 \to x^2-34x+289=0$

$$x=\frac{-(-34)\pm\sqrt{(-34)^2-4\cdot 1\cdot 289}}{2}=\frac{34\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{34}{2}=17 \to \text{Solución única.}$$

b) $\dfrac{x^2-5x+6}{6}-\dfrac{x^2-2x+1}{4}=2-x \to 2x^2-10x+12-3x^2+6x-3=24-12x \to$

$$\to -x^2+8x-15=0 \to x^2-8x+15=0 \to x=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm 2}{2} \begin{cases} x=5 \\ x=3 \end{cases}$$

c) $4x^3+4x^2+x=0 \to x(4x^2+4x+1)=0 \to x(2x+1)^2=0 \to$

$$\to \begin{cases} x_1=0 \\ 2x+1=0 \to x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

5 **Mezclamos 6 kg de harina de 1,30 €/kg con otra de 0,70 €/kg para obtener una mezcla de 1,10 €/kg. ¿Qué cantidad tenemos que poner del segundo tipo de harina?**

Llamamos x a la cantidad de harina que desconocemos. La cantidad de la mezcla será $6+x$.

$$1{,}3\cdot 6+0{,}7x=1{,}1\cdot(6+x) \to 7{,}8+0{,}7x=6{,}6+1{,}1x \to 0{,}4x=1{,}2 \to x=\frac{1{,}2}{0{,}4}=3\text{ kg}$$

Tenemos que poner 3 kg del segundo tipo de harina.

6 **Un tren sale de A hacia B a 135 km/h. Una hora más tarde sale de B hacia A otro tren a 115 km/h. Si la distancia entre A y B es de 485 km, ¿cuánto tardarán en cruzarse?**

Como el primer tren sale una hora antes, cuando sale el segundo tren, el primero ya ha recorrido 135 km, y le quedan por recorrer 350 km. Si comenzamos a contar el tiempo desde ahí, se cruzan cuando se igualan los tiempos:

$$t=\frac{e}{v} \to t_1=t_2 \to \frac{x}{135}=\frac{350-x}{115} \to 115x=-135x+47\,250 \to 250x=47\,250 \to$$

$$\to x=189;\ t=\frac{189}{135}=1{,}4\text{ h}$$

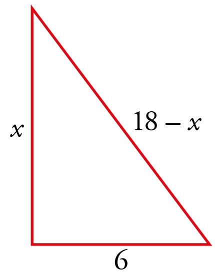
Sumando la hora que le quitamos al principio, los trenes se encuentran 2,4 horas después de que saliera el primer tren.

7 **Tres talleres cobran 540 € por hacer un trabajo. El primero trabajó 12 horas y el segundo, que trabajó 2 horas más que el tercero, recibió 180 €. ¿Cuántas horas y cuánto dinero corresponden a cada uno?**

$\dfrac{180}{540}=\dfrac{1}{3} \to$ Como sabemos que el segundo hizo un tercio del trabajo, y el tercero trabajó dos horas menos, el primero trabajó dos horas más, por lo que trabajaron 12, 10 y 8 horas respecticamente.

El primero cobró: $\dfrac{12}{30}\cdot 540=216$ € El tercero cobró: $\dfrac{8}{30}\cdot 540=144$ €

8 **Con una cuerda de 24 m de longitud hacemos un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 6 m. ¿Cuánto medirán el otro cateto y la hipotenusa?**



$x^2 + 6^2 = (18 - x)^2 \rightarrow x^2 + 36 = 324 - 36x + x^2 \rightarrow 36x = 288 \rightarrow x = 8$

Catetos: 6 y 8 m; hipotenusa: 10 m.

9 **Para embaldosar un salón de 48 m^2 de área, se han utilizado 375 baldosas rectangulares en las que un lado mide 8 cm menos que el otro. Halla las dimensiones de las baldosas.**

$x \cdot (x - 0{,}08) \cdot 375 = 48 \rightarrow (x^2 - 0{,}08x) \cdot 375 = 48 \rightarrow 375x^2 - 30x = 48 \rightarrow$

$\rightarrow 375x^2 - 30x - 48 = 0 \rightarrow 125x^2 - 10x - 16 = 0$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 125 \cdot (-16)}}{2 \cdot 125} = \frac{10 \pm \sqrt{8100}}{250} = \frac{10 \pm 90}{250} \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{10}{25} = 0{,}4 \text{ m}; \ x_2 = -\frac{8}{25} \text{ m}$$

La única solución válida es 0,4 m (no puede ser un valor negativo).

Las baldosas miden 0,4 m × 0,32 m.

7 SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 131

Resuelve

1 **Traduce a lenguaje algebraico el problema de la tablilla babilónica y calcula, por tanteo, la longitud y la anchura medidas en manos.**

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + y = 7 \\ x + y = 10 \end{cases} \rightarrow x = 4 \quad y = 6$$

2 **El problema chino de las gavillas de trigo se resuelve con un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Completa el que ves en el enunciado de la página anterior y comprueba que la solución es $x = 4$, $y = 3$, $z = 2$.**

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 20 \\ 2x + 3y + z = 19 \\ x + 2y + 3z = 16 \end{cases} \text{ Comprobamos para } x = 4,\ y = 3,\ z = 2: \begin{cases} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 = 20 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 = 19 \\ 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 16 \end{cases}$$

3 **Plantea un sistema de ecuaciones para el problema que Diofanto propuso en su libro *Aritmética*. Intenta encontrar una solución.**

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases} \rightarrow x_1 = 8,\ y_1 = 12 \ ; \ x_2 = 12,\ y_2 = 8$$

4 **El problema de Diofanto de las cántaras de vino podría traducirse algebraicamente en el sistema de ecuaciones que tienes debajo, siendo a, b y c números enteros. Comprueba que compró 2 cántaras del primer tipo y 4 del segundo tipo, y que pagó por ellas 36 dracmas.**

$$\boxed{\left.\begin{array}{r} 8a + 5b = c^2 \\ a + b = c \end{array}\right\}}$$

Comprobamos para $a = 2$; $b = 4$ y $c = 6$.

$$\left.\begin{array}{r} 8 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 16 + 20 = 36 = c^2 \\ 2 + 4 = 6 = c \end{array}\right\}$$

1 ▶ ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Página 132

1 Comprueba si cada uno de los pares de valores siguientes son solución de la ecuación $4x - 3y = 12$:

a) $x = 6$, $y = 4$ b) $x = 6$, $y = 12$ c) $x = 0$, $y = -4$

a) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 24 - 12 = 12$

$x = 6$, $y = 4$ sí es solución de la ecuación.

b) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 12 = 24 - 36 = -12$

$x = 6$, $y = 12$ no es solución de la ecuación.

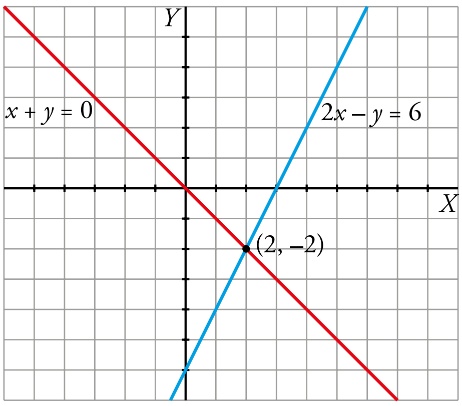
c) $4 \cdot 0 - 3(-4) = 0 + 12 = 12$

$x = 0$, $y = -4$ sí es solución de la ecuación.

2 Representa las rectas de ecuaciones:

$$2x - y = 6 \qquad x + y = 0$$

¿Cuál es la solución común a ambas ecuaciones?



Solución común a las dos ecuaciones: $x = 2$, $y = -2$. Punto $(2, -2)$.

2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Página 133

1 **Di si los pares $x = -1,\ y = 4$ o $x = 7,\ y = 8$ son solución de alguno de los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -6x + 5y = 26 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$6 + 20 = 26$, sí	$-42 + 40 = -2$, NO
$-1 - 8 = -9$, sí	$7 - 16 = -9$, sí
SÍ ES SOLUCIÓN	NO ES SOLUCIÓN

b) $\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$2 + 16 = 18$, sí	$-14 + 32 = 18$, sí
$-3 - 8 = -11$, NO	$21 - 16 = 5$, sí
NO ES SOLUCIÓN	SÍ ES SOLUCIÓN

c) $\begin{cases} 5x + y = 43 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$-5 + 4 = -1$, NO	$35 + 8 = 43$, sí
$-3 + 4 = 1$, sí	$21 + 8 = 29$, NO
NO ES SOLUCIÓN	NO ES SOLUCIÓN

d) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = -1 \end{cases}$

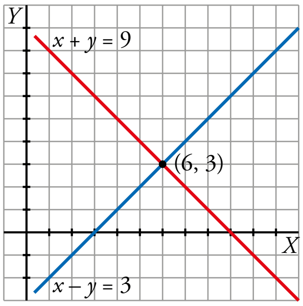
$x = -1,\ y = 4$	$x = 7,\ y = 8$
$-1 + 4 = 3$, NO	$7 + 8 = 15$, sí
$-1 - 4 = -5$, NO	$7 - 8 = -1$, sí
NO ES SOLUCIÓN	SÍ ES SOLUCIÓN

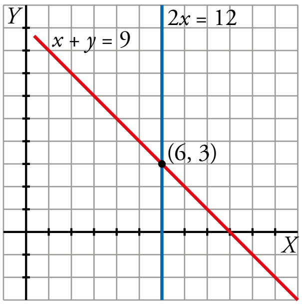
3 ▶ SISTEMAS EQUIVALENTES

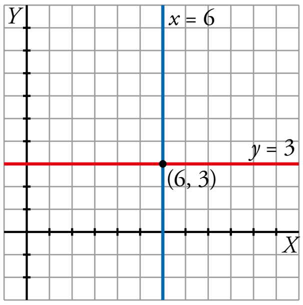
Página 134

1 **Representa estos tres sistemas equivalentes que se obtienen para resolver el primero de ellos:**

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x \quad\; = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$



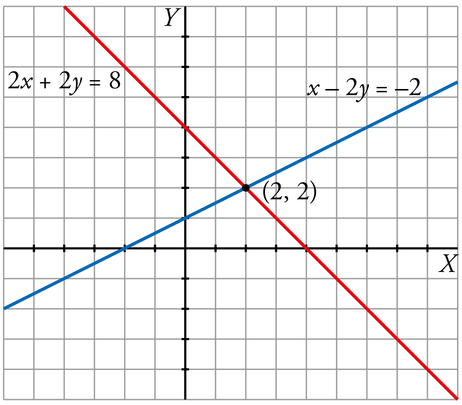




2 **Representa los pares de rectas correspondientes a cada sistema y di si son equivalentes:**

a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - x = 0 \\ y \quad\; = 2 \end{cases}$

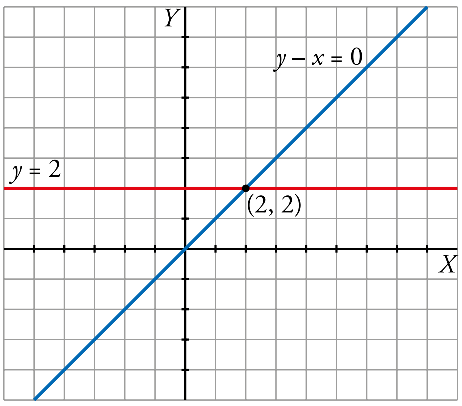
a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2$, $y = 2$

b) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y \quad\; = 2 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2$, $y = 2$

Los dos sistemas de ecuaciones tienen la misma solución. Por tanto, son equivalentes.

4 ▶ TIPOS DE SISTEMAS SEGÚN EL NÚMERO DE SOLUCIONES

Página 135

1 Di cuál de estos sistemas es compatible determinado, cuál incompatible y cuál compatible indeterminado.

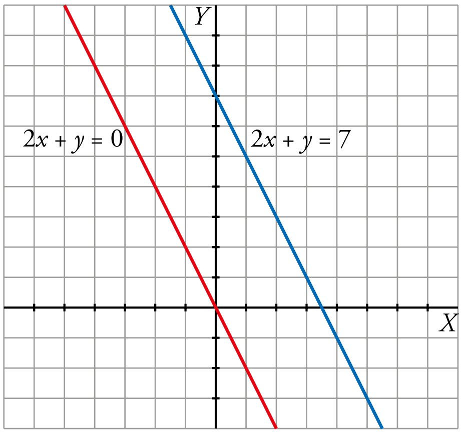
a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$

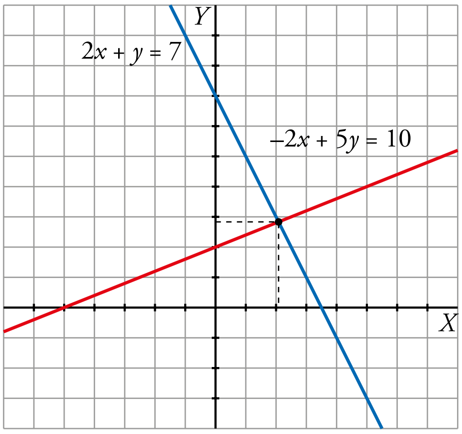
c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

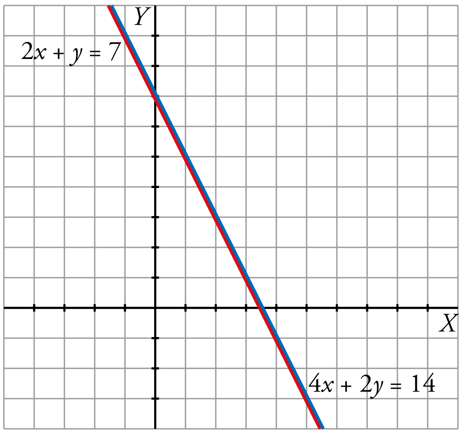
a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ Sistema incompatible



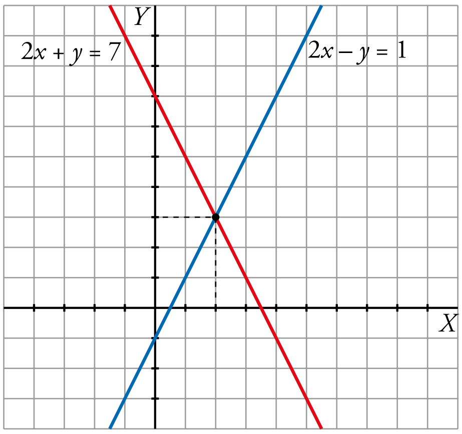
b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -2x + 5y = 10 \end{cases}$ Sistema con una solución



c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ Sistema indeterminado



d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ Sistema con una solución



2 Completa los sistemas para que a) sea SCD con solución $x = 6$, $y = -1$; b) sea SI, y c) y d) sean SCI:

a) $\begin{cases} x - 4y = \dots \\ 2x \quad \dots = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + \ \ y = 8 \\ 4x + 2y = \dots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x \quad \dots = \dots \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 11y = \dots \\ \dots + 33y = 9 \end{cases}$

a) $6 - 4(-1) = 10$

$2 \cdot 6 + a \cdot (-1) = 13 \rightarrow a = -1$

El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 4y = 10 \\ 2x - \ \ y = 13 \end{cases}$ tiene como solución $x = 6$, $y = -1$.

b) Respuesta abierta.

$\begin{cases} 2x + \ \ y = 8 \\ 4x + 2y = 2(2x + y) \end{cases}$

Para que el sistema sea incompatible, podemos igualarlo a cualquier número distinto de 16.

c) Como $4x = 2(2x)$, para obtener la segunda ecuación multiplicamos la primera por 2. Al ser una ecuación equivalente, nos dará la misma recta, lo que es un sistema indeterminado.

$\begin{cases} 2x + \ \ y = \ \ 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$

d) Como $33y = 3(11y)$, para obtener la segunda ecuación multiplicamos la primera por 3. Esto nos dará el primer miembro de la igualdad; dividiremos el segundo miembro de la segunda ecuación por 3 para obtener el segundo miembro de la primera.

$\begin{cases} 5x + 11y = 3 \\ 15 + 33y = 9 \end{cases}$

5 ▶ MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

Página 136

1 **Resuelve por el método de sustitución los siguientes sistemas. ¿Cuál de ellos crees que es más complicado de resolver por este método?**

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - \ \ y = 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x + 9y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - 4y = 11 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 3y = \ 5 \ \rightarrow \ y = \dfrac{5 - x}{3} \\ 5x + 7y = 13 \end{cases}$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$5x + 7 \cdot \frac{5 - x}{3} = 13 \ \rightarrow \ 5x + \frac{35 - 7x}{3} = 13 \ \rightarrow \ 15x + 35 - 7x = 39 \ \rightarrow \ 8x = 4 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ y = \frac{5 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Solución: $x = \dfrac{1}{2}, \ y = \dfrac{3}{2}$

b) $\begin{cases} 6x + 3y = 0 \\ 3x - \ \ y = 3 \ \rightarrow \ y = 3x - 3 \end{cases}$

Sustituyendo:

$$6x + 3(3x - 3) = 0 \ \rightarrow \ 6x + 9x - 9 = 0 \ \rightarrow \ 15x = 9 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ x = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \ \rightarrow \ y = 3 \cdot \frac{3}{5} - 3 = -\frac{6}{5}$$

Solución: $x = \dfrac{3}{5}, \ y = -\dfrac{6}{5}$

c) $\begin{cases} 3x + 9y = 4 \ \rightarrow \ y = \dfrac{4 - 3x}{9} \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Sustituyendo:

$$2x + 3 \cdot \frac{4 - 3x}{9} = 1 \ \rightarrow \ 2x + \frac{4 - 3x}{9} = 1 \ \rightarrow \ 6x + 4 - 3x = 3 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 3x = -1 \ \rightarrow \ x = -\frac{1}{3} \ \rightarrow \ y = \frac{4 - 3 \cdot \frac{(-1)}{3}}{9} = \frac{5}{9}$$

Solución: $x = -\dfrac{1}{3}, \ y = \dfrac{5}{9}$

d) $\begin{cases} x - 4y = 11 \ \ 8 \ \ y = \dfrac{x - 11}{4} \\ 5x + 7y = \ 1 \end{cases}$

Sustituyendo:

$$5x + 7 \cdot \frac{x - 11}{4} = 1 \ \rightarrow \ 5x + \frac{7x - 77}{4} = 1 \ \rightarrow \ 20x + 7x - 77 = 4 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 27x = 81 \ \rightarrow \ x = 3 \ \rightarrow \ y = \frac{3 - 11}{4} = -2$$

Solución: $x = 3, \ y = -2$

El más complicado es el apartado c).

Página 137

2 Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 8y = 5 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 28 \\ 7x + 2y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 7x + 10y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 9y = -1 \\ 3x + 15y = -1 \end{cases}$

a) $x = \dfrac{5 - 8y}{3}$, $x = \dfrac{7 + 2y}{2}$

$\dfrac{5 - 8y}{3} = \dfrac{7 + 2y}{2} \rightarrow 10 - 16y = 21 + 6y \rightarrow -22y = 11 \rightarrow y = \dfrac{-1}{2}$

$x = \dfrac{7 + 2 \cdot \frac{-1}{2}}{2} = \dfrac{7 - 1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

Solución: $x = 3,\ y = \dfrac{-1}{2}$

b) $x = \dfrac{28 - 3y}{5}$; $x = \dfrac{-7 - 2y}{7}$

$\dfrac{28 - 3y}{5} = \dfrac{-7 - 2y}{7} \rightarrow 196 - 21y = -35 - 10y \rightarrow 11y = 231 \rightarrow y = \dfrac{231}{11} = 21$

$x = \dfrac{-7 - 2 \cdot 21}{7} = -7$

Solución: $x = -7,\ y = 21$

c) $x = \dfrac{-1 + 5y}{3}$, $x = \dfrac{2 - 10y}{7}$

$\dfrac{-1 + 5y}{3} = \dfrac{2 - 10y}{7} \rightarrow -7 + 35y = 6 - 30y \rightarrow 65y = 13 \rightarrow y = \dfrac{1}{5}$

$x = \dfrac{-1 + 5 \cdot \frac{1}{5}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$

Solución: $x = 0,\ y = \dfrac{1}{5}$

d) $x = \dfrac{-1 - 9y}{2}$, $x = \dfrac{-1 - 15y}{3}$

$-3 - 27y = -2 - 30y \rightarrow 3y = 1 \rightarrow y = \dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{-1 - 9 \cdot \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Solución: $x = -2,\ y = \dfrac{1}{3}$

Página 138

3 Resuelve por el método de reducción los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ 4x-5y=38 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-y=3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x+5y=11 \\ 4x-5y=38 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 7x=49 \rightarrow x=7 \rightarrow 3\cdot 7+5y=11 \rightarrow 5y=-10 \rightarrow y=-2$

Solución: $x=7,\ y=-2$

b) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x+7y=13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x-15y=-25 \\ 5x+7y=13 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} -8y=-12 \rightarrow y=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x+3\cdot\frac{3}{2}=5 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

Solución: $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{3}{2}$

c) $\begin{cases} x-4y=11 \\ 5x+7y=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x+20y=-55 \\ 5x+7y=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 27y=-54 \rightarrow y=-2 \rightarrow$

$\rightarrow x-4\cdot(-2)=11 \rightarrow x=3$

Solución: $x=3,\ y=-2$

d) $\begin{cases} 6x+3y=0 \\ 3x-y=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x+3y=0 \\ 9x-3y=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumando}} 15x=9 \rightarrow x=\frac{9}{15}=\frac{3}{5} \rightarrow$

$\rightarrow 3\cdot\frac{3}{5}-y=3 \rightarrow y=\frac{9}{5}-3=\frac{-6}{5}$

Solución: $x=\frac{3}{5},\ y=\frac{-6}{5}$

Página 139

4 **Resuelve este sistema simplificando previamente:**

$$\begin{cases} \mathbf{5(x+3)-2(y-1)=3(5x-y)-8x} \\ \mathbf{\dfrac{x+1}{7}-\dfrac{y}{5}=2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(x+3)-2(y-1)=3(5x-y)-8x \\ \dfrac{x+1}{7}-\dfrac{y}{5}=2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5x+15-2y+2=15x-3y-8x \\ 5x+5-7y=70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+y=-17 \\ 5x-7y=65 \end{cases}$$

Por reducción:

$$\begin{cases} -14x+7y=-119 \\ 5x-7y=65 \end{cases}$$

$$-9x \qquad = -54 \rightarrow x=6 \rightarrow y=-17+2\cdot 6=-5$$

Solución: $x=6,\ y=-5$

5 **Resuelve este sistema aplicando dos veces el método de reducción:**

$$\begin{cases} \mathbf{7x+\ \ 5y=11} \\ \mathbf{35x-12y=129} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x+\ \ 5y=11 \\ 35x-12y=129 \end{cases}$$

Obtenemos la y:

$$\begin{cases} -35x-25y=-55 \\ 35x-12y=129 \end{cases}$$

$$-37y=\ 74 \rightarrow y=-2$$

Obtenemos la x:

$$\begin{cases} 84x+60y=132 \\ 175x-60y=645 \end{cases}$$

$$259x \qquad =777 \rightarrow x=3$$

Solución: $x=3,\ y=-2$

6 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Página 140

1 Resuelve estos sistemas dando su solución o señalando que no la tienen:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 16 \\ x^2 + y^2 = 64 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 64 \end{cases}$

a) $x = 6 - y$

$(6 - y)^2 + y^2 = 20 \rightarrow 36 - 12y + y^2 + y^2 = 20 \rightarrow 2y^2 - 12y + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 6y + 8 = 0$

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Si $y = 4 \rightarrow x = 6 - 4 = 2$

Si $y = 2 \rightarrow x = 6 - 2 = 4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 2, \ \ y_1 = 4 \\ x_2 = 4, \ \ y_2 = 2 \end{cases}$

b) Sumamos las dos ecuaciones, utilizando el método de reducción:

$2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = 25 \rightarrow x = 5, \ x = -5$

Si $x = 5 \rightarrow y^2 = 41 - 5^2 = 41 - 25 = 16 \rightarrow y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Si $x = -5 \rightarrow y^2 = 41 - 5^2 = 41 - 25 = 16 \rightarrow y = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 5, \ \ y_1 = 4 \\ x_2 = 5, \ \ y_2 = -4 \\ x_3 = -5, \ \ y_3 = 4 \\ x_4 = -5, \ \ y_4 = -4 \end{cases}$

c) $x = 16 - y$

$(16 - y)^2 + y^2 = 64 \rightarrow 256 - 32y + 2y^2 = 64 \rightarrow 2y^2 - 32y + 192 = 0 \rightarrow y^2 - 16y + 96 = 0$

$y = \dfrac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 96}}{2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{-128}}{2}$ No tiene solución.

d) $x = 4 + y$

$(4 + y)^2 - y^2 = 64 \rightarrow 16 + 8y = 64 \rightarrow y = \dfrac{48}{8} = 6$

Solución: $x = 10, \ y = 6$

7 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS

Página 141

1 **Si al doble de un número de dos cifras se le resta el resultado de invertir el orden de las cifras del número original, se obtiene 31. Si la resta de las unidades menos las decenas es 3, ¿de qué número se trata?**

Llamamos $(10x + y)$ al número buscado

$$\begin{cases} 2(10x + y) - (10y + x) = 31 \\ y - x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 19x - 8y = 31 \\ y = x + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases}$$

El número buscado es 58.

2 **Ayer, en una clase, había 10 chicos más que chicas. Hoy, que ha entrado una chica nueva, el número de chicos es el doble que de chicas. ¿Cuántos chicos y chicas había ayer en la clase?**

$x \rightarrow$ n.º de chicos en clase ayer

$y \rightarrow$ n.º de chicas en clase ayer

$$\left.\begin{array}{l} x = 10 + y \\ x = 2(y + 1) \end{array}\right\} \rightarrow 10 + y = 2(y + 1) \rightarrow y = 8 \rightarrow x = 18$$

Ayer, en la clase, había 18 chicos y 8 chicas.

Página 142

3 **Hemos mezclado aceite de oliva de 3,50 €/L con aceite de girasol de 2 €/L para obtener 50 L de mezcla a 3,08 €/L. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de aceite de girasol que hemos mezclado.**

	CANTIDAD	PRECIO
OLIVA	x	3,5
GIRASOL	y	2
MEZCLA	50	3,08

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 3,5x + 2y = 50 \cdot 3,08 \end{cases} \to \begin{cases} y = 50 - x \\ 3,5x + 2(50 - x) = 154 \end{cases} \to 3,5x + 100 - 2x = 154 \to$$

$$\to 1,5x = 54 \to x = 36 \to y = 14$$

36 *l* de aceite de oliva y 14 *l* de girasol.

4 **He pagado 90,50 € por una camisa y un jersey que costaban, entre los dos, 110 €. En la camisa me han rebajado un 20 %, y en el jersey, un 15 %. ¿Cuál era el precio original de cada artículo?**

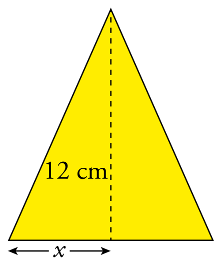
De la camisa que valía x, pagaré $0,8x$ debido a la rebaja; y del jersey, que valía y, pagaré $0,85y$.

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ 0,8x + 0,85y = 90,50 \end{cases}$$

$0,8(110 - y) + 0,85y = 90,50 \to 88 - 0,8y + 0,85y = 90,50 \to 0,05y = 2,5 \to y = 50,\ x = 60$

La camisa valía 60 €, y el jersey, 50 €.

5 **El perímetro de un triángulo isósceles es de 36 cm. La altura relativa al lado desigual mide 12 cm. Calcula la medida de los lados iguales.**



Si llamas x a la mitad de la base, se simplifican mucho los cálculos.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ y^2 - x^2 = 12^2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 18 \\ y^2 - x^2 = 144 \end{cases} \to \begin{cases} y = 18 - x \\ (18 - x)^2 - x^2 = 144 \end{cases} \to$$

$$\to 324 - 36x + x^2 - x^2 = 144 \to 36x = 180 \to x = 5 \to y = 18 - 5 = 13$$

Los lados iguales miden 13 cm.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 143

3. Dimensiones de un rectángulo

Hazlo tú

- **El perímetro de un rectángulo es 24 cm. Si la base disminuye 2 cm y la altura aumenta 1 cm, el área disminuye 5 cm². Halla sus dimensiones.**

  Base del rectángulo $\to x$

  Altura del rectángulo $\to y$.

  $$\begin{cases} 2(x+y) = 24 \to x + y = 12 \to y = 12 - x \\ (x-2)(y+1) = xy - 5 \to x - 2y = -3 \end{cases}$$

  $$x - 2y = -3 \to x - 2(12 - x) = -3 \to x - 24 + 2x = -3 \to 3x = 21 \to$$
  $$\to x = 7 \;;\; y = 5$$

  La base del rectángulo mide 7 cm, y la altura, 5 cm.

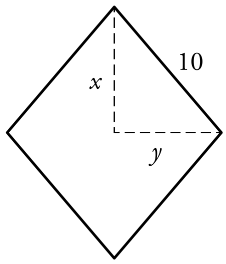
4. Trapecio

Hazlo tú

- **Las diagonales de un rombo de 10 cm de lado suman 28 cm. ¿Cuánto mide cada diagonal?**

  Diagonal mayor $\to$ D. Llamamos x = D/2.

  Diagonal menor $\to$ d. Llamamos y = d/2.

  $$\begin{cases} x + y = 14 \to y = 14 - x \\ x^2 + y^2 = 100 \to x^2 + (14 - x)^2 = 100 \to x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100 \to \end{cases}$$
  $$\to 2x^2 - 28x + 96 = 0 \to x^2 - 14x + 48 = 0$$
  $$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2} = \frac{14 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 8 \to y_1 = 6 \\ x_2 = 6 \to y_2 = 8 \end{cases}$$

  La diagonal mayor mide 16 cm, y la menor, 12 cm.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 144

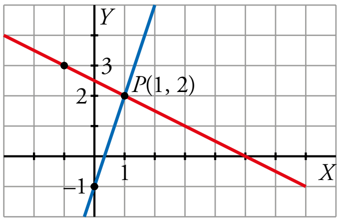
Practica

1 **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$



$3x - y = 1$

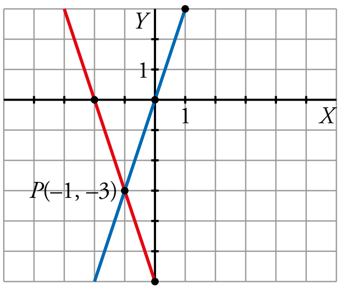
x	0	1
y	–1	2

$x + 2y = 5$

x	1	–1
y	2	3

Solución: $x = 1,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$



$3x - y = 0$

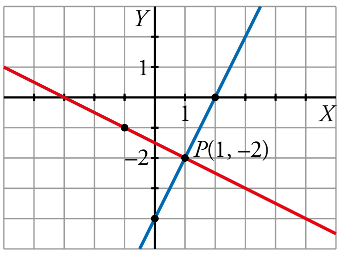
x	0	1
y	0	3

$3x + y = -6$

x	0	–2
y	–6	0

Solución: $x = -1,\ y = -3$

c) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$



$x + 3y = -5$

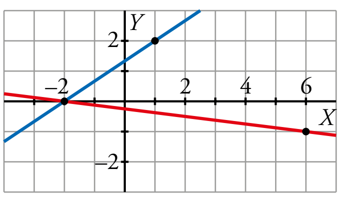
x	1	–2
y	–2	–1

$2x - y = 4$

x	0	1
y	–4	–2

Solución: $x = 1,\ y = -2$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x + 8y = -2 \end{cases}$



$2x - 3y = -4$

x	1	–2
y	2	0

$x + 8y = -2$

x	6	–2
y	–1	0

Solución: $x = -2,\ y = 0$

2 **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + \ \ y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x - 3y = -25 \\ x - 5y = -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x - \ \ y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 16 = 2y \\ 2y - 3x = 16 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 0 \\ 2x + \ y &= -5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = -3y \\ &2(-3y) + y = -5 \ \to \end{aligned}$

$\to -6y + y = -5 \ \to \ -5y = -5 \ \to \ y = 1 \ \to \ x = -3 \cdot 1 = -3$

Solución: $x = -3, \ y = 1$

b) $\left.\begin{aligned} 8x - 3y &= -25 \\ x - 5y &= -17 \end{aligned}\right\} \to$

$\to \ x = -17 + 5y \ \to \ 8(-17 + 5y) - 3y = -25 \ \to \ -136 + 40y - 3y = -25 \ \to$

$\to \ 37y = 111 \ \to \ y = 3 \ \to \ x = -17 + 15 = -2$

Solución: $x = -2, \ y = 3$

c) $\left.\begin{aligned} 7x - \ \ y &= -6 \\ 4x + 3y &= 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &7x + 6 = y \\ &4x + 3(7x + 6) = 3 \ \to \ 4x + 21x + 18 = 3 \ \to \end{aligned}$

$\to \ 25x = -15 \ \to \ x = \dfrac{-15}{25} = -\dfrac{3}{5} \ \to \ y = 7\left(-\dfrac{3}{5} + 6\right) = \dfrac{9}{5}$

Solución: $x = -\dfrac{3}{5}, \ y = \dfrac{9}{5}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + 16 &= 2y \\ 2y - 3x &= 16 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y = \frac{2x + 16}{2} = x + 8 \\ &2(x + 8) - 3x = 16 \ \to \end{aligned}$

$\to \ 2x + 16 - 3x = 16 \ \to \ -x = 0 \ \to \ x = 0 \ \to \ y = 8$

Solución: $x = 0, \ y = 8$

3 Resuelve por igualación.

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 6x \\ 7x = 2y - 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = -4 \\ 2x + \ \ y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 & \to \ y = 3x - 1 \\ 2x + y = -1 & \to \ y = -2x - 1 \end{cases} \to 3x - 1 = -2x - 1 \to 5x = 0 \to x = 0;\ y = -1$

Solución: $x = 0,\ y = -1$

b) $\left.\begin{matrix} x + 3y = -4 \\ x - 2y = 6 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = -4 - 3y \\ x = 6 + 2y \end{matrix}\right\} \to -4 - 3y = 6 + 2y \to -4 - 6 = 5y \to y = -2 \to$

$\to x = -4 - 3(-2) = 2$

Solución: $x = 2,\ y = -2$

c) $\left.\begin{matrix} y = 6x \\ 7x = 2y - 5 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = 6x \\ y = \dfrac{7x + 5}{2} \end{matrix}\right\} \to 6x = \dfrac{7x + 5}{2} \to 12x = 7x + 5 \to 5x = 5 \to x = 1 \to$

$\to y = 6 \cdot 1 = 6$

Solución: $x = 1,\ y = 6$

d) $\left.\begin{matrix} 3x - 4y = -4 \\ 2x + \ \ y = -1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y = \dfrac{3x + 4}{4} \\ y = -1 - 2x \end{matrix}\right\} \to \dfrac{3x + 4}{4} = -1 - 2x \to 3x + 4 = -4 - 8x \to 11x = -8 \to$

$\to x = \dfrac{-8}{11} \to y = -1 - 2\left(\dfrac{-8}{11}\right) = \dfrac{5}{11}$

Solución: $x = \dfrac{-8}{11},\ y = \dfrac{5}{11}$

4 **Resuelve por reducción.**

a) $\begin{cases} \mathbf{4x - 3y = 2} \\ \mathbf{2x + \ \ y = -4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{3x - \ \ y = 7} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 1} \\ \mathbf{4x - 5y = -9} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \mathbf{3x - 2y = 19} \\ \mathbf{4x + 3y = -3} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = 2 \\ 2x + \ \ y = -4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x - 3y = \ \ \ 2 \\ 6x + 3y = -12 \end{array}\right\}$

$10x = -10 \to x = -1 \to 2(-1) + y = -4 \to y = -2$

Solución: $x = -1, \ y = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x - \ \ y = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 2y = \ \ 1 \\ 6x - 2y = 14 \end{array}\right\}$

$7x = 15 \to x = \dfrac{15}{7} \to \dfrac{15}{7} + 2y = 1 \to y = \dfrac{1 - 15/7}{2} = -\dfrac{4}{7}$

Solución: $x = \dfrac{15}{7}, \ y = -\dfrac{4}{7}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = -9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -4x - 6y = -2 \\ \ \ 4x - 5y = -9 \end{array}\right\}$

$-11y = -11 \to y = 1 \to 2x + 3 \cdot (1) = 1 \to x = -1$

Solución: $x = -1, \ y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = 19 \\ 4x + 3y = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 9x - 6y = 57 \\ 8x + 6y = -6 \end{array}\right\}$

$17x = 51 \to x = 3 \to 3 \cdot 3 - 2y = 19 \to y = -5$

Solución: $x = 3, \ y = -5$

5 **Resuelve los siguientes sistemas. Indica si alguno de ellos es incompatible o indeterminado:**

a) $\begin{cases} 2x - \quad 5y = -2 \\ 3,25x - 2,5y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 0,2x - 1,7y = 6,1 \\ 1,23x + 0,8y = 3,75 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x-1) + y = 0 \\ 3(x+1) + y = -5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y = 4 - y \\ 3x - 5 = 7 - 6y \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - \quad 5y = -2 \\ 3,25x - 2,5y = 8 \end{cases}$ Por reducción: $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ -6,5x + 5y = -16 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow -4,5x = -18 \rightarrow x = 4 \rightarrow 2 \cdot 4 - 5y = -2 \rightarrow 10 = 5y \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 4,\ y = 2$

b) $\begin{cases} 0,2x - 1,7y = 6,1 \\ 1,23x + 0,8y = 3,75 \end{cases}$ Por sustitución: $y = \dfrac{6,1 - 0,2x}{1,7}$

$$1,23x + 0,8\left(\frac{6,1 - 0,2x}{1,7}\right) = 3,75 \rightarrow 1,23x + \frac{4,88 - 0,16x}{1,7} = 3,75 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2,091x + 4,88 - 0,16x = 6,375 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,931x = 1,495 \rightarrow x = \frac{1,495}{1,931} = 0,77 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{6,1 - 0,2 \cdot 0,77}{1,7} = 3,5$$

Solución: $x = 0,77,\ y = 3,5$

c) $\begin{cases} 3(x-1) + y = 0 \\ 3(x+1) + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 3 + y = 0 \\ 3x + 3 + y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 3x + y = -8 \end{cases}$

No tiene solución. Es incompatible.

d) $\begin{cases} x + y = 4 - y \\ 3x - 5 = 7 - 6y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases} \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones. Es indeterminado.

6 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando dos veces el método de reducción para despejar cada una de las incógnitas:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -4x + 5y = -14 \\ 3x + 7y = -11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 10 \\ 2x + 3y = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 6x + 4y = 20 \\ -6x - 9y = -15 \end{array}\right\}$

$-5y = 5 \;\rightarrow\; y = -1$

$\left.\begin{array}{r} 9x + 6y = 30 \\ -4x - 6y = -10 \end{array}\right\}$

$5x \quad = 20 \;\rightarrow\; x = 4$

Solución: $x = 4$, $y = -1$

b) $\left.\begin{array}{r} -4x + 5y = -14 \\ 3x + 7y = -11 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} -12x + 15y = -42 \\ 12x + 28y = -44 \end{array}\right\}$

$43y = -86 \;\rightarrow\; y = -2$

$\left.\begin{array}{r} -28x + 35y = -98 \\ -15x - 35y = 55 \end{array}\right\}$

$-13x \quad = -43 \;\rightarrow\; x = 1$

Solución: $x = 1$, $y = -2$

7 **Observa y compara las ecuaciones que forman estos sistemas y di cuál de ellos tiene una única solución, cuál no tiene solución y cuál tiene infinitas soluciones. Compruébalo representando las rectas que los forman:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = -3 \end{cases}$

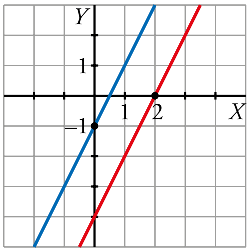
a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 8 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$2x - y = 1$

X	0	2
Y	–1	3

$4x - 2y = 8 \to 2x - y = 4$

X	0	2
Y	–4	0



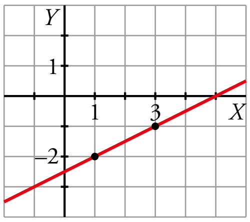
b) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{array}\right\}$ Tiene infinitas soluciones.

$x - 2y = 5$

X	1	3
Y	–2	–1

$2x - 4y = 10 \to x - 2y = 5$

Es la misma recta



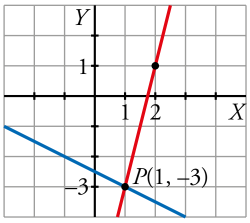
c) $\left.\begin{array}{l} 5x + 2y = -1 \\ 4x - y = 7 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, $x = 1$, $y = -3$.

$5x + 2y = -1$

X	1	–1
Y	–3	–2

$4x - y = 7$

X	1	2
Y	–3	1



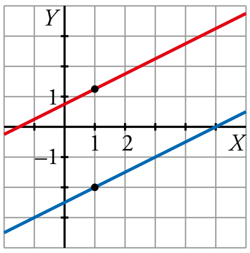
d) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = -3 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$x - 2y = 5$

X	1	–1
Y	–2	–3

$2x - 4y = -3$

X	1	3
Y	5/4	9/4



8 **Simplifica y resuelve.**

a) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\,(3x - 2) = y - 1 \\ 3\,(x + y) + 2\,(x - y) = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3(x+1) + 2(y-3) = 8 \\ 4(7 - 2x) - (2y - 5) = -3 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + y = 0 \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{array}\right\}$ Por sustitución: $y = -2x \rightarrow 5x - 3 = 9(-2x) - 3 \rightarrow$

$\rightarrow 5x - 3 = -18x - 3 \rightarrow 23x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -2 \cdot 0 = 0$

Solución: $x = 0,\ y = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} 2\,(3x - 2) = y - 1 \\ 3\,(x + y) + 2\,(x - y) = 8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 6x - 4 = y - 1 \\ 3x + 3y + 2x - 2y = 8 \rightarrow 5x + y = 8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 6x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{array}\right\}$

Por reducción: $11x = 11 \rightarrow x = 1 \rightarrow 6 \cdot 1 - y = 3 \rightarrow y = 3$

Solución: $x = 1,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 2 \end{array}\right\}$ Por reducción: $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ 2x + \ \ y = 8 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 24 \\ -2x - \ \ y = -8 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow -4y = 16 \rightarrow y = -4 \rightarrow 2x - 3(-4) = 24 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6$

Solución: $x = 6,\ y = -4$

d) $\left.\begin{array}{l} 3\,(x + 1) + 2\,(y - 3) = 8 \\ 4\,(7 - 2x) - (2y - 5) = -3 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 11 \\ -8x - 2y = -36 \end{array}\right\}$

$\overline{-5x = \qquad -25} \rightarrow x = 5$

$3 \cdot (5) + 2y = 11 \rightarrow 2y = -4 \rightarrow y = -2$

Solución: $x = 5,\ y = -2$

9 **Simplifica y elige el método más adecuado para su resolución.**

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{5} \\ 3x - y = 24 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} = \dfrac{3y}{4} \\ x + 2y = 50 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3} + \dfrac{3+y}{6} = 2 \\ \dfrac{8-3x}{6} - \dfrac{2+y}{9} = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+1}{4} = 1 \\ \dfrac{2x-1}{2} - \dfrac{2y+1}{6} = 1 \end{cases}$

a) Por sustitución: $x = \dfrac{7y}{5}$

$3\left(\dfrac{7y}{5}\right) - y = 24 \rightarrow 16y = 120 \rightarrow y = 7{,}5 \rightarrow x = \dfrac{7 \cdot 7{,}5}{5} = 10{,}5$

Solución: $x = 10{,}5$; $y = 7{,}5$

b) Por sustitución: $x = \dfrac{9y}{8}$

$\left(\dfrac{9y}{8}\right) + 2y = 50 \rightarrow 25y = 400 \rightarrow y = 16 \rightarrow x = \dfrac{9 \cdot 16}{8} = 18$

Solución: $x = 18$, $y = 16$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2-x}{3} + \dfrac{3+y}{6} = 2 \\ \dfrac{8-3x}{6} - \dfrac{2+y}{9} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 2(2-x) + 3 + y = 12 \\ 3(8-3x) - 2(2+y) = 36 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 4 - 2x + 3 + y = 12 \\ 24 - 9x - 4 - 2y = 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + y = 5 \\ -9x - 2y = 16 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 10 \\ -9x - 2y = 16 \end{cases} \rightarrow -13x = 26 \rightarrow x = -2 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2-(-2)}{3} + \dfrac{3+y}{6} = 2 \rightarrow \dfrac{3+y}{6} = 2 - \dfrac{4}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{3+y}{6} = \dfrac{2}{3} \rightarrow y = 1$

Solución: $x = -2$, $y = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y+1}{4}=1 \\ \dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{2y+1}{6}=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} 2(x-1)+y+1=4 \\ 3(2x-1)-(2y+1)=6 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2x-2+\ \ y+1=4 \\ 6x-3-3y-1=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+\ \ y=5 \\ 6x-2y=10 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 4x+2y=10 \\ 6x-2y=10 \end{cases} \rightarrow 10x=20 \rightarrow x=2 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{2-1}{2}+\dfrac{y+1}{4}=1 \rightarrow \dfrac{y+1}{4}=\dfrac{1}{2} \rightarrow y=1$

Solución: $x=2,\ y=1$

10 Resuelve.

a) $\begin{cases} \dfrac{7}{3}x + \dfrac{3}{4}y = 41 \\ -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{5}{2}y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{5}x - 0,3y = \dfrac{6}{5} \\ 0,4x + \dfrac{7}{5}y = -1,6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+15}{8} + \dfrac{3(y+1)}{16} = 3 \\ \dfrac{7-x}{2} - \dfrac{1+y}{12} = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3x+11}{4} - \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{23}{6} \\ \dfrac{2x-1}{2} - \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

a) Por igualación:

1.ª ecuación [mín.c.m. (3, 4) = 12] $\to$ $28x + 9y = 492 \to x = \dfrac{492 - 9y}{28}$

2.ª ecuación [mín.c.m. (5, 2) = 10] $\to$ $-6x + 25y = 110 \to x = \dfrac{110 - 25y}{-6}$

$$\frac{492 - 9y}{28} = \frac{110 - 25y}{-6} \to -2952 + 54y = 3080 - 700y \to 754y = 6032 \to y = 8 \to$$

$$\to x = \frac{492 - 9 \cdot 8}{28} = 15$$

Solución: $x = 15,\ y = 8$

b) Por reducción: multiplicamos por 5 ambas ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} x - 1,5y = 6 \\ 2x + 7y = -8 \end{array}\right\}$ Multiplicamos por -2 la 1.ª ecuación y sumamos ambas

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 3y = -12 \\ 2x + 7y = -\ \ 8 \end{array}\right\} \to 10y = -20 \to y = \frac{-20}{10} = -2 \to x = \frac{-8 - 7 \cdot (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 3,\ y = -2$

c) Por reducción: en la 1.ª ecuación, mín.c.m. (8, 16) = 16; y en la 2.ª, mín.c.m. (2, 12) = 12.

$$\left.\begin{array}{l} 2(x + 15) + 3(y + 1) = 48 \\ 6(7 - x) - (1 + y) = 36 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 15 \\ -6x - y = -5 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos por 3 la segunda ecuación y sumamos ambas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = \ \ 15 \\ -18x - 3y = -15 \end{array}\right\} \to -16x = 0 \to x = 0 \to y = -6 \cdot 0 + 5 = 5$$

Solución: $x = 0,\ y = 5$

d) Por reducción: mín.c.m. (4, 3, 6) = 12, mín.c.m. (2, 4) = 4

$$\left.\begin{array}{l} 3(3x + 11) - 4(y + 1) = 46 \\ 2(2x - 1) - (y + 3) = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 9x - 4y = 17 \\ 4x - \ \ y = 6 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos por -4 la segunda ecuación y sumamos ambas:

$$\left.\begin{array}{r} 9x - 4y = \ \ 17 \\ -16x + 4y = -24 \end{array}\right\} \to -7x = -7 \to x = 1 \to y = 4 - 6 = -2$$

Solución: $x = 1,\ y = -2$

11 **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ (x - 3)^2 + 2y^2 = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

a) $x = 2 + y$

$(2 + y)^2 - y^2 = 16 \to 4 + 4y + y^2 - y^2 = 16 \to 4y = 12 \to y = 3$

Solución: $x = 5,\ y = 3$

b) $x = 1 - y$

$2(1 - y)^2 - y^2 = 2 \to 2 - 4y + 2y^2 - y^2 = 2 \to y^2 - 4y = 0 < \begin{matrix} y = 0 \\ y = 4 \end{matrix}$

Si $y = 0 \to x = 1 - 0 = 1$

Si $y = 4 \to x = 1 - 4 = -3$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 1,\ y_1 = 0 \\ x_2 = -3,\ y_2 = 4 \end{cases}$

c) $x = 5 + y$

$(5 + y - 3)^2 + 2y^2 = 11 \to 4 + 4y + y^2 + 2y^2 = 11 \to 3y^2 + 4y - 7 = 0$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-4 \pm 10}{6} < \begin{matrix} y = 1 \\ y = -\dfrac{7}{3} \end{matrix}$$

Si $y = 1 \to x = 5 + 1 = 6$

Si $y = \dfrac{-7}{3} \to x = 5 - \dfrac{7}{3} = \dfrac{15 - 7}{3} = \dfrac{8}{3}$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 6,\ y_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{8}{3},\ y_2 = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$

d) $x = 9 - y$

$(9 - y)^2 + y^2 = 41 \to 81 - 18y + y^2 + y^2 = 41 \to 2y^2 - 18y + 40 = 0 \to y^2 - 9y + 20 = 0$

$$y = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 2 \cdot 40}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{18 \pm 2}{4} < \begin{matrix} y = 5 \\ y = 4 \end{matrix}$$

Si $y = 5 \to x = 9 - 5 = 4$

Si $y = 4 \to x = 9 - 4 = 5$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 4,\ y_1 = 5 \\ x_2 = 5,\ y_2 = 4 \end{cases}$

Página 145

12 Resuelve por sustitución.

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy + x^2 = 24 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ xy = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2xy = 24 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ xy = 24 \end{cases}$

a) $y = 8 - x$

$x(8 - x) + x^2 = 24 \rightarrow 8x - x^2 + x^2 = 24 \rightarrow 8x = 24 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 8 - 3 = 5$

Solución: $x = 3,\ y = 5$

b) $y = 1 - 2x$

$x(1 - 2x) = -3 \rightarrow x - 2x^2 = -3 \rightarrow -2x^2 + x + 3 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -1 \end{cases}$$

Si $x = -1 \rightarrow y = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$

Si $x = \dfrac{3}{2} \rightarrow y = 1 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = -2$

Solución: $\begin{cases} x_1 = -1,\ y_1 = 3 \\ x_2 = \dfrac{3}{2},\ y_2 = -2 \end{cases}$

c) $x = \dfrac{1 + 3y}{2}$

$2\left(\dfrac{1 + 3y}{2}\right)y = 24 \rightarrow y + 3y^2 = 24 \rightarrow 3y^2 + y - 24 = 0$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-24)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 17}{6} \begin{cases} y = \dfrac{8}{3} \\ y = -3 \end{cases}$$

Si $y = \dfrac{8}{3} \rightarrow x = \dfrac{1 + 3 \cdot \frac{8}{3}}{2} = \dfrac{9}{2}$

Si $y = -3 \rightarrow x = \dfrac{1 + 3 \cdot (-3)}{2} = -4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{2},\ y_1 = \dfrac{8}{3} \\ x_2 = -4,\ y_2 = -3 \end{cases}$

d) $x = \dfrac{2y}{3}$

$\left(\dfrac{2y}{3}\right)y = 24 \rightarrow \dfrac{2y^2}{3} = 24 \rightarrow y^2 = 36 \rightarrow y = \pm\sqrt{36} \begin{cases} y = 6 \\ y = -6 \end{cases}$

Si $y = 6 \rightarrow x = \dfrac{2 \cdot 6}{3} = 4$

Si $y = -6 \rightarrow x = \dfrac{2 \cdot (-6)}{3} = -4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 4,\ y_1 = 6 \\ x_2 = -4,\ y_2 = -6 \end{cases}$

13 Resuelve por reducción.

a) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 13 \\ 2x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 + 3y^2 = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - y^2 = -25 \end{cases}$

a) Sumamos las dos ecuaciones: $3x^2 = 27 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Si $x = 3 \rightarrow 9 + y^2 = 2 \rightarrow y^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

Si $x = -3 \rightarrow 9 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow y = \pm 4$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 3, \ y_1 = 4 \\ x_2 = 3, \ y_2 = -4 \\ x_3 = -3, \ y_3 = 4 \\ x_4 = -3, \ y_4 = -4 \end{cases}$

b) Multiplicamos por 3 la segunda ecuación y sumamos ambas:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 13 \\ 6x^2 - 3y^2 &= -6 \end{aligned}\right\} \rightarrow 7x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 1, \ y_1 = 2 \\ x_2 = 1, \ y_2 = -2 \\ x_3 = -1, \ y_3 = 2 \\ x_4 = -1, \ y_4 = -2 \end{cases}$

c) Multiplicamos la primera ecuación por 3, la segunda por 2 y las sumamos:

$$\left.\begin{aligned} 9x^2 - 6y^2 &= -6 \\ 4x^2 + 6y^2 &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow 13x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 0, \ y_1 = 1 \\ x_2 = 0, \ y_2 = -1 \end{cases}$

d) Sumamos ambas ecuaciones: $2x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \rightarrow$ No existe. No tiene solución.

Resuelve problemas

14 La diferencia de dos números es 24. Si le sumamos 8 a cada uno, se obtienen otros dos tales que el mayor es triple del menor. ¿De qué números se trata?

Llamamos x e y a los números buscados.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 24 \\ x + 8 &= 3(y + 8) \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} -x + y &= -24 \\ x - 3y &= 16 \end{aligned}\right\}$$

$$-2y = -8 \rightarrow y = 4 \rightarrow x - 4 = 24 \rightarrow x = 28$$

Los números buscados son 28 y 4.

15 **El precio de un museo es 7 € la entrada adulta y 3 € la infantil. El martes visitaron el museo 235 personas y se recaudaron 1 485 €. ¿Cuántas entradas adultas y cuántas infantiles se vendieron?**

Llamamos x al número de entradas adultas que vendió el museo, e y, al número de entradas infantiles.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 235 \\ 7x + 3y &= 1485 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow x = 235 - y \\ &\rightarrow 7(235 - y) + 3y = 1485 \rightarrow 1645 - 4y = 1485 \rightarrow 4y = 160 \rightarrow y = 40 \end{aligned}$$

$$x = 235 - 40 = 195$$

Se vendieron 195 entradas adultas y 40 infantiles.

16 **En una panadería, Alicia compra 4 bollos y 3 chocolatinas por 8,75 €. Si Pedro paga lo mismo por 3 bollos y 4 chocolatinas, ¿cuánto cuesta un bollo? ¿Y una chocolatina?**

Llamamos x al precio de un bollo e y al de una chocolatina.

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 8{,}75 \\ 3x + 4y &= 8{,}75 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 12x + 9y &= 26{,}25 \\ -12x - 16y &= -35 \end{aligned}\right\}$$

$$-7y = -8{,}75 \rightarrow y = 1{,}25$$

$$3x + 4(1{,}25) = 8{,}75 \rightarrow 3x = 3{,}75 \rightarrow x = 1{,}25$$

Un bollo cuesta 1,25 €, y una chocolatina, 1,25 €.

17 **El presupuesto de una biblioteca es de 100 € para libros y discos. Si compran 3 libros y 4 discos, sobran 5 €, y si compran 4 libros y 4 discos, faltan 10 €. Halla el precio de un libro y el de un disco.**

Llamamos x al precio de un libro e y al de un disco.

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 95 \\ 4x + 4y &= 110 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 95 \\ -4x - 4y &= -110 \end{aligned}\right\}$$

$$-x = -15 \rightarrow x = 15$$

$$3 \cdot 15 + 4y = 95 \rightarrow 4y = 50 \rightarrow y = 12{,}5$$

Un libro cuesta 15 €, y un disco, 12,50 €.

18 **De los 1 200 estudiantes de un centro escolar, un grupo de 333 participan en una actividad deportiva. Ese grupo está compuesto por el 30 % de las chicas y el 25 % de los chicos del centro. ¿Cuántas chicas y cuántos chicos hay en ese centro?**

Llamamos x al número de chicas e y al de chicos.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1200 \\ 0{,}3x + 0{,}25y &= 333 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow x = 1\,200 - y \\ &\rightarrow 0{,}3(1\,200 - y) + 0{,}25y = 333 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow 360 - 0{,}3y + 0{,}25y = 333 \rightarrow 0{,}05y = 27 \rightarrow y = 540$$

$$x = 1\,200 - 540 = 660$$

Hay 660 chicas y 540 chicos.

19 **En un test de 50 preguntas, por cada una acertada te dan 4 puntos y por cada una errónea o no contestada te restan 3 puntos. Si mi nota ha sido el 58 % de la puntuación máxima que se puede obtener, ¿cuántos aciertos y cuántos fallos he tenido?**

Llamamos x al número de aciertos e y al de fallos.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 4x - 3y = 0,58 \cdot 200 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -4x - 4y = -200 \\ 4x - 3y = 116 \end{array}\right\}$$

$$-7y = -84 \rightarrow y = 12$$

$$x + 12 = 50 \rightarrow x = 38$$

He obtenido 38 aciertos y 12 fallos.

20 **El área de un trapecio es 64 cm^2. Si sus bases se diferencian en 4 cm y tiene 6 cm de altura, ¿cuánto miden sus bases?**

Llamamos B a la base mayor y b a la menor.

$$\left.\begin{array}{l} B - b = 4 \\ \dfrac{(B + b) \cdot 6}{2} = 64 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} B - b = 4 \\ 3B + 3b = 64 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3B - 3b = 12 \\ 3B + 3b = 64 \end{array}\right\}$$

$$6B = 76 \rightarrow B = \frac{76}{6} = \frac{38}{3}$$

$$\frac{38}{3} - b = 4 \rightarrow b = \frac{38}{3} - 4 = \frac{26}{3}$$

La base mayor mide $\dfrac{38}{3}$ cm y la menor, $\dfrac{26}{3}$ cm.

21 **Halla una fracción tal que si se le suma una unidad al numerador y se deja el mismo denominador la fracción es igual a 1/2. Y si se mantiene el numerador inicial y se suman 3 unidades al denominador, la fracción es igual a 1/3.**

Llamamos x al numerador de la fracción e y al denominador.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{y+3} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 2 = y \\ 3x = y + 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = -2 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x + y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 5 \rightarrow y = 2 \cdot 5 + 2 = 12$$

La fracción buscada es $\dfrac{5}{12}$.

22 **Sabemos que dos números suman 34. Si al mayor lo dividimos entre 3 y al menor entre 4, los resultados obtenidos se diferencian en 2 unidades. Halla dichos números.**

Llamamos x e y a los números.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 34 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 34 \\ 4x - 3y = 24 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 3y = 102 \\ 4x - 3y = 24 \end{array}\right\} \rightarrow 7x = 126 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 18 \rightarrow y = 34 - 18 = 16$$

El número mayor es 18, y el menor, 16.

23 **La edad de Carmen es el triple de la de su hija Maite. Pero dentro de 15 años será el doble de la que entonces tenga su hija. ¿Cuál es la edad de cada una?**

Llamamos x a la edad de Maite e y a la de Carmen.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x + 15 = 2(y + 15) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 2y + 15 \end{array}\right\} \to 3y = 2y + 15 \to y = 15$$

Maite tiene 15 años y su madre, Carmen, tiene 45.

24 **Hace tres años, la edad de Rubén era el doble de la de Marta. Dentro de 7 años, será de 4/3 de la que entonces tenga Marta. Calcula sus edades.**

Edad de Rubén: x. Edad de Marta: y.

$$\left.\begin{array}{l} x - 3 = 2(y - 3) \\ x + 7 = \dfrac{4}{3}(y + 7) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y = -3 \\ 3x - 4y = 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x + 4y = 6 \\ 3x - 4y = 7 \end{array}\right\}$$

$$x \qquad = 13$$

$$13 - 2y = -3 \to 2y = 16 \to y = 8$$

Rubén tiene 13 años, y Marta, 8 años.

25 **He cambiado un montón de monedas de 20 céntimos por monedas de 1 €, de manera que ahora tengo 24 monedas menos que antes. ¿Cuántas monedas de 20 céntimos tenía?**

Llamamos x al número de monedas de 20 cént. que tenía e y al número de monedas de 1 € que me dan a cambio.

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 24 \\ \dfrac{x}{5} = y \end{array}\right\} \to x - \frac{x}{5} = 24 \to 4x = 120 \to x = 30$$

$$y = \frac{30}{5} = 6$$

Tenía 30 monedas de 20 céntimos.

26 **Tengo dos tabletas de chocolate, una contiene el 60 % de cacao, y la otra, el 85 %. ¿Qué cantidad tendré que fundir de cada tableta para obtener una mezcla de 300 g con un 75 % de cacao?**

Llamamos x a la cantidad de la primera tableta e y a la de la segunda.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ 0,6x + 0,85y = 0,75 \cdot 300 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -0,6x - 0,6y = -180 \\ 0,6x + 0,85y = 225 \end{array}\right\}$$

$$0,25\,y = 45 \to y = 180$$

$$x + 180 = 300 \to x = 120$$

Tengo que fundir 120 g del 60 % con 180 g del 85 %.

27 **Hemos mezclado aceite de oliva de 3,50 €/L con aceite de girasol de 2 €/L para obtener 50 L de mezcla a 3,08 €/L. Calcula la cantidad de aceite de oliva y de aceite de girasol que hemos mezclado.**

	CANTIDAD	PRECIO
OLIVA	x	3,5
GIRASOL	y	2
MEZCLA	50	3,08

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 3,5x + 2y = 50 \cdot 3,08 \end{cases} \to \begin{cases} y = 50 - x \\ 3,5x + 2(50 - x) = 154 \end{cases} \to 3,5x + 100 - 2x = 154 \to$$

$$\to 1,5x = 54 \to x = 36 \to y = 14$$

36 l de aceite de oliva y 14 l de girasol.

28 **Entre dos autobuses viajan 120 personas. Si del más lleno se trasladan los 2/5 al otro, los dos llevarán el mismo número de personas. ¿Cuántas personas llevaba cada autobús?**

Llamamos x e y al número de pasajeros de cada autobús.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ x - \dfrac{2x}{5} = y + \dfrac{2x}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ 5x - 2x = 5y + 2x \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x + y = 120 \\ x - 5y = 0 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + \ \ y = 120 \\ -x + 5y = 0 \end{array}\right\} \to 6y = 120 \to y = 20 \to x = 120 - 20 = 100$$

El autobús que más pasajeros llevaba, llevaba 100, y el que menos, 20.

29 **Una empresa recibe el encargo de fabricar cierto número de macetas para una fecha determinada. Al planificar la producción, la gerente advierte que si se fabricasen 250 macetas diarias, faltarían 150 macetas al concluir el plazo. Pero que si se fabricasen 260 macetas diarias, sobrarían 80. ¿Cuántos días de plazo tenían y cuántas macetas les encargaron?**

Llamamos x al número de días de plazo e y al número de macetas.

$$\left.\begin{array}{r} 250x - y = -150 \\ 260x - y = 80 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -250x + y = 150 \\ 260x - y = 80 \end{array}\right\} \to 10x = 230 \to x = 23 \to y = 5\,900$$

Tienen 23 días de plazo para un encargo de 5 900 macetas.

30 **Por un pantalón y unos zapatos, he pagado 126 €. Si el precio del pantalón aumentara en un 14 %, entonces sería el 75 % del precio de los zapatos. ¿Cuánto pagué por cada uno?**

Llamamos x al precio del pantalón e y al de los zapatos.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 126 \\ 1,14x = 0,75y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} y = 126 - x \\ 1,14x = 0,75(126 - x) \end{array}\right\} 1,14x = 94,5 - 0,75x \to$$

$$\to 1,89x = 94,5 \to x = 50 \to y = 76$$

Por el pantalón he pagado 50 €, y por los zapatos, 76 €.

Página 146

31 Si te doy 4 de mis libros, tú tendrás el doble que yo. Si tú me das 6 de los tuyos, yo tendré el doble que tú. ¿Cuántos libros tenemos cada uno?

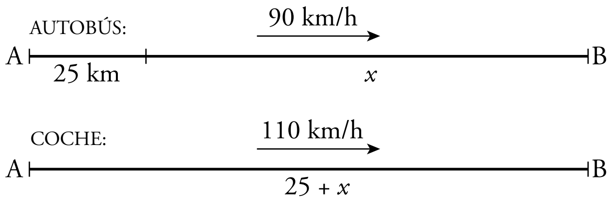
Llamamos x a los libros que yo tengo e y a los que tienes tú.

$$\left.\begin{array}{l} y + 4 = 2(x-4) \\ x + 6 = 2(y-6) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x - \ \ y = \ \ 12 \\ x - 2y = -18 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -4x + 2y = -24 \\ x - 2y = -18 \end{array}\right\} \to -3x = -42 \to x = 14 \to$$

$$\to 2 \cdot 14 - y = 12 \to y = 16$$

Yo tengo 14 libros y tú tienes 16.

32 Un autobús sale de A a 90 km/h. Cuando ha recorrido 25 km, sale de A un coche a 110 km/h que quiere alcanzar al autobús. ¿Cuánto tiempo tarda en hacerlo y qué distancia recorre hasta conseguirlo?



	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
AUTOBÚS	x	90	t
COCHE	$25 + x$	110	t

Sabemos que *espacio* = *velocidad* · *tiempo*.

$$\left.\begin{array}{l} x = 90t \\ 25 + x = 110t \end{array}\right\} \to 25 + 90t = 110t \to 20t = 25 \to t = 1{,}25 \to x = 112{,}5$$

Tarda 1,25 h y recorre 137,5 km.

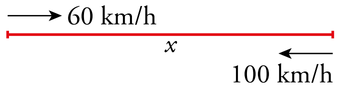
33 Dos ciudades, A y B, distan 234 km. De A sale un autobús en dirección a B y simultáneamente sale de B un tren en dirección a A. Tardan en cruzarse 1 h y 30 min. ¿Cuál es la velocidad de cada uno si la del autobús supera a la del tren en 5 km/h?

$$\begin{cases} x = v \cdot 1{,}5 \\ 234 - x = (v+5) \cdot 1{,}5 \end{cases} \to 234 - 1{,}5v = 1{,}5v - 7{,}5 \to$$

$$\to 234 - 7{,}5 = 3v \to v = \frac{226{,}5}{3} = 75{,}5 \text{ km/h}$$

El tren va a 75,5 km/h, y el autobús, a 80,5 km/h.

34 **Un autobús escolar hace la ruta entre dos pueblos, A y B. Cuando va lleno lleva una velocidad media de 60 km/h y tarda 15 min más que si va vacío. Si cuando va vacío va a 100 km/h, ¿cuál es la distancia entre A y B?**



$$\left.\begin{array}{l} x = 60t \\ x = 100\,(t - 0,25) \end{array}\right\} \rightarrow 60t = 100t - 25 \rightarrow 40t = 25 \rightarrow t = 0,625 \rightarrow x = 60 \cdot 0,625 = 37,5$$

La distancia entre A y B es 37,5 km.

35 **Una empresa alquila dos tipos de coches: de 7 plazas y de 5 plazas. Un día se alquilan 11 coches en los que viajan 65 personas con todas las plazas ocupadas. ¿Cuántos coches de cada tipo alquiló?**

Si otro día también se alquilaron 11 coches con todas las plazas ocupadas en los que viajaron 2 personas menos, ¿hubo el mismo número de coches de cada tipo que la vez anterior?

Llamamos x al número de coches de 7 plazas e y al de 5 plazas.

- 1.er día:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ 7x + 5y = 65 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -7x - 7y = -77 \\ 7x + 5y = 65 \end{array}\right\}$$

$$-2y = -12 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 11 - 6 = 5$$

Alquilo 5 coches de 7 plazas y 6 de 5 plazas.

- 2.º día:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 11 \\ 7x + 5y = 63 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -7x - 7y = -77 \\ 7x + 5y = 63 \end{array}\right\}$$

$$-2y = -14 \rightarrow y = 7 \rightarrow x = 11 - 7 = 4$$

Alquilo 4 coches de 7 plazas y 7 de 5 plazas..

36 **El perímetro de un rectángulo es 43,4 cm y su área, 112,2 cm^2. Halla sus dimensiones.**

Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo.

$$\left.\begin{array}{r} 2\,(x + y) = 43,4 \\ x \cdot y = 112,2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y = 21,7 \rightarrow x = 21,7 - y \\ (21,7 - y)\,y = 112,2 \rightarrow -y^2 + 21,7\,y - 112,2 = 0 \end{array}$$

$$y = \frac{-21,7 \pm \sqrt{470,89 - 448,8}}{-2} \begin{array}{l} y_1 = 8,5 \rightarrow x_1 = 13,2 \\ y_2 = 13,2 \rightarrow x_2 = 8,5 \end{array}$$

Las dimensiones del rectángulo son 13,2 cm × 8,5 cm.

37 **La diferencia de dos números es 2, y la de sus cuadrados, 20. Halla esos números.**

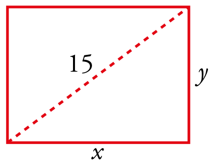
Los números son x e y.

$$\left\{\begin{array}{l} x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 + y \\ (2 + y)^2 - y^2 = 20 \rightarrow 4 + 4y + y^2 - y^2 = 20 \rightarrow 4y = 16 \rightarrow y = 4 \rightarrow \end{array}\right.$$

$$\rightarrow x = 6$$

Los números son 6 y 4.

38 **La diagonal de un rectángulo mide 15 cm, y su perímetro, 42 cm. Calcula sus lados.**



$$\begin{cases} 2x + 2y = 42 \\ x^2 + y^2 = 15^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 21 \\ x^2 + y^2 = 225 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 21 - x \\ x^2 + (21 - x)^2 = 225 \end{cases} \rightarrow x^2 + 441 - 42x + x^2 = 225 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 - 42x + 216 = 0 \rightarrow x^2 - 21x + 108 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = 9 \end{cases}$$

Si $x = 12$, $y = 21 - 12 = 9$.

Si $x = 9$, $y = 21 - 9 = 12$.

Los lados del rectángulo miden 9 cm y 12 cm, respectivamente.

39 **El perímetro de un rectángulo es 18 cm. Si cada uno de sus lados aumenta 1 cm, su área aumenta 10 cm². ¿Cuántos rectángulos cumplen esta condición?**

Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo

$$\left.\begin{array}{r} 2(x + y) = 18 \\ (x + 1)(y + 1) = xy + 10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ xy + x + y + 1 = xy + 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + y = 9 \\ x + y = 9 \end{array}$$

Cualquier rectángulo tal que $x + y = 9$ cumple las condiciones del enunciado. Hay infinitos.

40 **Las diagonales de un rombo están en proporción 4 a 3. Si su área es 216 cm², ¿cuánto mide su lado?**

- Llamamos D y d a las diagonales del rombo.

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{D}{d} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{D \cdot d}{2} = 216 \end{array}\right\} \begin{array}{l} D = \dfrac{4d}{3} \\ \dfrac{4d}{3} \cdot \dfrac{d}{2} = 216 \rightarrow d^2 = \dfrac{216 \cdot 6}{4} = 324 \rightarrow d = 18 \text{ cm} \end{array}$$

$$D = \frac{4 \cdot 18}{3} = 24 \text{ cm}$$

- Calculamos cuánto mide el lado del rombo:

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = l^2 \rightarrow 12^2 + 9^2 - l^2 \rightarrow l = 15$$

El lado del rombo mide 15 cm.

41 **Si a un número de dos cifras le restamos el que resulta de invertir el orden de estas, obtenemos el doble de la cifra de las decenas del número inicial.**

Hállalo sabiendo que sus cifras suman 16.

x es la cifra de las decenas.

y es la cifra de las unidades.

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ (10x + y) - (10y + x) = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 16 - x \\ 10x + 16 - x - 10(16 - x) - x = 2x \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10x + 16 - x - 160 + 10x - x = 2x \rightarrow 16x = 144 \rightarrow x = 9 \rightarrow y = 7$$

El número es 97.

42 **Halla un número de dos cifras tal que la suma de sus cifras sea 9 y que su triple sea 9 unidades mayor que el número que se obtiene al invertir sus cifras.**

Llamamos $(10x + y)$ al número buscado.

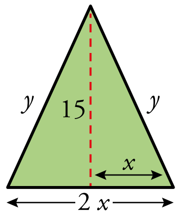
$$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 3(10x + y) &= (10y + x) + 9 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 29x - 7y &= 9 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} +7x + 7y &= +63 \\ 29x - 7y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

$$36x = 72 \to x = 2$$

$$y = 9 - 2 = 7$$

El número buscado es el 27.

43 **El perímetro de este triángulo mide 50 cm. Halla la longitud de sus lados.**



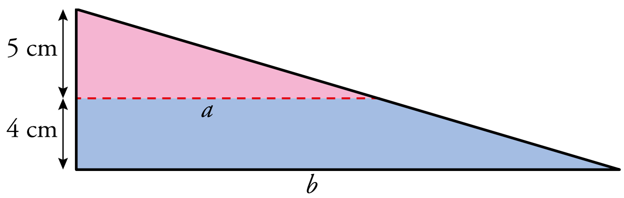
$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 50 \\ x^2 + 15^2 &= y^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x + y = 25 \to x = 25 - y \\ &(25 - y)^2 + 15^2 = y^2 \to 625 - 50y + y^2 + 225 = y^2 \to \end{aligned}$$

$$\to 50y = 850 \to y = 17$$

$$x = 25 - 17 = 8$$

La base del triángulo mide $8 \cdot 2 = 16$ cm, y los lados iguales, 17 cm cada uno.

44 **Observa la siguiente figura:**



a) Utiliza el teorema de Tales para expresar la relación entre a y b.

b) Calcula a y b para que el trapecio tenga 56 cm^2 de superficie.

a) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{4+5} \to \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{9}$

b) $$\left.\begin{aligned} a &= \frac{5b}{9} \\ \frac{(a+b) \cdot 4}{2} &= 56 \end{aligned}\right\} \to a + b = 28 \to \frac{5b}{9} + b = 28 \to$$

$$\to 5b + 9b = 252 \to b = 18$$

$$a = \frac{5 \cdot 18}{9} = 10$$

Solución: $a = 10$ cm, $b = 18$ cm.

Resuelve: un poco más difícil

45 **Si la base de un rectángulo disminuye 80 cm y su altura aumenta 20 cm, se convierte en un cuadrado. Y si la base disminuye 60 cm y la altura aumenta 20 cm, su área disminuye 400 cm^2. Halla las dimensiones del rectángulo.**

Llamamos x a la medida de la base e y a la de la altura.

$$\begin{cases} x - 80 = y + 20 \\ (x - 60)(y + 20) = xy - 400 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 100 \\ xy + 20x - 60y - 1\,200 = xy - 400 \end{cases} \to \begin{cases} x = y + 100 \\ 20x - 60y = 800 \end{cases}$$

$$x = y + 100 \to 20(y + 100) - 60y = 800 \to 20y + 2\,000 - 60y = 800 \to -40y = -1\,200 \to$$

$$\to y = 30 \to x = 130$$

La base del rectángulo mide 130 cm, y la altura, 30 cm.

46 **Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son a, 9, $3a - b$ y $3a + b$. ¿Cuál es el término que ocupa el lugar 187 en esta progresión?**

Al ser una progresión aritmética, la diferencia entre los términos es siempre la misma.

$$\left.\begin{array}{l} 9 - a = 3a - b - 9 \\ 3a - b - 9 = (3a + b) - (3a - b) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 4a - b = 18 \\ 3a - 3b = 9 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} -12a + 3b = -54 \\ 3a - 3b = 9 \end{array}\right\} \to$$

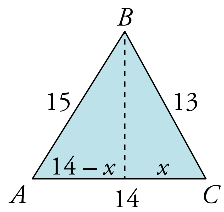
$$\to -9a = -45 \to a = 5 \to b = 4 \cdot 5 - 18 = 2$$

El término que ocupa el lugar 187 en la progresión responderá a la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot (a_2 - a_1)$$

$$a_{187} = 5 + 186 \cdot (9 - 5) = 749$$

47 **¿Cuánto mide la altura del triángulo que parte de B? Todas las medidas están dadas en centímetros.**



Llamamos y a la altura pedida.

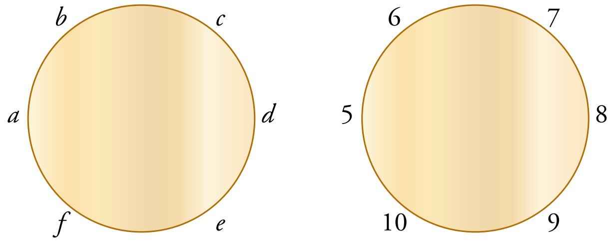
$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13^2 \\ (14 - x)^2 + y^2 = 15^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 169 \\ -28x + x^2 + y^2 = 29 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} y^2 = 169 - x^2 \\ y^2 = 29 - 28x - x^2 \end{array}\right\} \to 169 - x^2 = 29 - 28x - x^2 \to 140 = 28x \to x = 5$$

$$25 + y^2 = 169 \to y^2 = 169 - 25 = 144 \to y = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

Como la altura no puede tomar un valor negativo, la única solución válida es 12 cm.

48 **Seis personas *a, b, c, d, e* y *f,* están sentadas en una mesa redonda. Cada una de ellas escribe un número y se lo enseña a las dos que tiene a su lado. Después, cada una dice en voz alta la media de los dos números que le han enseñado. Si los resultados fueron 5, 6, 7, 8, 9 y 10, ¿cuáles fueron los números que escribieron?**



$$\begin{cases} b + f = 10 \;\rightarrow\; b = 10 - f \\ d + f = 18 \;\rightarrow\; d = 18 - f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + d = 14 \\ (10 - f) + (8 - f) = 14 \end{cases} \rightarrow -2f = -4 \;\rightarrow\; f = 2$$

$$\begin{cases} a + c = 12 \;\rightarrow\; a = 12 - c \\ e + c = 16 \;\rightarrow\; e = 16 - c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + e = 20 \\ (12 - c) + (16 - c) = 20 \end{cases} \rightarrow 2c = 8 \;\rightarrow\; c = 4$$

$a = 8,\; b = 8,\; c = 4,\; d = 16,\; e = 12,\; f = 2$

Página 147

49 Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes:

a) $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - 3y = 9 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 4 \\ x + y = 5 \\ z - 3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = z \\ x - y = z \\ x + z = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 3 = 0 \\ 2x - 3y = 9 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x = 3 \\ \rightarrow 2 \cdot 3 - 3y = 9 \rightarrow y = -1 \\ \rightarrow 3 - 1 - z = 1 \rightarrow z = 1 \end{array}$

Solución: $x = 3,\ y = -1,\ z = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 4 \\ x + y = 5 \\ z - 3 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow z = 4 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 10 \end{array}\right\}$

$$5x = 10 \rightarrow x = 2$$

$$\rightarrow y = 5 - x = 3$$

Solución: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x - y = z \\ x + z = -4 \end{array}\right\}$ Sumando las 2 primeras ecuaciones: $2x = 2z \rightarrow x = z$

$\rightarrow x + z = -4 \rightarrow x + x = -4 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$

$x + y = z \rightarrow x + y = x \rightarrow y = 0$

Solución: $x = -2,\ y = 0,\ z = 0$

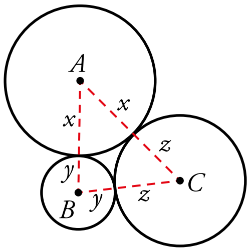
d) $\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{array}\right\}$ Restando las dos primeras ecuaciones: $-z = 2 \rightarrow z = -2$

$y + z = 2 \rightarrow y + (-2) = 2 \rightarrow y = 4$

$x + y = 5 \rightarrow x + 4 = 5 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1,\ y = 4,\ z = -2$

50 **Una pieza mecánica está formada por tres cilindros, cuyas secciones se ven en esta figura.**



Las distancias entre los centros de las bases de los cilindros son: $\overline{AB}$ = 14 cm; $\overline{AC}$ = 17 cm; $\overline{BC}$ = 13 cm.

¿Cuál es el radio de cada cilindro?

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 14 \\ x + z = 17 \\ y + z = 13 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \to \ x + y = 14 \\ \text{Restando las dos últimas ecuaciones: } x - y = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 14 \\ x - y = 4 \\ \hline 2x = 18 \ \to \ x = 9 \end{array}$$

$x + y = 14 \ \to \ y = 14 - 9 = 5$

$x + z = 17 \ \to \ z = 17 - 9 = 8$

Solución: $x = 9$ cm, $y = 5$ cm, $z = 8$ cm

51 **Si multiplicamos por 8 la suma de las dos cifras de un número, obtenemos dicho número. Hállalo.**

$8(x + y) = 10x + y \ \to \ 8x + 8y = 10x + y \ \to \ 7y = 2x \ \to \ x = \dfrac{7}{2}y$

x tiene que ser un número natural de una sola cifra. Por tanto, $y = 2$ y $x = 7$, pues para cualquier otro múltiplo de 2, x sería mayor que 9.

El número buscado es 72.

Reflexiona

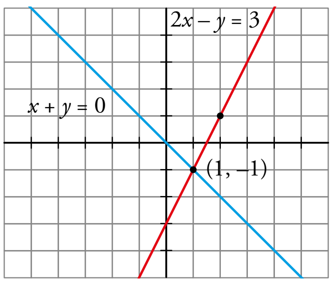
52 **a) Busca tres soluciones de $2x - y = 3$.**

b) Dibuja en los mismos ejes $2x - y = 3$ y $x + y = 0$, y di cuál es la solución del sistema que forman.

a) $2x - y = 3 \ \to \ y = 2x - 3$

Por ejemplo: (0, –3); (1, –1); (2, 1)

b) La recta $x + y = 0$ pasa por (0, 0) y (1, –1)



La solución del sistema es: $x = 1$, $y = -1$

53 Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya única solución sea $x = 2$, $y = -1$.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2 + 2(-1) = 4 \\ 2 - (-1) = 3 \end{cases} \rightarrow x = 2,\ y = -1 \text{ es solución.}$$

54 ¿Cuál debe ser el valor de m para que los sistemas a) y b) sean equivalentes?

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = m \\ y = 3 \end{cases}$

La solución de a) es $x = 5$, $y = 3$.

b) debe tener la misma solución: $5 - 3 = m \rightarrow m = 2$

55 ¿Es $x = 3$, $y = 1$ solución de alguno de estos sistemas?

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3 + 1 = 4 \\ 3 - 2 = 1 \\ 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ $x = 3$, $y = 1$ es la solución de ese sistema.

b) $\left.\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3 - 1 = 2 \\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 3 \\ 3 + 1 = 4 \neq 5 \end{matrix}\right\}$ $x = 3$, $y = 1$ no es solución de ese sistema.

56 Completa estos sistemas de modo que el primero tenga la solución $x = 3$, $y = -2$; el segundo sea incompatible, y el tercero y el cuarto sean indeterminados:

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \ldots \\ \ldots - y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = \ldots \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = \ldots \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ \ldots - 4y = \ldots \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + 2y = \ldots \\ \ldots - y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \cdot 3 + 2(-2) = 5 \\ \ldots = 8 + y = 8 - 2 = 6 \end{cases} \rightarrow$ Solución: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x - y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = \ldots \end{cases}$ Puede ser cualquier número distinto de 10.

Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = \ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 2y = 7 \\ \ldots - 4y = \ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 7 \\ 2x - 4y = -14 \end{cases}$

57 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) La ecuación $\frac{x}{3} - \frac{1}{x} = 1$ **es una ecuación lineal.**

b) El sistema $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$ **es indeterminado.**

c) Los sistemas $S_1: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ **y** $S_2: \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$ **son equivalentes.**

d) La ecuación $5x + 3y = 18$ **no tiene solución.**

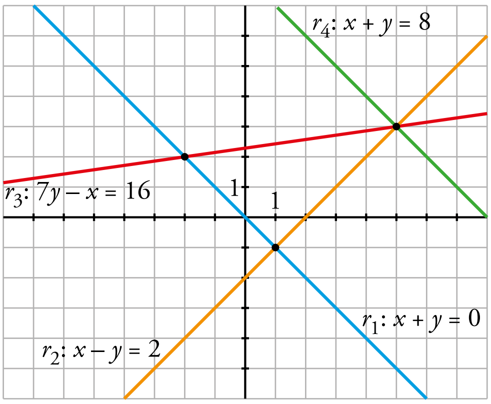
a) Falso. Debería tener otra incógnita para tratarse de un sistema lineal.

b) Verdadero. La segunda ecuación está multiplicada por –2 respecto a la primera.

c) Verdadero. La solución de los dos sistemas es la misma, por lo que son equivalentes.

d) Falso. Tiene infinitas soluciones, damos un valor a una de las incógnitas y despejamos el valor de la otra.

58 **Observa la representación de las rectas** r_1, r_2, r_3 **y** r_4 **y responde sin resolver.**



a) ¿Cuál es la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones? ¿Alguno es incompatible o indeterminado?

i) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$

b) ¿Alguno de estos sistemas tiene solución?

I) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$ **II)** $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \\ 7y - x = 16 \end{cases}$

a) *i)* $x = 1$, $y = -1$ *ii)* $x = 5$, $y = 3$ *iii)* Incompatible.

b) Sí, *II)* → *Solución*: $x = 5$, $y = 3$.

59 **¿Qué valores deben tomar a y b para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones?**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ ax + by = 15 \end{cases}$$

Escribe tres soluciones del sistema.

Para que tenga infinitas soluciones, la segunda ecuación debe ser proporcional a la primera.

Así: $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ ax + by = 15 \end{cases} \rightarrow a = 9$ y $b = 6$

Soluciones: Damos valores a x para obtener puntos de la recta $3x + 2y = 5$:

$x = 1$; $y = 1$; $x = 0$, $y = \frac{5}{2}$; $x = -1$, $y = 4$

60 **¿Qué condición deben cumplir c y d para que este sistema no tenga solución?**

$$\begin{cases} 3x + 2y = c \\ 6x + 4y = d \end{cases}$$

El sistema no tendrá solución cuando las dos rectas sean paralelas, es decir, cuando $d \neq 2c$.

Página 148

Utiliza el lenguaje algebraico

Peaje solo para algunos

Hace muchos, muchos años, allá en el tiempo de las espadas, había un poderoso señor cuyo castillo dominaba el único puente sobre el río del lugar.

Un buen día colocó en la entrada del puente el cartel de la derecha.

Un campesino, algo ambicioso, reunió sus ahorros y se empeñó en pasar varias veces por el puente. Pero a la tercera se encontró con la bolsa vacía.

Sin embargo, un rico comerciante intentó hacer lo mismo pero el señor del castillo, al ver su bolsa, le dijo que el trato era solo para campesinos. Que los ricos comerciantes debían pagar tres doblones y marchar, sin más.

Sabiendo que el campesino reunió más de 10 pero menos de 20 doblones:

- **¿Cuántas monedas tomaba cada vez el señor del castillo?**
- **¿Cuántas monedas llevaba, al menos, el rico comerciante?**

Quizá te resulte más fácil si utilizas el lenguaje algebraico.

Para pasar, has de dejar que tome de tu bolsa tantas monedas como quepan en mi mano (una cantidad fija).

Al llegar al otro extremo, encontrarás a uno de mis sirvientes que, como regalo de despedida, te dará tantas monedas como te queden en la bolsa.

	ENTRA CON...	PEAJE	TRAS EL PEAJE	SALE CON...
PRIMERA VEZ	x	a	$x - a$	$2x - 2a$
SEGUNDA VEZ	$2x - 2a$	a	$2x - 3a$	?
TERCERA VEZ	?	?	?	0

— El campesino llevaba 14 doblones al principio. En la mano del señor cabían 8 doblones.

— El rico comerciante llevaba, al menos, 17 monedas. En este caso y con cantidades superiores, el señor del castillo debería entregar más monedas de las que recibiese.

Si es comerciante entra con 17 monedas, el señor le quita 8 y aún le quedan 9. Por lo tanto, el señor recibiría 8 y debería entregar 9. No le interesa.

Investiga

Cuadrado mágico

- **Ya sabes que en un cuadrado mágico, filas, columnas y diagonales suman lo mismo. Trata ahora de completar las casillas vacías para que el cuadrado de la derecha resulte mágico.**

3		
		1
	5	

Ayuda:

3		
	a	1
	5	b

→

3	$b-2$	$a+2$
$b+2$	a	1
$a-2$	5	b

→ $\mathbf{3 + a + b = (a - 2) + a + (a + 2)}$

Si profundizas en el problema, descubrirás la relación que debe existir entre a y b. Y eso te permitirá encontrarle muchas soluciones.

3	3	6
7	4	1
2	5	5

Página 149

Entrénate resolviendo otros problemas

- **En un salón de té solo se sirve té y tarta. Cada té vale 1,10 € y cada ración de tarta 2,10 €. Varias personas realizan, todas ellas, la misma consumición. La cuenta asciende a un total de 30,10 €. ¿Cuántas eran? ¿Qué tomó cada una?**

Un té vale 110 céntimos y una ración de tarta, 210 céntimos.

El total de la factura asciende a 3 010 céntimos.

Hemos de buscar posibles consumiciones cuyo coste total sea divisor de 3 010.

N.º DE CONSUMICIONES		COSTE TOTAL (EN CÉNTIMOS)	¿ES DIVISIBLE DE 3 010?
1	1 té + 1 pasta	110 + 210 = 320	No
2	1 té + 2 pastas 2 tés + 1 pasta	110 + 420 = 530 220 + 210 = 430	No Sí

3 010 : 430 = 7

Así pues, 7 eran los amigos y cada uno consumió dos tés y un trozo de tarta.

- Otra forma de resolverlo:

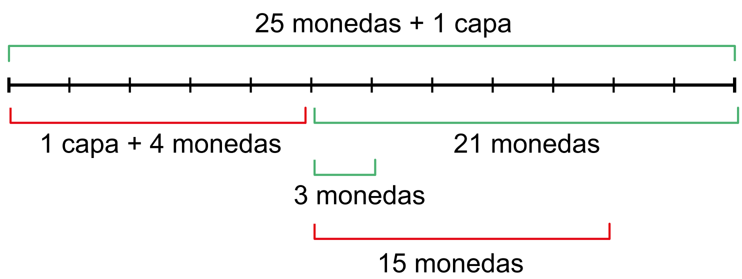
  Consideramos, en lugar de céntimos, decenas de céntimos.

  Un té vale 11 decenas de céntimos, y una ración de tarta, 21. La cuenta asciende a 310 decenas de céntimos.

  Descomponemos: $301 = 7 \cdot 43 = 7 \cdot (2 \cdot 11 + 21)$

  Así es fácil verlo: 7 amigos tomaron 2 tés y 1 ración de tarta cada uno.

- **Un hacendado contrata a un sirviente por un sueldo anual de una capa y 25 monedas de oro. A los cinco meses se despide, y recibe como pago la capa y cuatro monedas de oro. ¿En cuántas monedas está valorada la capa?**



En los 7 meses que le quedaban, habría ganado 21 monedas. Es decir, 3 monedas cada mes. En 5 meses habría ganado 15 monedas.

"15 monedas" equivalen a "4 monedas + 1 capa".

Por tanto, una capa vale 11 monedas.

- **Estas nueve bolas de billar tienen exactamente el mismo tamaño y todas pesan lo mismo salvo una que pesa un poco más.**

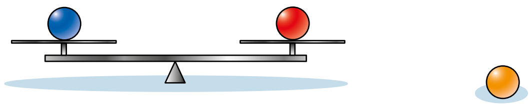
¿Cuántas pesadas necesitarías hacer para descubrir, con absoluta seguridad, cuál es la bola que pesa más?

Colocamos tres bolas en cada plato y dejamos tres fuera.

Si pesa más el plato de la izquierda, o el de la derecha, aquí está la bola buscada.

Si pesan lo mismo, la bola buscada es una de las tres que hemos dejado fuera.

En cualquiera de los casos tenemos tres bolas, una de las cuales es la buscada. Ahora, procedemos análogamente.



Colocamos una bola en cada platillo. La que pese más es la buscada.

Si pesan igual, entonces la bola más pesada es la que hemos dejado fuera.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Di cuál de los siguientes sistemas tiene una solución, cuál es incompatible y cuál es indeterminado:**

a) $\begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ 2x - \ \ y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + \ \ y = 5 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$

a) Es indeterminado.

b) Tiene solución $(x = 3,\ y = 1)$.

c) Tiene solución $(x = -3,\ y = -3)$.

d) Es incompatible.

2 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \ \ y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 1,5x + 0,25y = -2 \\ \ \ 2x - \ \ 0,5y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 3x - y \ = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy - x^2 = 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + \ \ y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 - 3y \\ x = 7 - 8y \end{cases}$

$\to 2 - 3y = 7 - 8y \to 8y - 3y = 7 - 2 \to 5y = 5 \to$

$\to y = 1 \to x = 2 - 3 = -1$

Solución: $x = -1,\ y = 1$

b) Multiplicamos por 2 la primera ecuación y sumamos ambas ecuaciones:

$5x = -10 \to x = -2$

Solución: $x = -2,\ y = 4$

c) $y = 3x - 4$

$x^2 - (3x - 4)^2 = 0 \to x^2 - 9x^2 + 24x - 16 = 0 \to -8x^2 + 24x - 16 = 0 \to$

$\to x^2 - 3x + 2 = 0 \to x = 2,\ x = 1$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 2,\ \ y_1 = 2 \\ x_2 = 1,\ \ y_2 = -1 \end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y = 13 \\ xy - x^2 = 15 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 13 - x \\ x(13 - x) - x^2 = 15 \to 13x - x^2 - x^2 = 15 \to 2x^2 - 13x + 15 = 0 \end{array}$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{4} = \frac{13 \pm 7}{4} \begin{cases} x_1 = 5 \to y_1 = 8 \\ x_2 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \to y_2 = \dfrac{23}{2} \end{cases}$$

Solución: $\begin{array}{l} x_1 = 5,\ \ y_1 = 8 \\ x_2 = \dfrac{3}{2},\ \ y_2 = \dfrac{23}{2} \end{array}$

3 **Aplica el método de reducción para resolver el sistema siguiente:**

$$\begin{cases} 7x + 2y = 12 \\ 11x - 3y = -61 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x + 2y = 12 \\ 11x - 3y = -61 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -77x - 22y = -132 \\ 77x - 21y = -427 \end{cases} \rightarrow -43y = -559 \rightarrow y = 13$$

$$\begin{cases} 21x + 6y = 36 \\ 22x - 6y = -122 \end{cases} \rightarrow 43x = -86 \rightarrow x = -2$$

Solución: $x = -2,\ y = 13$

4 **La diferencia entre las longitudes de las bases de un trapecio isósceles es de 4 cm; su altura mide 9 cm y su área es de 72 cm^2. Calcula la medida de las bases.**

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ \dfrac{9(x + y)}{2} = 72 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 + y \\ 4 + y + y = 16 \end{cases} \rightarrow 2y = 12 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 10$$

La base mayor mide 10 cm, y la base menor, 6 cm.

5 **Una agricultora comprueba que en el segundo de sus dos depósitos de agua para riego hay 10 litros más que en el primero. Traspasa 18 litros del segundo al primero y así este se queda con el doble que el segundo. Calcula la cantidad de agua que tenía cada depósito.**

Cantidad de agua en el primer depósito: x

Cantidad de agua en el segundo depósito: y

$$\begin{cases} y = x + 10 \\ x + 18 = 2(y - 18) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 10 \\ x - 2y = -54 \end{cases} \rightarrow x - 2(x + 10) = -54 \rightarrow x - 2x - 20 = -54 \rightarrow$$

$$\rightarrow -x = -34 \rightarrow x = 34,\ y = 44$$

El primero tenía 34 *l*, y el segundo, 44 *l*.

6 **Al mezclar un bote de un café de 7,50 €/kg con un saco de otro de 2,50 €/kg, se obtienen 16 kg de un café de 3,75 €/kg. ¿Qué cantidad de cada café se ha mezclado?**

Llamamos x a la cantidad de café de 7,50 €/kg que mezclamos, e y a la de 2,50 €/kg.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 16 \\ 7,5x + 2,5y = 3,75 \cdot 16 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -2,5x - 2,5y = -40 \\ 7,5x + 2,5y = 60 \\ \hline 5x \qquad\quad = 20 \end{array} \rightarrow x = 4$$

$$y = 16 - x \;\; 8 \;\; y = 12$$

Se ha mezclado 4 kg de café de 7,50 €/kg con 12 kg de café de 2,50 €/kg.

7 **He pagado 83 € por una cazadora y unos deportivos. En la cazadora me han rebajado el 20 % y en los deportivos el 10 %, y así me he ahorrado 17 €. ¿Cuáles eran los precios sin rebajar?**

Precio de la cazadora sin rebajar: x

Precio de los deportivos sin rebajar: y

$$\begin{cases} x + y = 83 + 17 = 100 \\ 0,8x + 0,9y = 83 \end{cases} \to \begin{cases} x = 100 - y \\ 0,8(100 - y) + 0,9y = 83 \end{cases} \to \begin{cases} x = 100 - y \\ 0,1y = 3 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x = 70 \text{ € es el precio de la cazadora} \\ y = 30 \text{ € es el precio de los deportivos} \end{cases}$$

8 **Las medidas de las diagonales de un rombo suman 68 cm y su lado mide 26 cm. Halla las medidas de las diagonales de este rombo.**

$$\begin{cases} x + y = 68 \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 26^2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 68 - y \\ \left(\dfrac{68 - y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 676 \end{cases}$$

$$\frac{4\,624 - 136y + y^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 676 \to 4\,624 - 136y + y^2 + y^2 = 2\,704 \to$$

$$\to 2y^2 - 136y + 1\,920 = 0 \to y^2 - 68y + 960 = 0 \begin{cases} y = 48 \\ y = 20 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} x_1 = 20, \quad y_1 = 48 \\ x_2 = 48, \quad y_2 = 20 \end{cases}$

La diagonal mayor mide 48 cm, y la menor, 20 cm.

8 FUNCIONES. CARACTERÍSTICAS

Página 153

Resuelve

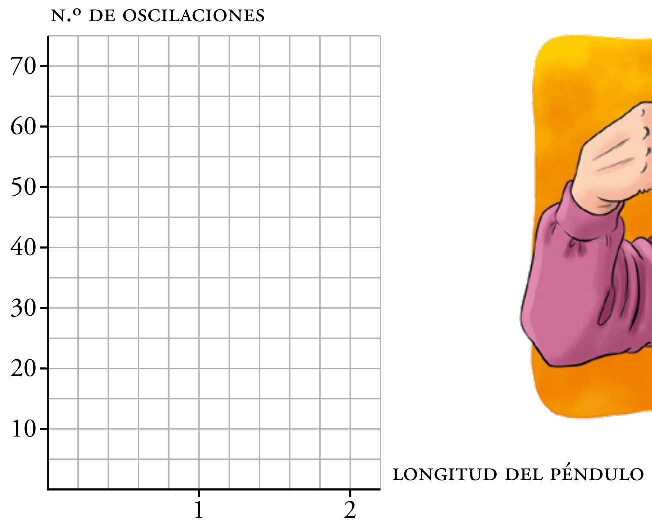
1 **El matemático que introdujo la notación $f(x)$, que utilizamos hoy en día para el manejo de funciones, fue Leonhard Euler. Busca información de su vida y de sus logros en el campo de las matemáticas.**

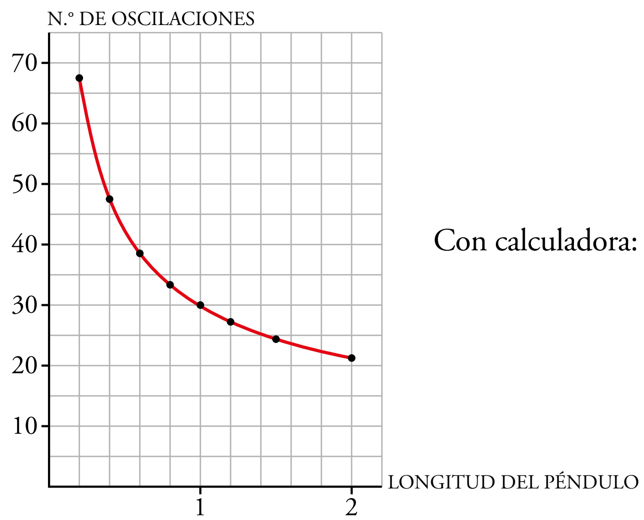
Respuesta abierta.

2 **Supón que realizamos un experimento similar al del joven Galileo, con el péndulo, y obtenemos los siguientes resultados (siendo «*l*» la longitud del péndulo (en m) y «*n*» el número de oscilaciones por minuto):**

l	2	1,50	1,20	1	0,80	0,60	0,40	0,20
n	21	24,5	27,5	30	33,5	38,5	47,5	67

Representa estos datos en tu cuaderno elaborando un sistema de referencia como el que te presentamos a continuación. Comprueba que los valores de la tabla responden bastante bien a la relación: $n = \dfrac{30}{\sqrt{l}}$





Con calculadora: 30 ÷ √ 2 = 21.21320343 ≈ 21

30 ÷ √ 1,5 = 24.49489742 ≈ 24,5

Etcétera.

1 LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Página 154

1 **Observa la gráfica del helicóptero y responde:**

a) ¿Cuánto tiempo ha empleado en realizar la misión?

b) ¿A qué altura estaba a los 20 min? ¿A qué altura baja a coger agua? ¿Y para apagar el fuego?

c) ¿Cuánto tiempo necesita para llenar de agua el depósito? ¿Y para soltarla sobre el fuego?

d) ¿A qué velocidad media (en m/min) sube desde que sale de la base hasta que llega a 300 m de altura?

a) Ha empleado 27 minutos.

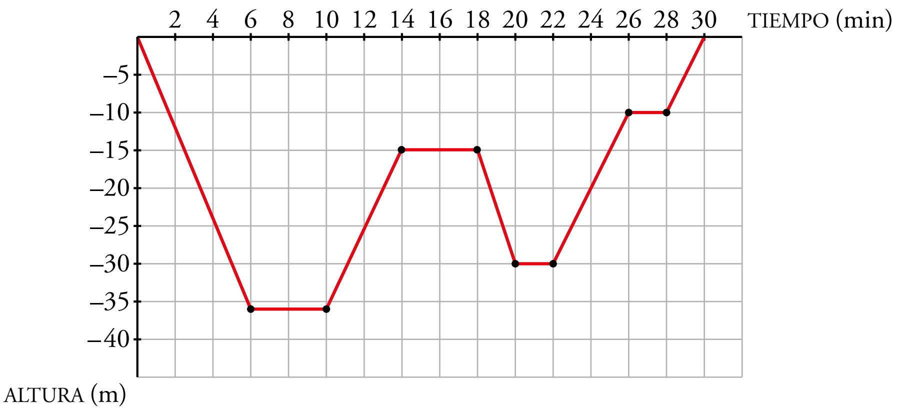
b) A los 20 min estaba a 60 metros. Baja a coger agua a 10 metros. Para apagar el fuego se sitúa a 60 metros.

c) Necesita 2 minutos para llenar el depósito. Para soltar el agua necesita 1,5 minutos, aproximadamente.

d) $v = \dfrac{300 \text{ m}}{3 \text{ min}} = 100 \text{ m/min}$

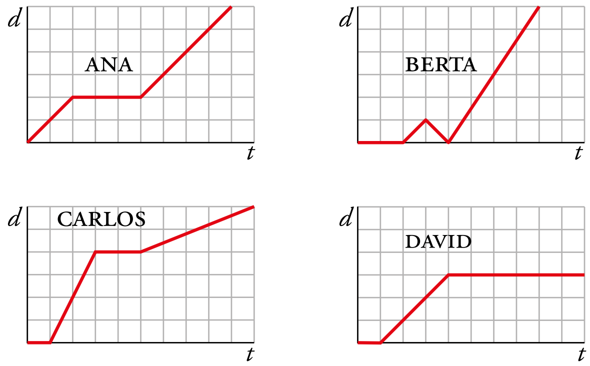
2 **Representa en unos ejes cartesianos los 30 minutos que ha estado en inmersión un buceador: sale del barco; baja hasta 36 m; se queda un rato recreándose con los corales; sube un poco y juega con unos delfines; vuelve a bajar porque ha visto una morena y, por último, se queda 2 min a 10 m de profundidad, antes de volver al barco, para realizar la descompresión.**

En el eje horizontal, da 2 min a cada cuadradito. En el vertical (solo la parte negativa), 5 m por cuadradito.



Página 155

3 Dos hermanas y dos hermanos de una familia van al mismo centro de estudios. Observa la gráfica distancia (*d*) - tiempo (*t*) de cada uno:



A la vista de las gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Quién ha salido antes?

b) ¿Quién ha llegado más tarde?

c) Dos han ido a buscar a sus amigos para ir a clase. ¿Quiénes son?

d) ¿A cuál se le ha olvidado algo en casa?

e) ¿Cuál no ha ido hoy a clase?

f) ¿Quién ha andado más lento en algún momento?

g) ¿Quién ha ido más rápido?

h) ¿Quién ha estado más tiempo sin moverse?

a) Ha salido antes Ana.

b) Ha llegado más tarde Carlos.

c) Ana y Carlos.

d) Se le ha olvidado algo a Berta.

e) No ha ido a clase David.

f) Ha andado más lento Carlos.

g) Berta ha ido más rápido.

h) David.

2 ASPECTOS RELEVANTES DE UNA FUNCIÓN

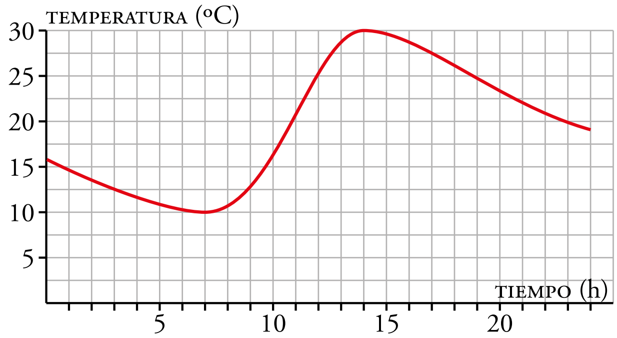
Página 156

1 **La gráfica de la derecha da la temperatura en Jaca a lo largo de un día.**

a) Indica los intervalos de tiempo en los que crece la temperatura y aquellos en los que decrece.

b) ¿Por qué crees que se producen esos aumentos y disminuciones de temperatura en esos tramos?

c) ¿Crees que en la ciudad es verano o invierno? Justifícalo.



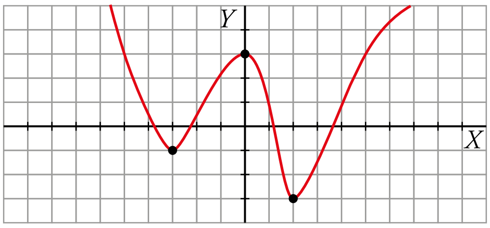
a) La temperatura en Jaca aumenta en el intervalo 7-14 horas y decrece en los intervalos 0-7 horas y 14-24 horas.

b) Por los cambios de temperatura a lo largo del día. Por la mañana las temperaturas van aumentando y, al acercarse la noche, las temperaturas disminuyen.

c) La temperatura más alta que alcanza son los 30 °C durante el día y la temperatura más baja que alcanza son los 10 °C. Por tanto, cuando se ha hecho esta gráfica era verano.

Página 157

2 **a) Indica en qué puntos de la gráfica hay máximos y mínimos relativos.**



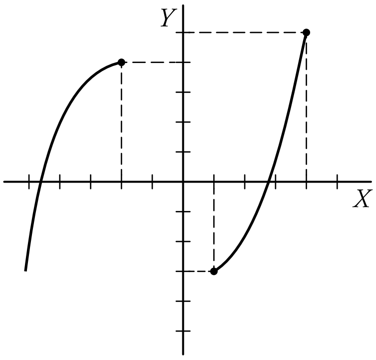
b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Máximo relativo en (0, 3). Mínimos relativos en (–3, –1) y en (2, –3).

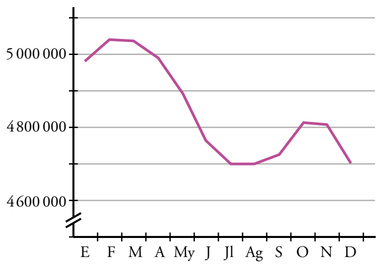
b) La función crece en (–3, 0) ∪ (2, +∞), y decrece en (–∞, –3) ∪ (∞, 2).

3 **Sobre unos ejes, dibuja una gráfica creciente que tenga dos máximos relativos en (–2, 4) y (4, 5) y un mínimo relativo en (1, –3).**

Respuesta abierta. Por ejemplo:



4 Meta. 8.5. **La siguiente gráfica muestra la tasa de paro en un cierto país en 2020:**



a) ¿En qué meses se encuentran los máximos y mínimos relativos?

b) ¿Qué crees que causa estas fluctuaciones en la tasa de paro?

c) ¿Has oido hablar del empleo estacional? Búscalo en Internet y relaciónalo con lo que ocurre en la gráfica.

a) Los máximos, en Marzo y Noviembre. Los mínimos, en Enero, Agosto y Diciembre.

b) El descenso en el paro lo provoca las campañas de Navidad y de verano.

c) El empleo estacional es el que se produce en determinadas épocas del año por estar asociado a una industria o sector económico donde la demanda de empleo es mucho más alta en unas temporadas que en otras.

Por ejemplo, en nuestra gráfica, la campaña comercial de Navidad o la campaña turística veraniega hacen que descienda mucho el paro.

Página 158

5 **La entrada al parque de atracciones vale 5 €, y por cada atracción hay que pagar 1 €.**

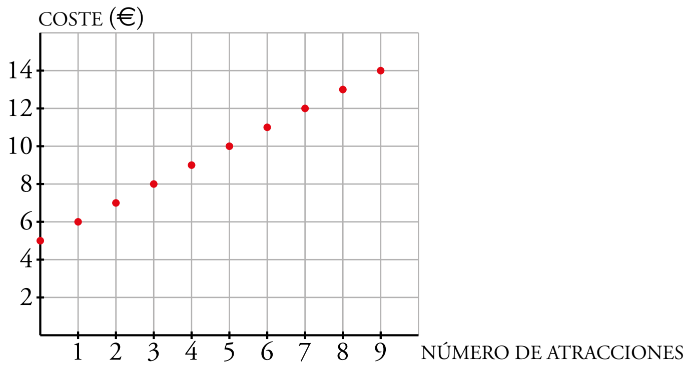
a) Representa esta función:

atracciones en las que se monta* → *coste

b) ¿Se pueden unir los puntos de la gráfica?

c) ¿Cuánto costará subir a 12 atracciones? ¿Y a 20?

a)



b) No pueden unirse porque una persona no puede montarse en media atracción o solo pagar medio viaje.

c) Subir a doce atracciones costará 5 € más un euro por atracción, es decir, 5 + 12 = 17 €.

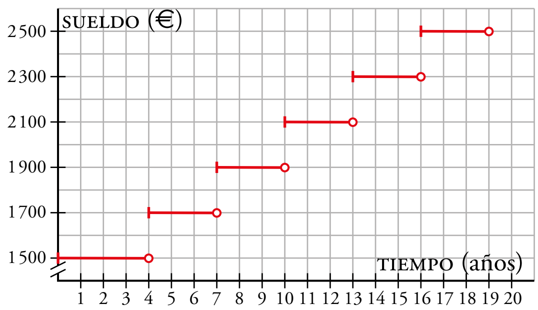
Subir a 20 atracciones costará 5 + 20 = 25 €.

6 **La gráfica de la abajo muestra el sueldo mensual de una persona en una empresa a lo largo de su vida.**

a) ¿Cuánto tiempo lleva la persona en la empresa cuando le suben el sueldo por primera vez?

b) ¿Cuánto gana a los 12 años de entrar? Suponiendo que se sigue la tendencia, ¿cuánto gana a los 20 años?

c) ¿Es una función continua?



a) Cuando le suben el sueldo por primera vez, la persona lleva en la empresa 4 años.

b) A los 12 años de entrar cobra 2 100 €, y a los 20, 2 500 €.

c) No, no es continua.

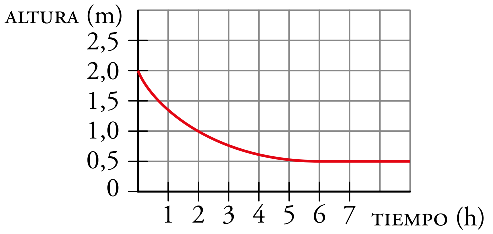
Página 159

7 **A un depósito cilíndrico de 2 m de alto lleno de agua se le hace un pequeño agujero a una distancia de 0,5 m de su base. El agua sale al principio con mucha presión, pero según se va vaciando el depósito, el agua va perdiendo presión hasta que, a las 4 h, el agujero rezuma solo un hilillo y no para hasta las 5 h.**

a) Representa la gráfica de la función:

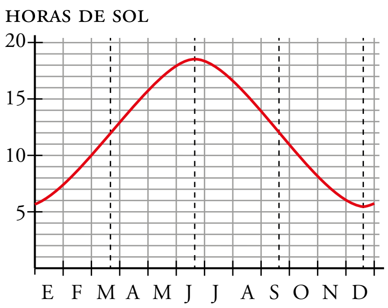
tiempo transcurrido* $\rightarrow$ *altura del agua

b) ¿A cuánto tiende la función? ¿En qué se traduce dicha tendencia?

a) 

b) La función tiende a 0,5 m, lo que quiere decir que la altura del agua en el depósito tiende a estabilizarse a 0,5 m.

8 **Esta gráfica muestra las horas de sol que hay a lo largo del año en Oslo (Noruega).**



a) ¿Es una función periódica? ¿Cuál es su periodo?

b) ¿Cuántas horas de sol hay en el solsticio de invierno? ¿Y en el de verano?

c) ¿Aproximadamente en qué momentos del año hay 14 horas de sol?

a) Sí, es periódica de periodo 1 año.

b) 5,5 h, aproximadamente, en el de invierno. En el de verano hay 18,5 h, aproximadamente.

c) A mitad de abril, y a finales de agosto y principios de septiembre.

3 EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN

Página 160

1 Indica cuáles de los siguientes pares de valores corresponden a la base y al área de algún rectángulo del ejemplo anterior:

a) Base: $x = 1$ cm $\rightarrow$ Área: $A = 39$ cm^2

b) $x = 5 \rightarrow A = 35$

c) $x = 22 \rightarrow A = 396$

d) $x = 42 \rightarrow A = -84$

La fórmula que deben cumplir para que sean como el ejemplo anterior es $A = x(40 - x)$.

a) $1 \cdot 39 = 39 = A \rightarrow$ Sí es igual.

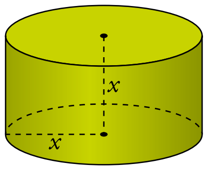
b) $5 \cdot 35 = 175 \neq 35 \rightarrow$ No es igual.

c) $22 \cdot 18 = 396 = A \rightarrow$ Sí es igual.

d) El área no puede ser negativa.

Página 161

2 **Imagina un cilindro cuya altura, x, sea igual al radio de su base.**



a) ¿Cuál es la expresión analítica de su volumen?

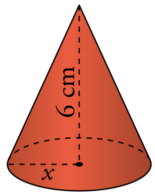
Recuerda que el volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

b) Obtén la expresión analítica del área del cilindro.

a) $V = \pi x^2 \cdot x \;\rightarrow\; V = \pi x^3$

b) $A_{\text{CILINDRO}} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \;\rightarrow\; A = 2\pi x^2 + 2\pi x^2 \;\rightarrow\; A = 4\pi x^2$

3 **Indica cuál es la expresión analítica del volumen de un cono sabiendo que su altura son 6 cm y el radio de su base es variable.**



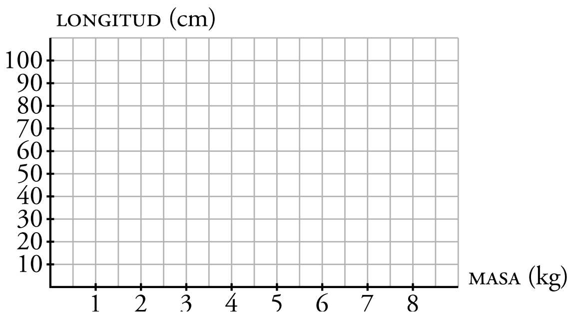
Recuerda que el volumen de un cono es 1/3 del área de la base por la altura.

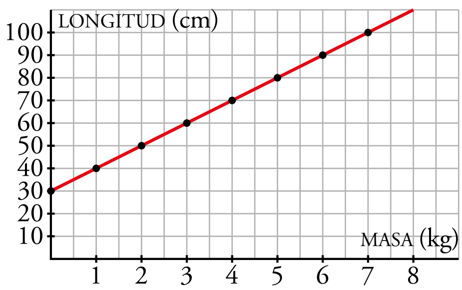
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi x^2 \cdot 6 \;\rightarrow\; V = 2\pi x^2$

4 **Un muelle mide 30 cm y se alarga otros 10 cm por cada kilogramo que se cuelga de él. Pero no se pueden colgar más de 7,5 kg.**

La función que relaciona la longitud, L, del muelle con la masa, m, que soporta es: $L = 30 + 10m$.

Represéntala en tu cuaderno en unos ejes cartesianos como estos:





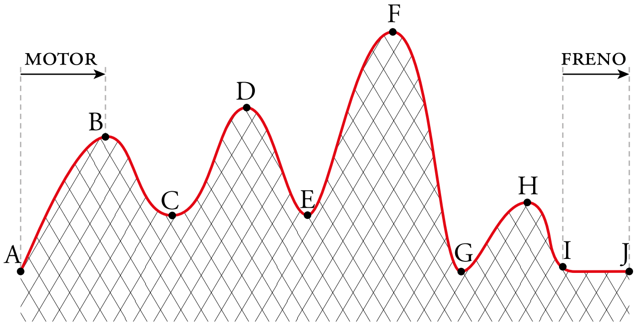
EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

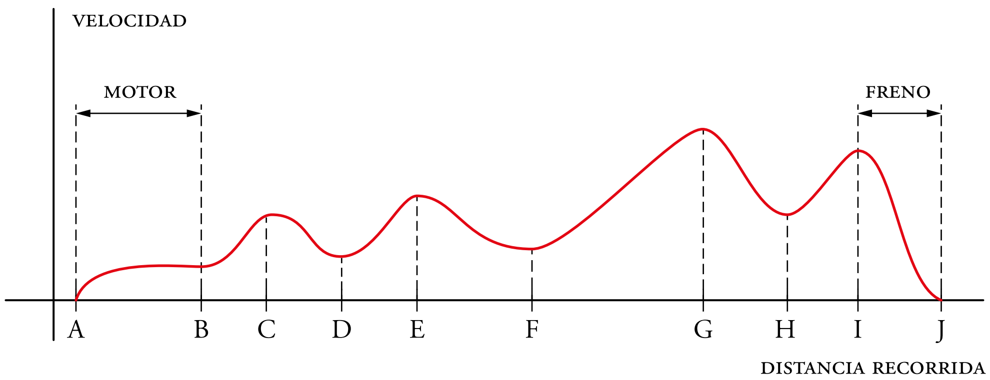
Página 162

1. Construcción de gráficos

Hazlo tú

- **Dibuja, de forma aproximada, la gráfica de la función *distancia recorrida - velocidad* para la montaña rusa de la derecha.**





2. Interpretación de dos gráficas sobre la misma cuadrícula

Hazlo tú

- **Las siguientes gráficas muestran la evolución de los medios de comunicación.**

  a) ¿En qué años coincide Internet con los demás?

  b) Indica cómo ha evolucionado Internet con respecto a los demás.

  a) Internet coincide con los diarios en 2010, y con las revistas en 2012.

  b) Los diarios se mantuvieron en un 40 %, aproximadamente, hasta el año 2008, momento en que empezaron a bajar hasta llegar a un 30 %, más o menos, en 2016.

  Las revistas se mantuvieron con pequeñas fluctuaciones hasta el año 2008 en un 55 %, aproximadamente. Después comenzaron a descender sin parar llegando a 2016 con un 40 %.

  La televisión se mantuvo durante todos esos años en torno al 90 %, con mínimas variaciones.

  Por su parte, Internet ha ido subiendo año tras años de manera prácticamente lineal desde un 5 % en 2008 hasta un 70 % en 2016.

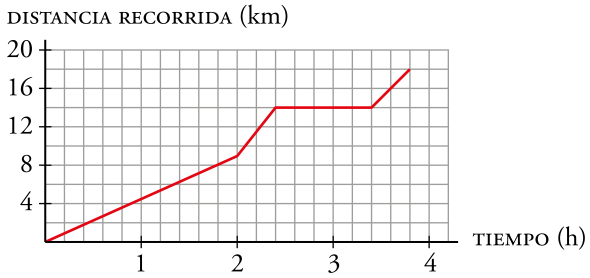
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 163

Practica

Interpretación de gráficas

1 **Ana sale a las 10:00 con la intención de subir una montaña para luego volver por el mismo camino hasta llegar al punto de partida. Esta gráfica muestra la distancia recorrida a lo largo de su caminata:**



a) ¿Cuánto tiempo dura la caminata? ¿A qué hora acaba de andar?

b) ¿Cuándo ha llegado a la cima?

c) ¿Qué distancia ha recorrido antes de parar a descansar? ¿Cuánto tiempo descansa?

d) ¿En qué intervalo de tiempo baja la cuesta más empinada?

e) Explica por qué la gráfica nunca es decreciente.

a) La caminita dura 4,8 h = 4 h 48 min. Acaba de andar a las 10 h + 3 h 48 min = 13 h 48 min.

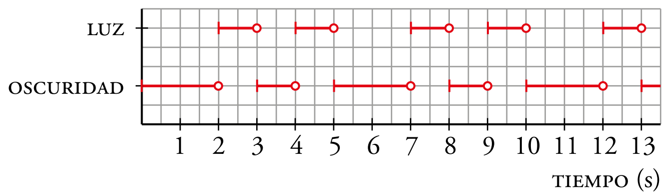
b) Ha llegado a la cima a las 2 horas; es decir, a las 12:00.

c) Ha recorrido 14 km antes de parar a descansar. Descansa durante 1 horas.

d) Entre las 2 h y las 2,4 h de empezar a caminar; es decir, entre las 12:00 y las 12:24 h.

e) Nunca es decreciente porque la distancia que camina aumenta constantemente, nunca puede decrecer.

2 **La luz de un faro que se enciende y se apaga varias veces en una secuencia de tiempo única (cada faro tiene la suya propia) se muestra en esta gráfica:**



a) ¿Cada cuánto tiempo se repite, es decir, cuál es el periodo de esta función?

b) La luz a los 6 s, ¿está encendida o apagada? ¿Y a los 7 s?

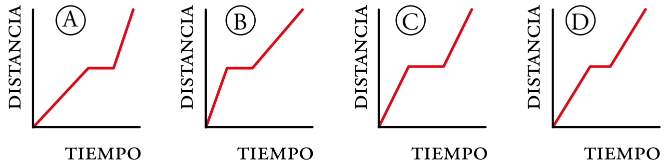
c) ¿Cómo estará la luz a los 15 s? ¿Y al minuto?

a) Se repite cada 5 segundos. Es una función periódica de periodo 5 segundos.

b) A los 6 segundos está apagada. A los 7 segundos se enciende.

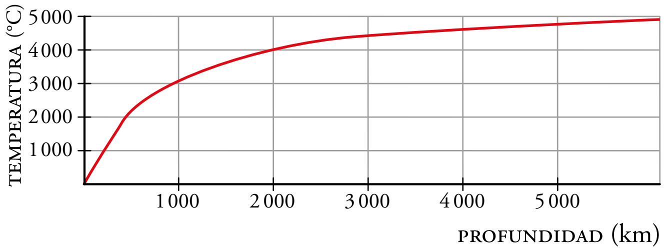
c) A los 15 segundos estará apagada. Al minuto también estará apagada.

3 **Guillermo sale corriendo de casa para no llegar tarde a clase. A medio camino para un rato a descansar y continúa andando tranquilamente hasta que llega. Indica qué gráfica muestra la distancia que recorre.**



La gráfica correspondiente es la Ⓑ: al principio, como Guillermo va corriendo, la recta tiene mucha inclinación, lo que significa que la distancia que recorre aumenta rápidamente; a mitad de camino se para, lo que indica que la distancia que recorre se mantiene constante, ni sube ni baja; por último, sigue andando, más despacio que al principio, por lo que aumenta la distancia pero a menor velocidad, por lo que la recta tiene menos pendiente.

4 **La temperatura de la Tierra va aumentando en función de la profundidad. Al principio aumenta de manera constante y poco a poco se estabiliza. La gráfica muestra una estimación de dicha variación:**



a) ¿Qué temperatura hay a 1 500 km de profundidad, aproximadamente? ¿Y a 3 000 km?

b) Estima la temperatura en el centro de la Tierra (6 371 km).

c) Suponiendo que en el primer tramo la temperatura crece de forma constante unos 20 °C/km, ¿a qué profundidad se alcanzan 1 000 °C? ¿Y 2 000 °C?

d) El punto de fusión del hierro es de 1 538 °C. ¿Desde qué profundidad podemos asegurar que el hierro se encuentra en estado líquido?

a) A 1 500 km, unos 3 500 °C. A 3 000 km, unos 4 500 °C.

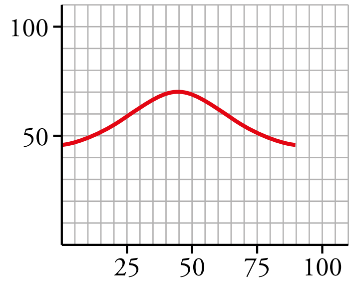
b) La función parece que tiende a estabilizarse a 5 000 °C, por lo que estimamos que en el centro de la Tierra hará esa temperatura.

c) $\dfrac{1000}{20} = 50 \;\rightarrow\;$ A 50 km se alcanzan 1 000 °C, aproximadamente.

$\dfrac{2\,000}{20} = 100 \;\rightarrow\;$ A 100 km se alcanzan 2 000 °C, aproximadamente.

c) $\dfrac{1538}{20} = 76{,}9 \;\rightarrow\;$ A partir de los 76,9 km.

5 **Mercurio tarda 88 días en completar su órbita alrededor del Sol. Su distancia al Sol oscila entre 70 y 46 millones de kilómetros. Esta gráfica muestra su distancia al Sol:**

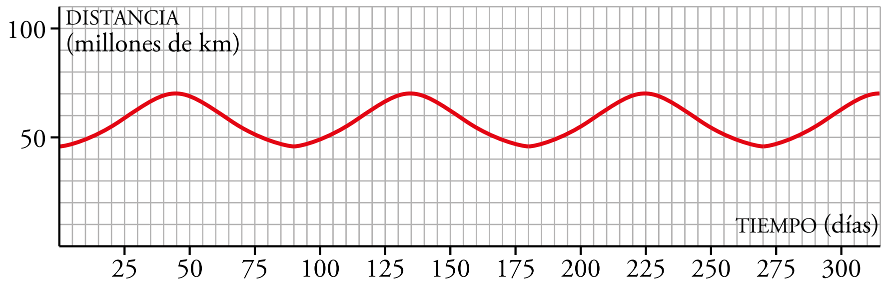


a) Copia y completa la gráfica para 300 días.

b) Estima su distancia al Sol dentro de dos años terrestres.

c) Cuando comienza la gráfica, Mercurio se encuentra a 46 millones de kilómetros del Sol. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que está a 60 millones de kilómetros?

a)



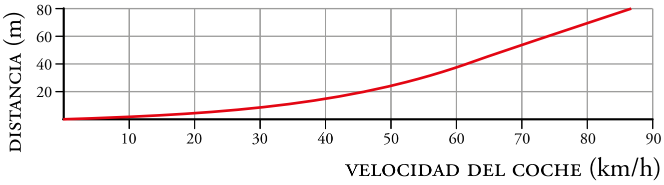
b) 2 años = 365 · 2 = 730 días.

730 días = 88 · 8 + 26 → En el día 730 estará en la misma posición que en el día 26.

Mirado la gráfica, estimamos que su distancia al sol dentro de dos años será de 62 millones de kilómetros.

c) Mirando la gráfica vemos que pasan 25 días, pues la función pasa por el punto (25, 60).

6 **La siguiente gráfica muestra la distancia que recorre un vehículo desde que presiona el freno hasta que para, en función de la velocidad que lleva:**



a) Aproximadamente, ¿cuántos metros recorre un vehículo al frenar si va a 55 km/h?

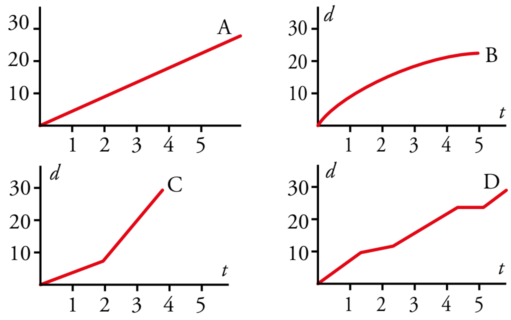
b) ¿A qué velocidad iba un vehículo que ha necesitado 50 m para frenar?

a) Aproximadamente, 30 metros.

b) Aproximadamente, a 65 km/h.

Página 164

7 **Las siguientes gráficas nos muestran la distancia recorrida por cuatro senderistas en función del tiempo que dura su marcha:**



a) Describe el ritmo de cada senderista.

b) ¿Quién recorre menos camino?

c) ¿Quién camina durante menos tiempo?

d) ¿Quién alcanza más velocidad?

e) Inventa una gráfica correspondiente a una senderista que tarda lo mismo que B, recorre la misma distancia que C y descansa durante una hora a mitad de camino.

a) El montañero A lleva un ritmo constante.

El montañero B va decreciendo el ritmo según avanza el tiempo.

El montañero C comienza a un ritmo y a las dos horas acelera hasta que se para a las cuatro horas.

El montañero D va alternando un ritmo rápido con un ritmo más lento.

b) El montañero B recorre menos camino, recorre 20 km aproximadamente.

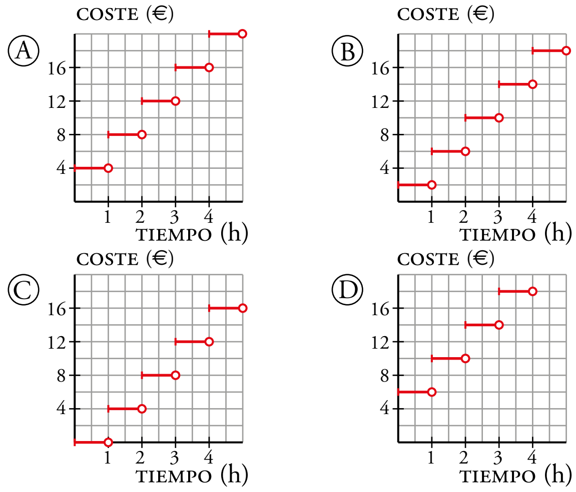
c) El montañero C camina durante menos tiempo, camina casi cuatro horas.

d) Alcanza más velocidad el montañero C.

e)

8 **La entrada a un parque de atracciones cuesta 2 €, y la pulsera para subir a todas las atracciones, 4 € cada hora o fracción (es decir, que te cobran la hora completa aunque la uses solo un rato).**

a) ¿Cuál de estas gráficas representa mejor el coste de entrar y montar en las atracciones?

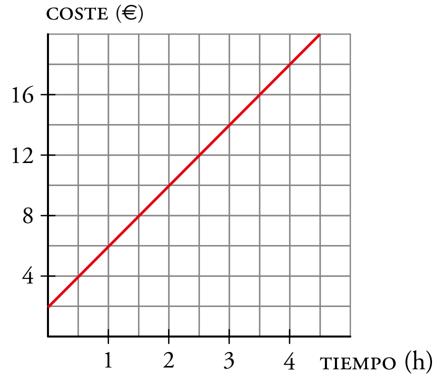


b) Dibuja en tu cuaderno una gráfica que represente el coste si cobran exactamente por el tiempo que has utilizado la pulsera.

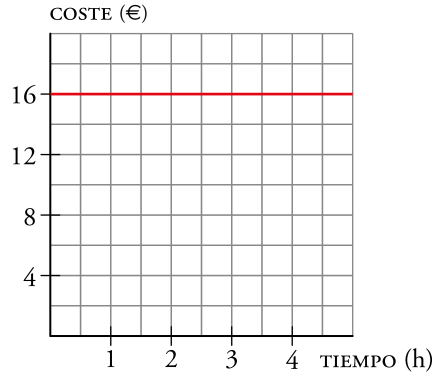
c) Dibuja otra que represente el coste de un bono en el que pagas 16 € para entrar y montarte en todas las atracciones el tiempo que quieras hasta que cierre el parque.

a) La gráfica Ⓓ, ya que por estar la 1ª hora te cobran 2 € de entrada más 4 € de la pulsera; es decir 6 €. Después, el precio de cada hora siguiente sube de 4 € en 4 €.

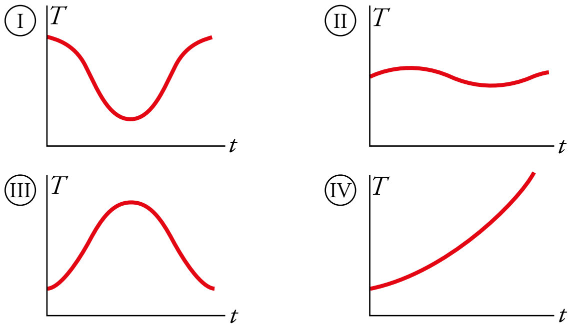
b)



c)



9 **Estas cuatro gráficas representan la temperatura máxima diaria (T) de cuatro ciudades, a lo largo del tiempo (t), durante un cierto año:**



a) A la vista de las gráficas, ¿en cuál de estas cuatro ciudades oscila en menor medida la temperatura?

b) Una gráfica corresponde a una ciudad de nuestro país, y otra, a una ciudad de nuestras antípodas. ¿Qué gráficas son? Razona tu respuesta.

c) Una gráfica es absurda. ¿Cuál es? ¿Por qué?

d) Elige una escala adecuada para cada variable y gradúa cada uno de los ejes en tu cuaderno.

e) ¿Cuál es el dominio de las cuatro gráficas? A la vista de los recorridos de I y II, ¿qué puedes decir del clima de estas ciudades?

f) Dibuja una gráfica correspondiente a un lugar en el desierto del Sahara y otra a uno en la Antártida.

a) En la ciudad b.

b) Las gráficas a y c, porque cuando en una la temperatura es alta en la otra es baja y al revés.

c) La grafica d es absurda, porque la temperatura solo crece.

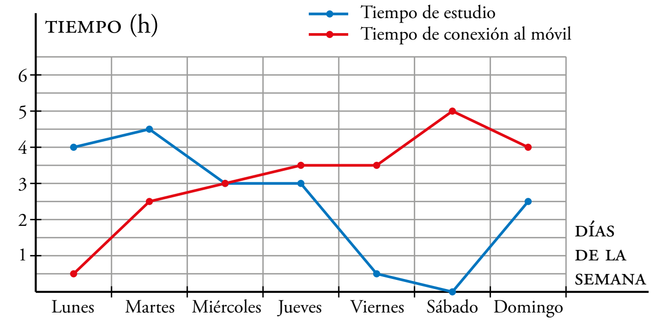
d) Para la variable tiempo, podemos hacer corresponder cada cuadradito con un mes.

Para la variable temperatura, cada cuadradito pueden ser 2 ó 5 grados centígrados.

e) El dominio es el intervalo 1-12 (o de Enero a Diciembre).

Son ciudades que no tienen inviernos muy fríos, ya que en ningún caso se alcanzan temperaturas bajo cero. La ciudad a tiene más variación entre sus temperaturas. En la ciudad b, la temperatura no varía demasiado a lo largo de los meses.

10 **Arancha dedica demasiado tiempo a mirar el móvil. Para controlarse, decide anotar minuciosamente durante una semana el número de sus horas de estudio y del tiempo que está con el móvil. Estos son los resultados:**



a) ¿Qué día ha estudiado más? ¿Y menos?

b) ¿Cuándo ha pasado más tiempo con el móvil?

c) ¿Qué día hay más diferencia entre los tiempos dedicados a cada actividad?

d) ¿Algún día ha estado con el móvil el mismo tiempo que estudiando? ¿Cuándo?

e) ¿Qué día ocupa más tiempo entre ambas actividades?

a) Ha estudiado más el martes, y menos, el sábado.

b) Ha pasado más tiempo con el móvil el sábado.

c) El sábado, pues hay 5 horas de diferencia.

d) Sí. El miércoles.

e) Lunes: 0,5 + 4 = 4,5 h. Martes: 2,5 + 4,5 = 7 h.

Miércoles: 3 + 3 = 6 h. Jueves: 3,5 + 3 = 6,5 h. Viernes: 3,5 + 0,5 = 4 h.

Sábado: 5 + 0 = 5 h. Domingo: 4 + 2,5 = 6,5 h.

El martes es el día que ocupa más tiempo con ambas actividades.

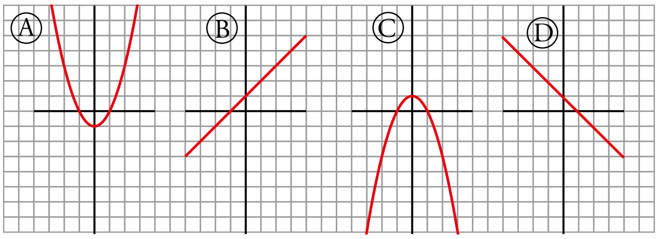
Página 165

Relaciones gráficas y expresiones analíticas

11 **Relaciona cada gráfica con una de estas expresiones analíticas:**

i) $y = x + 1$ **ii)** $y = 1 - x^2$

iii) $y = x^2 - 1$ **iv)** $y = -x + 1$



i) → Ⓑ ii) → Ⓒ iii) → Ⓐ iv) → Ⓓ

12 **a) Sabiendo que la libra es una unidad de peso que equivale a 0,45 kg, copia y completa esta tabla:**

x (LIBRAS)	0,5	1	1,5	2	3	4
y (KILOS)		0,45				

b) Escribe la expresión analítica que convierte libras en kilos.

c) Escribe la que convierte kilos en libras.

d) Representa en unos ejes coordenados las dos expresiones analíticas anteriores.

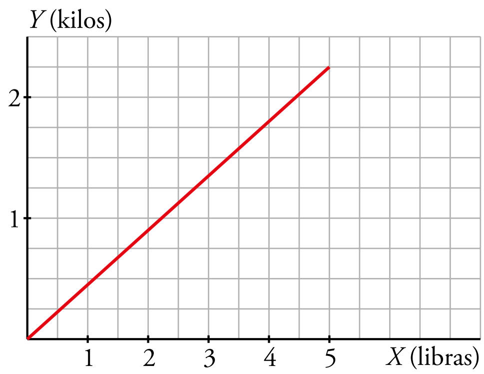
a)

x (LIBRAS)	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**	**4**	***x***
y (KILOS)	0,225	**0,45**	0,675	0,9	1,35	1,8	0,45*x*

b) $y = 0{,}45x \rightarrow 0{,}45x - y = 0$

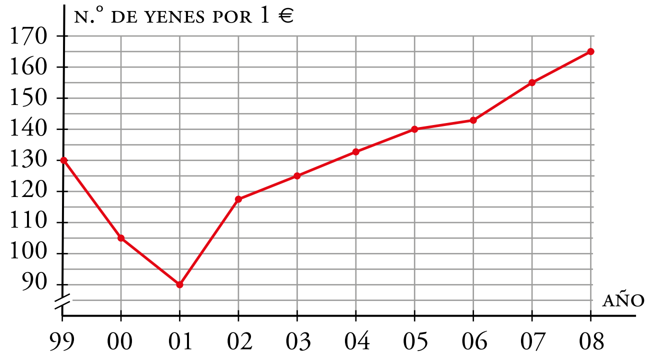
c) $\dfrac{y}{0{,}45} = x \rightarrow 0{,}45x - y = 0$

d)



Son la misma gráfica.

13 **La siguiente gráfica muestra la evolución del precio del yen (moneda japonesa) en el primer día de los años desde 1999 a 2008:**



Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas corresponden al cambio de euros a yenes en los años 1999, 2003, 2005 y 2008. Es decir, dado un número de euros (*e*), obtener directamente el número de yenes (*y*) correspondiente.

a) $y = \frac{e}{130}$ b) $y = 125e$ c) $y = 140e$

d) $y = \frac{e}{90}$ e) $y = 130e$ f) $y = e - 155$

g) $y = 165e$ h) $y - e = 90$ i) $y = 90e$

- Año 1999 $\rightarrow$ e)
- Año 2003 $\rightarrow$ b)
- Año 2005 $\rightarrow$ c)
- Año 2008 $\rightarrow$ g)

14 **Indica, como se hace en el ejemplo, la expresión analítica que corresponde a cada una de las siguientes situaciones:**

- **¿Cuánto tiempo de viaje nos queda si vamos a 120 km/h hacia nuestro destino, que está a x km?**

$$t = \frac{x}{120}$$

a) Si una garrafa vale 1,30 € y el litro de mosto cuesta 0,90 €, ¿cuánto cuesta una garrafa con x litros de mosto?

b) ¿Cuál es el área de un triángulo de 10 cm de base y x cm de altura?

c) Si una botella de 5 litros tiene 1,5 litros de agua en su interior, ¿cuántos litros caben todavía después de echar x litros?

d) En una carrera de 10 km, ¿a qué distancia me encontraré de la meta después de correr a 8 km/h durante x horas?

e) ¿Cuál es el volumen de un ortoedro de base cuadrada de lado x cm y 20 cm de altura?

f) Si la temperatura de un líquido desciende 3 °C cada dos minutos, ¿qué temperatura tendrá un café t min después de sacarlo del microondas a 70 °C?

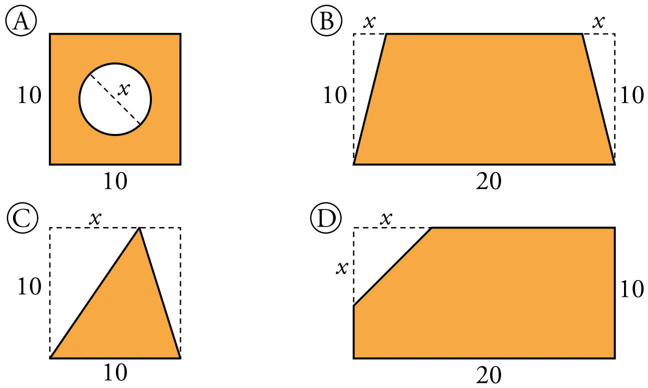
g) Si 60 folios tienen 1,2 cm de grosor, ¿qué grosor tiene una pila de x folios?

a) $y = 1,3 + 0,9x$ b) $A = \frac{10 \cdot x}{2} = 5x$ c) $y = 3,5 - x$

d) $e = 10 - 8x$ e) $V = 20x^2$ f) $T = 70 - \frac{3}{2}t$

g) $g = \frac{1,2}{60} \cdot x$

15 **El área de la parte coloreada de las siguientes figuras se puede escribir en función del parámetro x:**



¿Cuál de estas expresiones analíticas corresponde al área de cada una de ellas?

a) $A = 100 - x^2$	**b)** $A = \dfrac{10x}{2}$	**c)** $A = 200 - \dfrac{x^2}{2}$
d) $A = 100 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \pi$	**e)** $A = 200 - 10x$	**f)** $A = 200 - 5x$
g) $A = 50$	**h)** $A = (10 - x)(20 - x)$	**i)** $A = 200 - x^2$

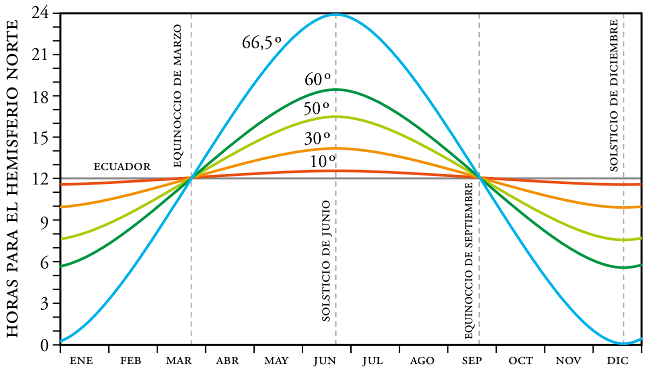
Ⓐ → d) Ⓑ → e)

Ⓒ → g) Ⓓ → c)

Página 166

Resuelve problemas

16 **En esta gráfica se muestra la duración del día (en horas) según la latitud:**



a) ¿Cuántas horas de sol tiene como máximo una persona que vive en el paralelo 60°? ¿Y como mínimo?

b) En el ecuador, ¿varían las horas de sol según el mes?

c) ¿Qué ocurre en el paralelo 66,5° el 21 de junio? ¿Y el 21 de diciembre? Busca una ciudad que se encuentre más o menos en ese paralelo.

d) ¿Cuántas horas de sol tienen en cualquier lugar del planeta en los equinoccios de primavera y otoño?

e) Busca información sobre el número de horas de sol en el Polo Norte a lo largo del año.

a) Como máximo, 18 horas. Como mínimo, casi 6 horas.

b) No, no varían.

c) El 21 de junio no se pone el sol. El 21 de diciembre no sale el sol. Por ejemplo, la ciudad noruega de Bodø.

d) Tienen 12 horas de sol.

e) En el polo Norte, el sol sale y se pone solo una vez por año. Por tanto, la mitad del año es de día y la otra mitad, de noche.

17 **Lucía observó un delfín durante un rato. Al principio, el delfín estaba en la superficie tomando aire. Luego se sumergió hasta el fondo. Desde el fondo invirtió 8 min en subir para tomar aire otra vez. Tres minutos después estaba de nuevo en el fondo. Lucía se percató de que este proceso era muy regular.**

a) ¿Dónde estaba el delfín al cabo de media hora? ¿Y a la hora?

b) Si una de cada tres veces que desciende al fondo caza un pez, ¿cuántos habrá cazado en 1 hora?

c) Representa de manera aproximada la gráfica de la profundidad a la que está el delfín en función del tiempo durante la primera media hora.

a) El delfín emplea, cada vez, 3 min en bajar y 8 min en subir:

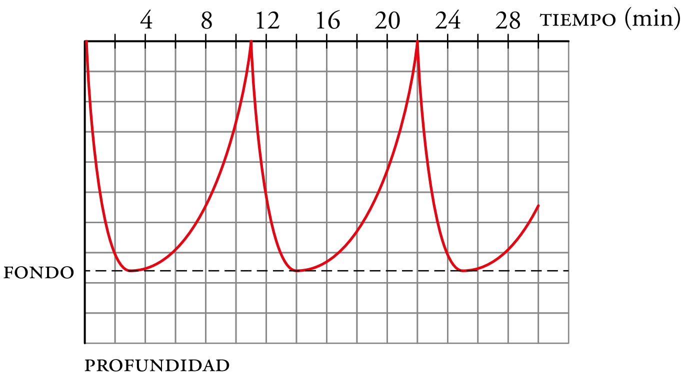
$(3 + 8) + (3 + 8) + (3 + 5) = 30$

A los 30 minutos el delfín está subiendo hacia la superficie.

b) $1 \text{ h} = 60 \text{ min} \rightarrow 60 \text{ min} = 5 \cdot 11 + 5$

En 1 h ha bajado al fondo 6 veces. Por tanto, ha cazado 2 peces.

c)



18 **En la factura mensual del gas de una ciudad se paga una cantidad fija de 15 € y 0,75 € más por cada metro cúbico consumido.**

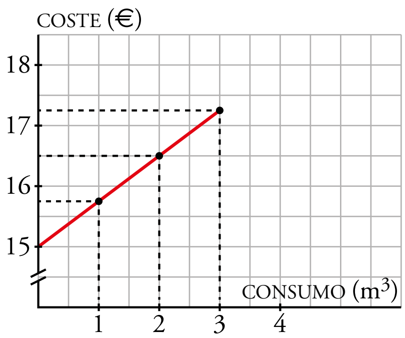
a) ¿Cuánto se paga por consumir 15 m^3 en un mes?

b) Dibuja la función: *metros cúbicos consumidos-coste.*

c) Escribe la expresión analítica que indique el importe de la factura en función del volumen de gas consumido.

a) Por 15 m^3 se pagan $15 + 0{,}75 \cdot 15 = 26{,}25$ €

b)



c) $y = 15 + 0{,}75x$, donde x son los metros cúbicos consumidos e y es el importe total de la factura.

19 **La tabla recoge el perímetro craneal de un bebé:**

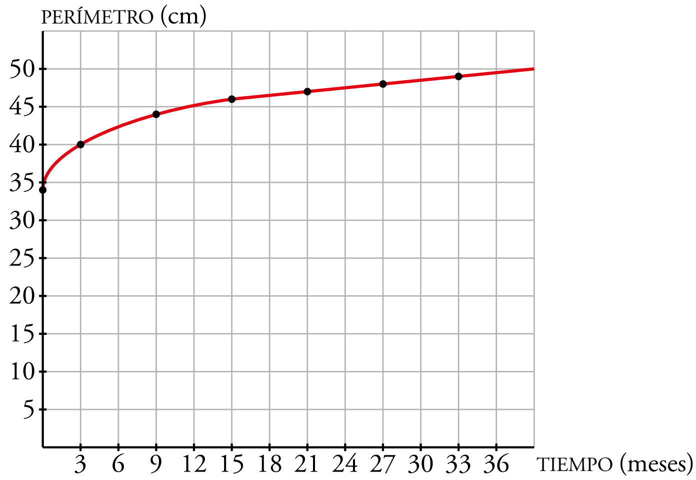
TIEMPO (meses)	0	3	9	15	21	27	33
PERÍMETRO (cm)	34	40	44	46	47	48	49

a) Haz una gráfica relacionando estas dos variables.

b) ¿Qué tendencia se observa?

c) Estima el perímetro craneal de un niño de 3 años.

a)



b) El tamaño del cráneo parece estabilizarse alrededor de los 50 cm.

c) Medirá unos 50 cm aproximadamente.

20 **Los cestillos de una noria suben y bajan a medida que la noria gira. Estos son los datos de una cesta que sube desde el punto más bajo al más alto:**

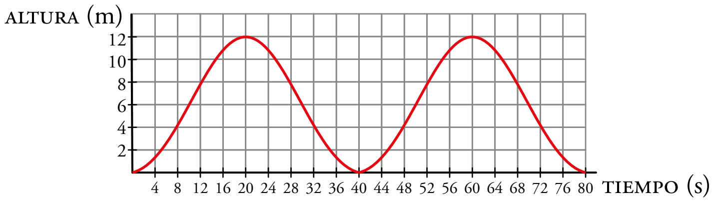
TIEMPO (s)	0	4	8	12	16	20
ALTURA (m)	0	1,2	4,1	7,9	10,8	12

a) Representa la gráfica de la función *tiempo-altura* de uno de los cestillos a lo largo de 80 segundos.

b) ¿Es una función periódica? ¿A qué tiempos corresponden sus máximos y mínimos relativos?

c) ¿A qué altura estará la cesta a los 150 segundos?

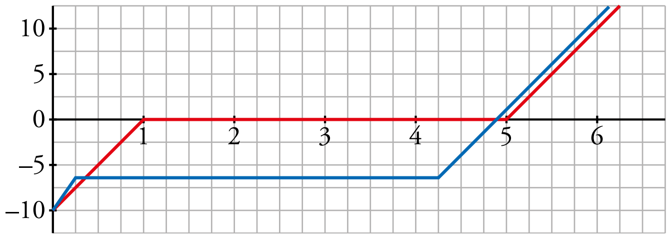
a)



b) Sí, es periódica de periodo 40. Los máximos y mínimos están en los múltiplos de 20.

c) $150 = 40 \cdot 3 + 30 \;\rightarrow$ A los 150 s estará a la misma altura que a los 30 segundos. Es decir, a unos 6 m.

21 **Cuando nieva, se echa sal en las calles. Al echarle sal, el hielo se derrite a menor temperatura (a unos –6 °C). Hasta que un bloque de hielo no está derretido completamente, no empieza a aumentar su temperatura. Estas son las gráficas *tiempo-tempertura* de un bloque de hielo (luego agua) con sal y de otro sin sal:**



a) ¿Cuál corresponde a cada uno?

b) ¿Cuánto tiempo tarda cada uno en derretirse?

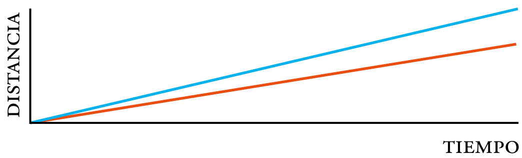
c) ¿Tendría sentido echar sal a la nieve con una temperatura ambiente de –12 °C? ¿Por qué?

a) La gráfica azul es el bloque de hielo con sal.

b) Los dos tardan 4 horas en derretirse.

c) No tendría sentido, ya que a esa temperatura el hielo no se derretiría aunque echásemos sal.

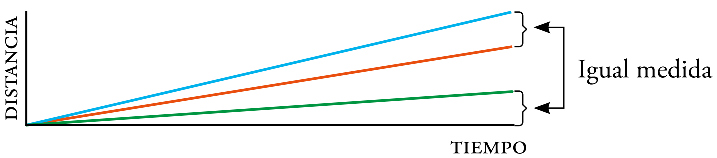
22 **Ana camina sobre el pasillo móvil de un aeropuerto y Marcos prefiere ir andando sobre el suelo. El siguiente gráfico permite comparar sus movimientos:**



Si ambos caminan igual de rápido, representa otra recta que muestre a Ana quieta sobre el pasillo móvil.

En el enunciado, la recta roja representa a Marcos y la azul, a Ana.

Si ambos caminan a la misma velocidad, la diferencia de alturas entre ambas rectas en cada punto la aporta el movimiento del pasillo móvil. Por tanto:



La recta verde representa a Ana quieta sobre el pasillo móvil.

Página 167

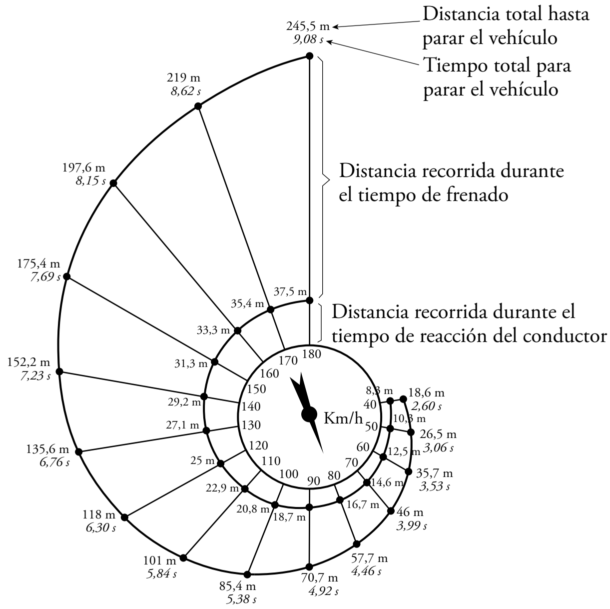
Resuelve: un poco más difícil

23 **Para hallar la distancia aproximada necesaria para detener un vehículo en movimiento, se suman:**

— La que recorre hasta que el conductor comienza a frenar (distancia de tiempo de reacción).

— La que recorre mientras frena (distancia de frenado).

Esto se refleja en el siguiente diagrama de caracol.



Fuente: La Prevention Routière. Ministère de l'Éducation de la Recherche de la Technologie. Francia.

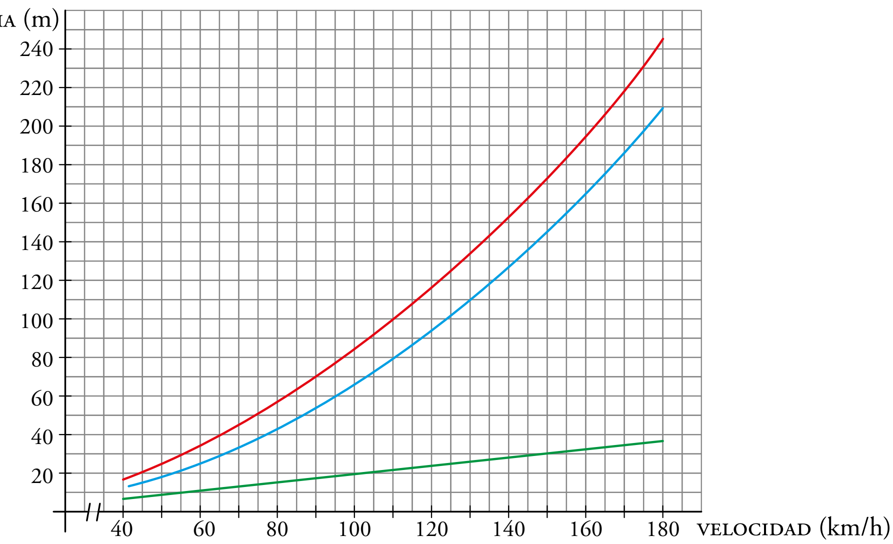
a) Representa en tu cuaderno, sobre los mismos ejes de coordenadas, las siguientes funciones:

- **Velocidad - Distancia de reacción (en verde)**
- **Velocidad - Distancia de frenado (en azul)**
- **Velocidad - Distancia total recorrida (en rojo)**

b) Halla, a partir de la gráfica roja, la velocidad que llevaba un coche que recorrió 160 m en su frenada.

c) ¿A qué velocidad iba un coche cuya distancia recorrida durante el tiempo de frenado fue de 150 m?

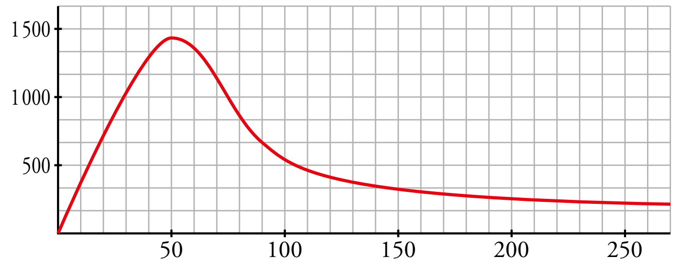
a)

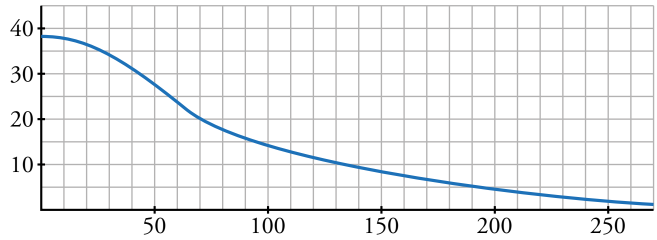


b) Llevaba unos 145 km/h.

c) Llevaba unos 153 km/h.

24 **En 2012, Felix Baumgartner batió el récord de velocidad en caída libre, lanzándose desde 39 000 m de altura. Estas son las gráficas de la velocidad y de la altura, respectivamente, que llevó durante los 250 primeros segundos desde que inició el descenso:**





a) ¿En qué momento cogió más velocidad?

b) ¿Cuándo rompió la velocidad del sonido? Recuerda que son 300 m/s. Pásalo a km/h.

c) A una altura de 40 km, la atmósfera es muy poco densa, por lo que casi no hay rozamiento. ¿A qué altura empieza a frenarle la atmósfera? ¿A qué altura se empieza a estabilizar?

d) ¿Cómo es la gráfica de la altura cuando la velocidad se estabiliza, más recta o más curva?

a) Cogió máxima velocidad a los 50 segundos.

b) Pasamos la velocidad del sonido a km/h:

$$300 \text{ m/s} = 300 \, \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 1\,080 \text{ km/h}$$

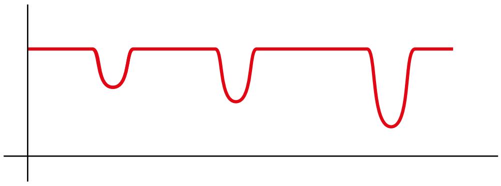
Sobrepasa esta velocidad a los 30 segundos aproximadamente.

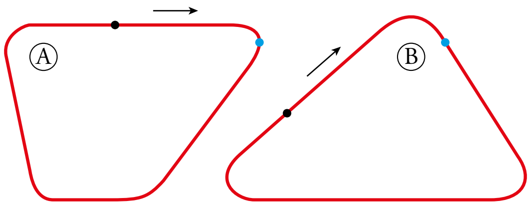
c) El saltador comienza a descender su velocidad a los 50 segundos. En ese instante está a una altura aproximada de 27 kilómetros.

Comienza a estabilizarse alrededor del segundo 100, y está a una altura de 14 metros.

d) La gráfica de la altura es más recta.

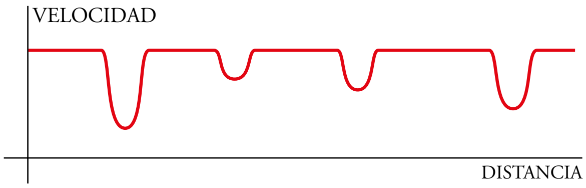
25 **La gráfica muestra cómo varía la velocidad de un coche al recorrer uno de los circuitos dibujados abajo:**





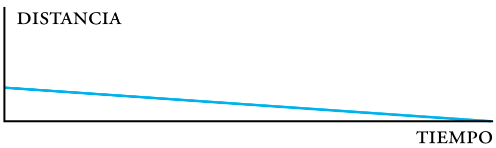
¿A cuál corresponde? Haz la gráfica del otro.

Corresponde al circuito B. Al llegar a la curva, el coche debe bajar su velocidad, tanto más cuanto más cerrada es la curva. Esto se aprecia en la gráfica: tres frenazos, cada uno más fuerte que el anterior, como corresponde a los tres ángulos del circuito B en el orden en que se toman desde la salida, S.



26 **Mira el problema 22 anterior y representa la recta que muestre a Marcos andando en sentido contrario sobre el pasillo móvil. ¿Avanzaría o retrocedería?**

Marcos avanzaría. Su velocidad sería la diferencia de alturas entre la recta roja (movimiento de Marcos) y la verde (movimiento del pasillo). Es decir, avanzaría a la misma velocidad que el pasillo pero en sentido opuesto. Así:



Reflexiona

27 **¿Verdadero o falso?**

a) En una función puede haber dos puntos distintos con la misma ordenada.

b) En una función puede haber dos puntos distintos con la misma abscisa.

c) Una función periódica de periodo T también tiene periodo $2T$.

d) Una función periódica y continua no puede ser siempre creciente.

e) Si una función es creciente, necesariamente es continua.

a) Verdadero.

b) Falso.

c) Verdadero.

d) Verdadero

e) Falso.

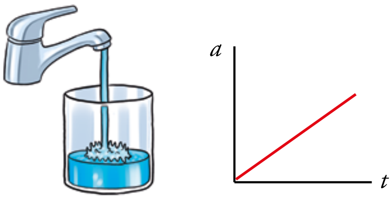
Página 168

Reflexiona y decide

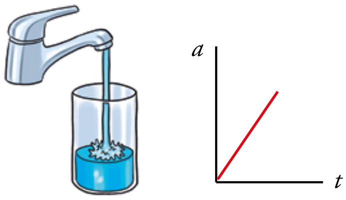
- **Al abrir un grifo sobre un recipiente, la altura (*a*) que alcanza el líquido está en función (depende) del tiempo transcurrido (*t*).**

  Y al representar esa función vemos que cada recipiente tiene una gráfica característica.

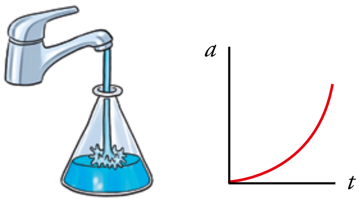
I



II



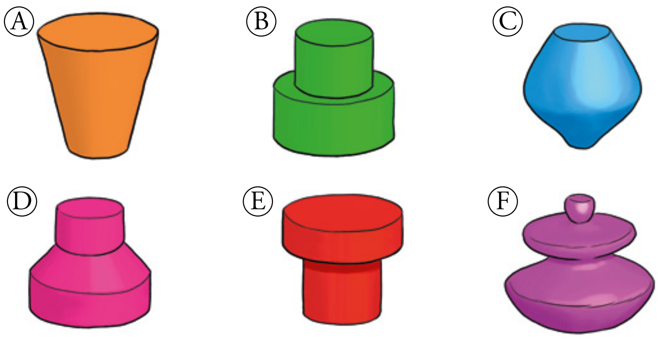
III

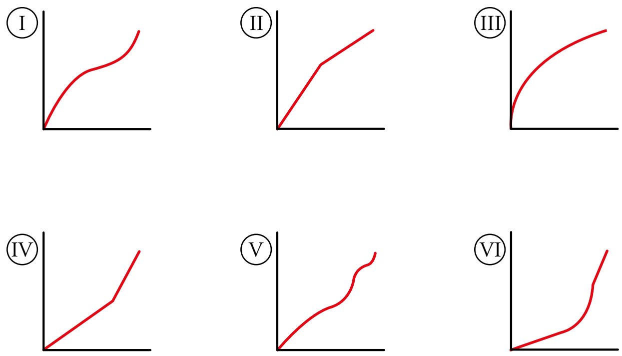


— En los dos primeros recipientes, el nivel sube uniformemente, aunque en el segundo más rápido que en el primero.

— En el tercer recipiente, el nivel sube despacio al principio y rápido al final.

Asocia cada uno de estos recipientes con su gráfica:



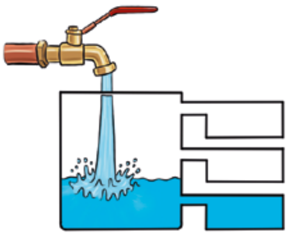


A – III; B – IV; C – I; D – VI; E – II; F – V

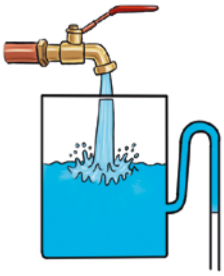
Observa y representa

- **Dibuja, en cada caso, la gráfica que relaciona la altura que alcanza el agua en el recipiente con el tiempo transcurrido:**

a)

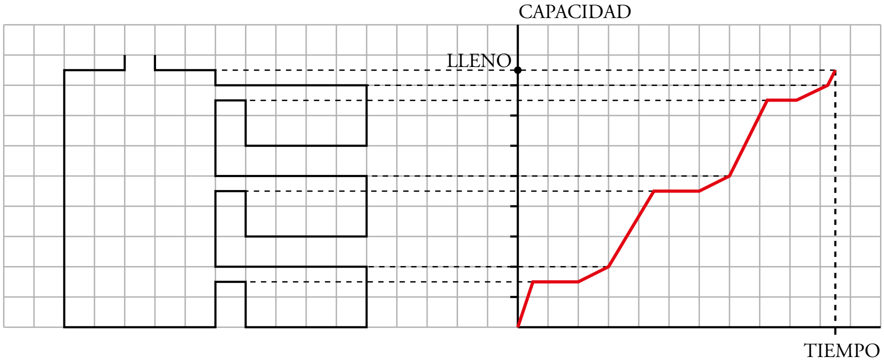


b)

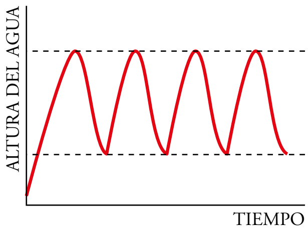


NOTA: Antes de afrontar el apartado b), infórmate: ¿qué es una fuente vauclusiana?

a)



b) Las fuentes vauclusianas se caracterizan por brotar intermitentemente, unas veces echan agua y otras no, y además lo hacen en periodos de tiempo bastante regulares. Estos fenómenos geológicos se deben a la existencia de alguna cueva o depósito subterráneo con un conducto de salida que actúe de sifón y para recargarse requiere que el agua alcance un determinado nivel.



Puesto que cuando el tanque se llena hasta arriba el tubo también se llena y empieza a salir el agua del tanque. Esto ocurre hasta que el nivel del agua alcanza la entrada del tubo (efecto sifón). En ese momento deja de salirse agua y comienza a llenarse de nuevo el tanque.

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Dos hermanos rancheros se reparten una herencia a partes iguales. Nuria invierte su parte en la compra de una manada de 80 caballos. Carlos invierte la suya en un rebaño de 100 vacas. Si un caballo cuesta 150 € más que una vaca, ¿a cuánto ascendía la herencia?**

$$\left.\begin{aligned} 80 \text{ caballos} &= 80 \text{ vacas} + 80 \cdot 150 \text{ €} = 80 \text{ vacas} + 12\,000 \text{ €} \\ 80 \text{ caballos} &= 100 \text{ vacas} = 80 \text{ vacas} + 20 \text{ vacas} \end{aligned}\right\}$$

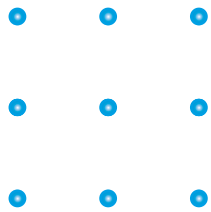
Por tanto, 20 vacas = 12 000 €.

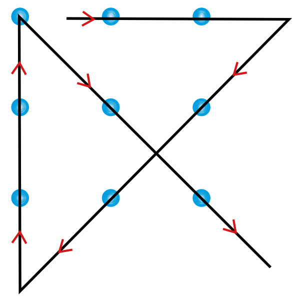
1 vaca cuesta 12 000 : 20 = 600 €.

1 caballo cuesta 600 + 150 = 450 €.

$$\left.\begin{aligned} &100 \text{ vacas valen } 60\,000 \text{ €}. \\ &80 \text{ caballos valen } 60\,000 \text{ €}. \end{aligned}\right\} \text{ La herencia asciende a } 60\,000 + 60\,000 = 120\,000 \text{ €}.$$

- **Pasa por encima de estos nueve puntos mediante una línea quebrada de cuatro segmentos.**





- **a) Estás junto a una fuente y dispones de una jarra de 5 litros y de otra de 3 litros. ¿Cómo te las arreglarías para medir exactamente un litro de agua?**

b) Si ahora dispones de dos cántaros, uno de 7 litros y otro de 5, ¿cómo harías para medir 4 litros de agua?

c) ¿Y cómo medirías 3 litros de agua si tuvieras un cántaro de 9 litros y otro de 5 litros?

a)

3		5
3	3	0
0		3
3	2	3
1		5

Se llena el de 3 litros.	Hay 3 y 0 litros.
El contenido de la de 3 litros se vierte en la de 5 litros.	Hay 0 y 3 litros.
Se vuelve a llenar la de 3 litros.	Hay 3 y 3 litros.
Con el contenido de la de 3 se completa la de 5 litros.	Hay 1 y 5 litros.

En la jarra de 3 litros queda 1 litro, lo que queríamos medir.

b)

5		7
0	5	7
5		2
0	2	2
2		0
2	3	7
5		4

Se llena el de 7 litros.	Hay 0 y 7 litros.
Con el contenido del de 7 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 2 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 2 litros.
Se vierten los 2 litros que hay en el de 7 en el de 5 litros.	Hay 2 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 7 litros.	Hay 2 y 7 litros.
Con el de 7 litros se completa el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.

Así, en el cántaro de 7 litros quedan los 4 litros que queríamos medir.

c)

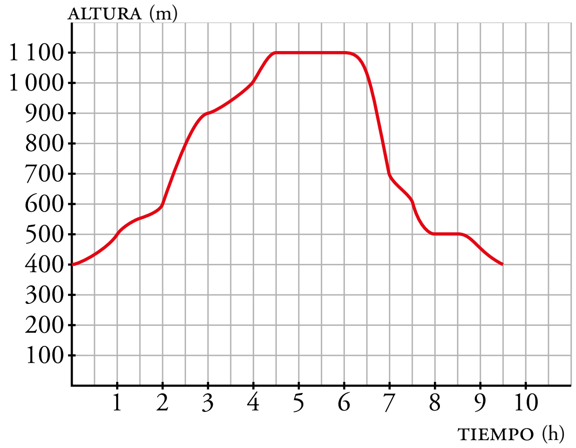
5		9
0	5	9
5		4
0	4	4
4		0
4	1	9
5		8
0	5	8
5		3

Se llena el de 9 litros.	Hay 0 y 9 litros.
Con el contenido del de 9 se llena el de 5 litros.	Hay 5 y 4 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 4 litros.
Se vierten los 4 litros que hay en el de 9 en el de 5 litros.	Hay 4 y 0 litros.
Se vuelve a llenar el de 9 litros.	Hay 4 y 9 litros.
Se completa el de 5 con un litro del de 9 litros.	Hay 5 y 9 litros.
Se vacía el de 5 litros.	Hay 0 y 8 litros.
Se llena el de 5 litros con el contenido del de 9 litros.	Hay 5 y 3 litros.

En el cántaro de 9 litros quedan los 3 litros que queríamos medir.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Esta gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar alcanzada por Ana y Miguel al realizar una ascensión a una montaña:**



a) ¿Qué variables intervienen? ¿Qué escala se utiliza para cada variable? ¿Cuál es el dominio de definición de esta función?

b) ¿Cuánto ha durado la marcha? ¿Desde qué altura empiezan a andar? ¿Qué altura máxima han alcanzado? ¿Cuándo han parado a comer?

c) ¿En qué intervalo de tiempo suben más rápido? ¿En cuál bajan más rápido?

d) Haz una descripción del transcurso de la marcha.

a) Intervienen las variables tiempo y altura. La variable tiempo utiliza un cuadradito para media hora; la variable altura, un cuadradito para 100 metros. El dominio de la función es 0 – 9,5.

b) La marcha ha durado 9 horas y media. Comienzan a 400 metros de altura. Alcanzan una altura máxima de 1 100 metros. Han parado a comer cuando llevaban 4 horas y media de camino, al llegar a la cima.

c) Suben más rápido entre las 2 y las 3 horas del comienzo. Bajan más rápido entre las 6 y las 7 horas.

d) Comienzan su marcha a 400 metros. En dos horas han ascendido hasta los 600 metros, y en ese momento comienzan a subir más rápido, y mantienen ese ritmo durante una hora, hasta llegar a los 900 metros de altura. Entonces disminuyen la velocidad y continúan su ascensión dos horas más hasta llegar a la cima, a 1 100 metros de altitud. Pasan allí dos horas. Inician su descenso a las 6 horas de travesía, lo hacen rápidamente la primera hora, hasta volver a los 700 metros, y andan una hora más a un ritmo más lento. Hacen una parada de media hora a los 500 metros y reanudan la marcha una hora y media más, descendiendo hasta los 400 metros.

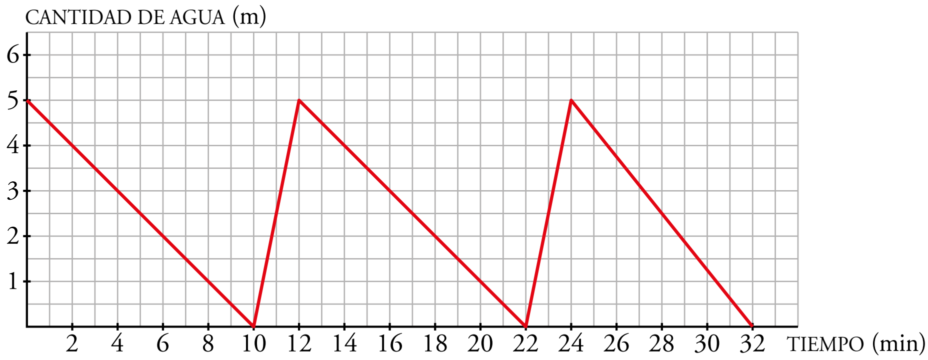
2 **Una cisterna contiene 5 L de agua para pulverizarla en una terraza. Tarda 10 min en vaciarse. En cuanto se vacía, hay un mecanismo que la llena en 2 min.**

a) Representa la función *tiempo-cantidad de agua.*

b) Explica si la función es periódica.

c) Durante la primera media hora, ¿en qué momentos está llena? ¿Y vacía?

a)

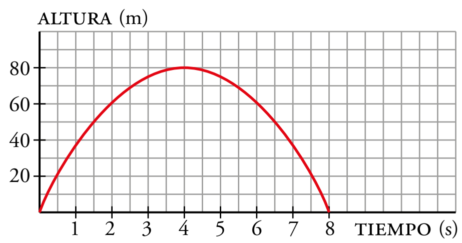


b) Es periódica, puesto que su comportamiento se va repitiendo en periodos de 12 minutos.

c) La cisterna está llena en los minutos 0, 12 y 24; y vacía en 10 y 22.

3 **Una de estas ecuaciones, que se corresponde con la gráfica, expresa la relación entre la altura, h, alcanzada por una pelota que se lanza hacia arriba, y el tiempo, *t*. ¿Cuál de ellas es?**

Ⓐ $h = 8t - t^2$ Ⓑ $h = 40t - 5t^2$ Ⓒ $h = -4t^2 + 80t$



a) ¿Qué altura alcanza? ¿Cuánto tarda en caer?

b) Di la altura de la pelota a los 5 segundos:

— De forma aproximada, mirando la gráfica.

— Utilizando la expresión analítica.

Es la ecuación Ⓑ

a) Alcanza 80 m de altura y tarda 8 s en caer de nuevo hasta el suelo.

b) — Mirando la gráfica, la altura es, aproximadamente, de 75 metros.

— Utilizando la expresión analítica: $40 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 75$ m.

9 FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Página 171

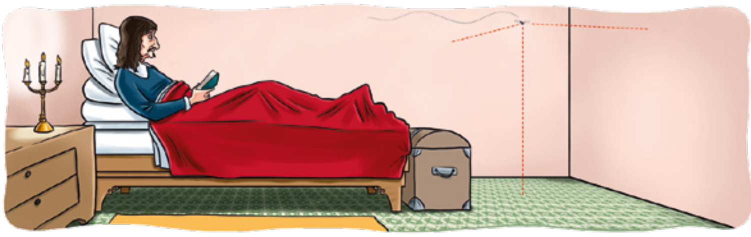
Resuelve

1 **Infórmate y resume, en unas pocas líneas, los datos más relevantes en la vida de René Descartes.**

Nació en La Haye, Francia, en 1596 y murió en Estocolmo en 1650. Su familia pertenecía a la rica burguesía, por lo que fue educado en un colegio considerado uno de los más famosos de Europa. Descartes tuvo una vida muy agitada y repleta de viajes. Tras alistarse en el ejército y dedicar varios años a la meditación, en 1629 marchó a los Países Bajos, donde conoció a Isaac Beechmann, doctor holandés que le animó a reanudar los estudios; de esta forma Descartes encontró su verdadera vocación.

Su mayor aportación a las matemáticas fue un tratado sobre geometría, *La Géométrie*. En este trabajo consigue establecer una relación entre la geometría y el álgebra, que por entonces caminaban por separado, dando lugar al nacimiento de la geometría analítica.

2 **¿Cuántos ejes de coordenadas tiene un sistema cartesiano capaz de fijar la posición de una araña que camina por una pared? ¿Y para fijar la posición de una mosca que vuela por la habitación?**



Para la araña que camina por la pared solo necesitamos dos coordenadas; para la mosca, tres.

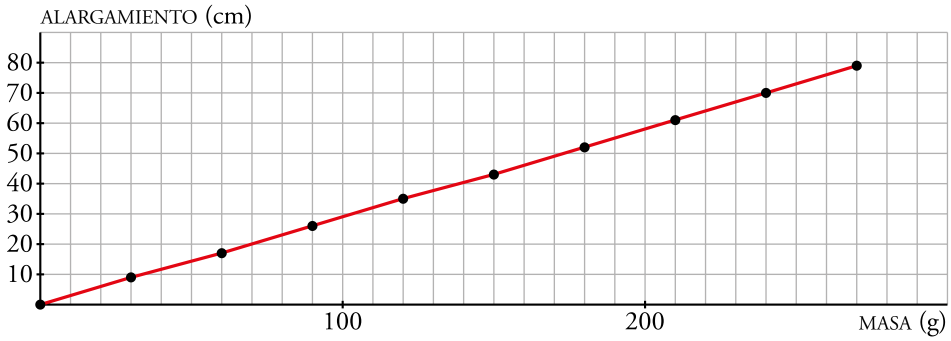
3 **Indica las coordenadas de los puntos A, B, C, D y M en el cuadro de la araña y la mosca de la página anterior. Comprueba que todos ellos responden a la ecuación mencionada.**

$A(0, 6)$; $M(10, 11)$; $B(4, 8)$; $C(6, 9)$; $D(8, 10)$

A: $y = \frac{0}{2} + 6 = 6$ $\quad$ M: $y = \frac{10}{2} + 6 = 5 + 6 = 11$ $\quad$ B: $y = \frac{4}{2} + 6 = 2 + 6 = 8$

C: $y = \frac{6}{2} + 6 = 3 + 6 = 9$ $\quad$ D: $y = \frac{8}{2} + 6 = 4 + 6 = 10$

4 **Representa sobre unos ejes cartesianos los valores de la tabla que relaciona la masa y el alargamiento del muelle. Comprueba que están alineados y que responden, aproximadamente, a la fórmula $A = 0{,}29 \cdot M$.**



(0, 0): $A = 0{,}29 \cdot 0 = 0$

(30, 9): $A = 0{,}29 \cdot 30 = 8{,}7 \approx 9$

(60, 17): $A = 0{,}29 \cdot 60 = 17{,}4 \approx 17$

(90, 26): $A = 0{,}29 \cdot 90 = 26{,}1 \approx 26$

Se puede comprobar que los demás pares también cumplen, aproximadamente, la fórmula.

1 ▶ FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD $y = mx$

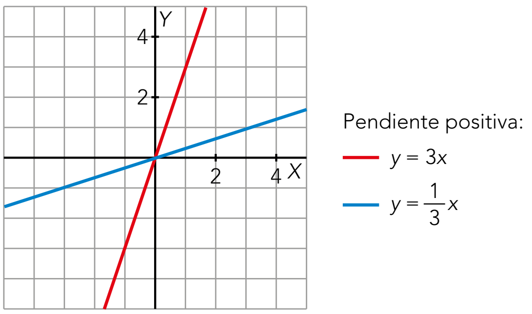
Página 172

1 **Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadriculado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.**

Para que las rectas pasen por el origen, deben ser de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

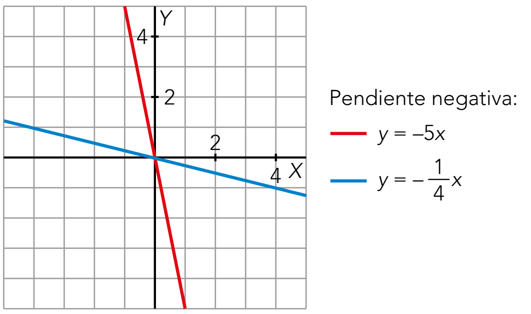
Ejemplos de rectas con pendiente positiva:

- $y = 3x$, con pendiente 3 e $y = \frac{1}{3}x$, con pendiente $\frac{1}{3}$.



Ejemplos de rectas con pendiente negativa:

- $y = -5x$, con pendiente -5 e $y = \frac{-1}{4}x$, con pendiente $\frac{-1}{4}$.



Página 173

2 **Representa las funciones siguientes:**

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$

d) $y = -2x$ **e)** $y = \frac{1}{3}x$ **f)** $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$ **h)** $y = \frac{-3}{2}x$ **i)** $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

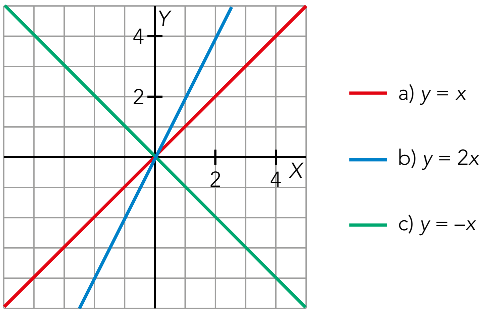
x	y = x
–3	–3
0	0
3	3

b)

x	y = 2x
–2	–4
0	0
2	4

c)

x	y = -x
–2	2
0	0
2	–2



d)

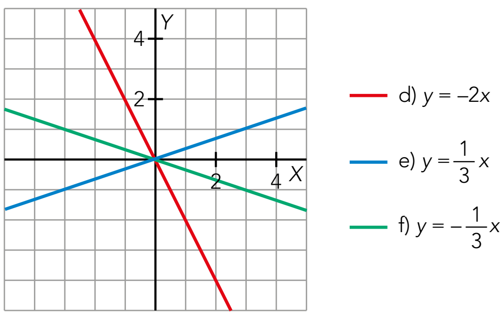
x	y = -2x
–1	2
0	0
1	–2

e)

x	y = 1/3x
–3	–1
0	0
3	1

f)

x	y = -1/3 x
–3	1
0	0
3	–1



g)

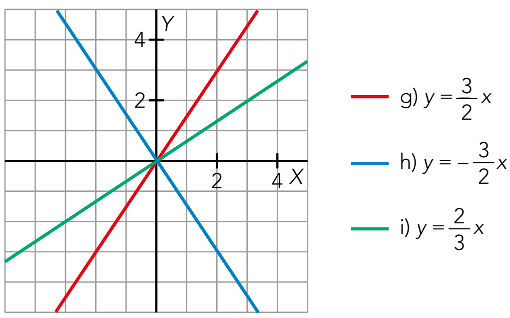
x	y = 3/2x
–2	–3
0	0
2	3

h)

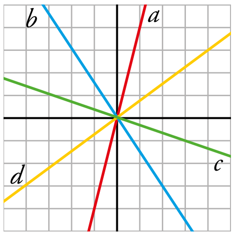
x	y = -3/2x
–2	3
0	0
2	–3

i)

x	y = 2/3x
–3	–2
0	0
3	2



3 **Relaciona cada recta con su ecuación:**



i) $y = 4x$

ii) $y = \frac{3}{4}x$

iii) $y = -\frac{3}{2}x$

iv) $y = -\frac{1}{3}x$

a) $\rightarrow$ i) b) $\rightarrow$ iii)

c) $\rightarrow$ iv) d) $\rightarrow$ ii)

2 ▶ FUNCIÓN LINEAL $y = mx + n$

Página 174

1 **Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:**

a) $y = 3x - 2$ **b)** $y = 3 - 2x$ **c)** $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$ **e)** $y = -2$ **f)** $y = \frac{5x - 3}{2}$

Representamos las funciones:

a)

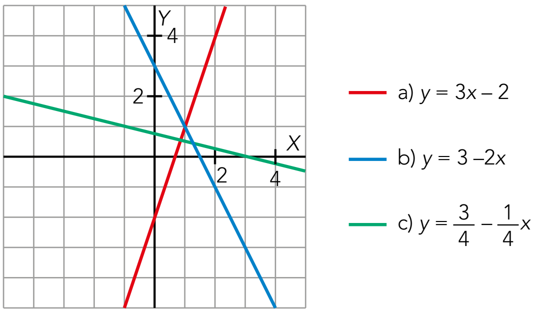
x	$y = 3x - 2$
–1	–5
0	–2
1	1

b)

x	$y = 3 - 2x$
–1	5
0	3
1	1

c)

x	$y = 3/4 - 1/4x$
–1	1
0	3/4
3	0



d)

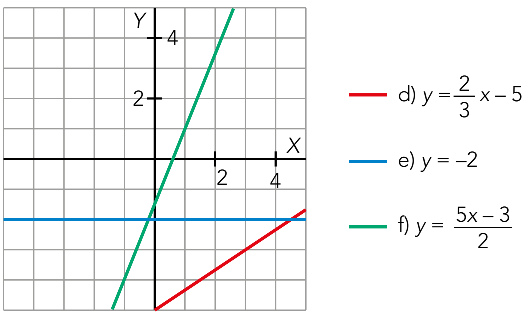
x	$y = 2/3x - 5$
0	–5
3	–3
6	–1

e)

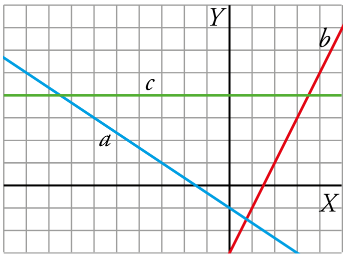
x	$y = -2$
–2	–2
0	–2
2	–2

f)

x	$y = (5x - 3)/2$
–1	–4
0	–3/2
1	1



2 **Escribe la ecuación de cada una de las rectas de la derecha:**



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por (0, –1) y (3, –3):

$$\left.\begin{array}{l} m = -\dfrac{2}{3} \\ n = -1 \end{array}\right\} \to y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por (0, –3) y (2, 1):

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array}\right\} \to y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por (0, 4) y (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ n = 4 \end{array}\right\} \to y = 4$$

Página 175

3 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por *P* y tiene pendiente *m*:**

a) $P(4, -3)$, $m = 4$ **b)** $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$

c) $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$ **d)** $P(0, 0)$, $m = -1$

e) $P(-1, 3)$, $m = -\frac{3}{5}$ **f)** $P(0, -2)$, $m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x - 4) \rightarrow y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

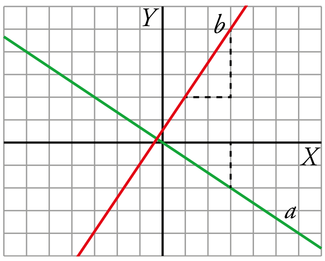
c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x + 0) \rightarrow y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x + 1) \rightarrow y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x + 0) \rightarrow y = -2$

4 **Escribe la ecuación de las rectas *a* y *b* dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.**



Tomamos dos puntos con coordenadas enteras:

- Recta *a*:

  $P(0, 0)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  En lugar de (0, 0), tomamos $Q(3, -2)$:

  $Q(3, -2)$ y $m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$

  Obtenemos la misma ecuación.

- Recta *b*:

  $R(1, 2)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 2 + \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow y = 2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

  En lugar de R(1, 2)), tomamos S(3, 5):

  $S(3, 5)$ y $m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 5 + \frac{3}{2}(x - 3) \rightarrow y = 5 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$

  Obtenemos la misma ecuación.

Página 176

5 Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q:

a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ **b)** $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$

c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$ **d)** $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$

e) $P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$ **f)** $P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \frac{6-5}{-3-2} = -\frac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{5} \to y = 5 - \frac{1}{5}(x-2) \to y = \frac{27}{5} - \frac{1}{5}x$

b) $m = \frac{-1-(-4)}{-2-3} = -\frac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{5} \to y = -4 - \frac{3}{5}(x-3) \to y = -\frac{11}{5} - \frac{3}{5}x$

c) $m = \frac{5-0}{5-(-1)} = \frac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\frac{5}{6} \to y = 0 + \frac{5}{6}(x+1) \to y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

d) $m = \frac{4-1}{3-(-7)} = \frac{3}{10}$

Recta que pasa por $P(-7, 1)$ y tiene pendiente $\frac{3}{10} \to y = 1 + \frac{3}{10}(x+7) \to y = \frac{3}{10}x + \frac{31}{10}$

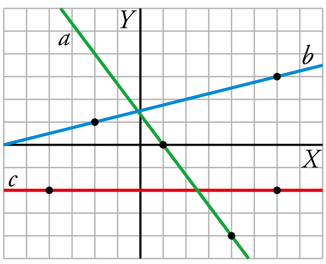
e) $m = \frac{1-1}{-2-3} = 0$

Recta que pasa por $P(3, 1)$ y tiene pendiente 0 $\to y = 1 - 0(x-3) \to y = 1$

f) $m = \frac{5-(-2)}{2-2} = \frac{7}{0} \to$ Es una recta vertical (pendiente infinita).

La ordenada de cualquier abscisa es 2 $\to x = 2$.

6 Halla las ecuaciones de las rectas a, b y c. Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.



- En la recta a:

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{-4}{3} \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \to y = 0 + \left(\frac{-4}{3}\right)(x-1) \to y = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x$$

- En la recta b:

$$\left.\begin{array}{l} m = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ P(-2, 1) \end{array}\right\} \to y = 1 + \frac{1}{4}(x+2) \to y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

- En la recta c:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ P(-4, -2) \end{array}\right\} \to y = -2 + 0(x+4) \to y = -2$$

3 ▶ APLICACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL. PROBLEMAS DE MOVIMIENTOS

Página 177

1 Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). ¿Qué distancia recorre en t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

2 Un robot marcha a 7 m/min. Lo pusimos en marcha hace 2 min. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

En 2 minutos recorre $d = 7 \cdot 2 = 14$ m.

Dentro de t min estará a una distancia $d = 14 + 7t$.

3 Un robot está a 40 m de nosotros y se nos acerca a 5 m/min. ¿A qué distancia estará dentro de t min?

Si llamamos d a la distancia que estará de nosotros, $d = 40 - 5t$

4 A las 10:00 alquilamos una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. ¿Cuánto nos han de devolver si la llevamos de vuelta a las t horas de ese día?

Si llamamos D al dinero que han de devolvernos, $D = 100 - 5(t - 10)$.

4 ESTUDIO CONJUNTO DE FUNCIONES LINEALES

Página 178

1 Un tren AVE ha salido a las 10 de la mañana de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías salió dos horas antes de nuestra ciudad y va a 50 km/h por una vía paralela a la del AVE.

a) Expresa mediante dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren al cabo de *t* horas.

b) Representa las dos rectas correspondientes a las funciones en unos ejes de coordenadas.

c) Indica en qué punto se cortan las dos rectas y di qué significa cada una de sus coordenadas.

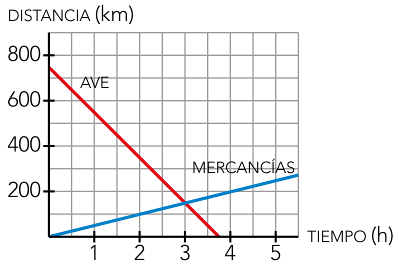
d) Calcula mediante un sistema de ecuaciones la hora a la que se cruzan los trenes y a qué distancia de nuestra ciudad se encuentran.

a) Si llamamos d a la distancia que hay desde nuestra ciudad a cada tren al cabo de t horas:

$d_{\text{AVE}} = 750 - 200t$

$d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t$

b)



c) Se cortan en el punto (3, 150), lo que significa que se cruzarán a las 3 horas, a 150 km de distancia de nuestra ciudad.

d) $\left.\begin{array}{l} d_{\text{AVE}} = 750 - 200t \\ d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t \end{array}\right\} \rightarrow 750 - 200t = 50t \rightarrow 750 = 250t \rightarrow t = 3 \text{ horas}$

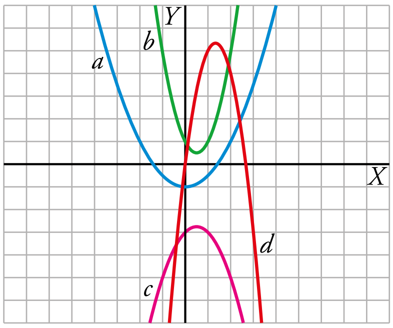
Para $t = 3$ horas, $d_{\text{AVE}} = d_{\text{MERCANCÍAS}} = 150$ km

Se encuentran a las 3 horas, a 150 km de nuestra ciudad.

5 PARÁBOLAS Y FUNCIONES CUADRÁTICAS

Página 179

1 **Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:**



I) $y = 2x^2 - 2x + 1$ II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ IV) $y = -3x^2 + 8x$

I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

Página 180

2 **Representa las siguientes parábolas:**

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \;\rightarrow$ No tiene soluciones reales.

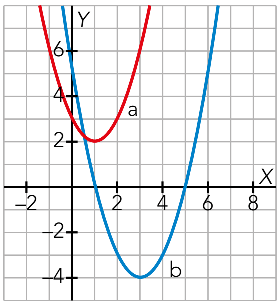
La parábola no corta al eje X.

x	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 5 \;\rightarrow\; (5, 0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



3 **Dibuja estas funciones:**

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$ **b)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

Calculamos, en ambos casos, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$

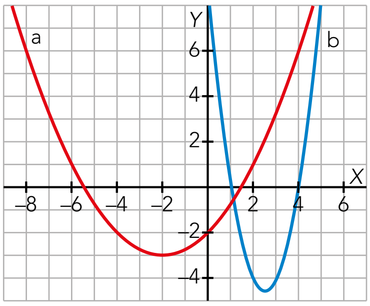
$$\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2\sqrt{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \;\rightarrow\; (-2 + 2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \;\rightarrow\; (-2 - 2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

x	-6	$-2-2\sqrt{3}$	-4	-2	0	$-2+2\sqrt{3}$	2
y	1	0	-2	-3	-2	0	1

b) $p = \dfrac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \dfrac{5}{2}$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 4 \;\rightarrow\; (4, 0) \\ x = 1 \;\rightarrow\; (1, 0) \end{cases}$$

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	8	0	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	0	8



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 181

1. Carrera de tortugas

Hazlo tú

- **Halla las ecuaciones de los primeros tramos de las tortugas azul y roja. Si las tres hubieran seguido el ritmo del primer tramo, ¿cuándo llegaría cada una?**

   - Tortuga azul: Es una recta que pasa por (0, 0) y (5, 16). Su pendiente es: $m = \frac{16}{5}$. Su ecuación es: $y = \frac{16}{5}x$.

     Llegaría a la meta cuando $y = 18$: $18 = \frac{16}{5}x \rightarrow x = \frac{5 \cdot 18}{16} = 5{,}625 \text{ min}$.

   - Tortuga roja: Es una recta que pasa por (0, 0) y (5, 9). Su pendiente es: $m = \frac{9}{5}$. Su ecuación es: $y = \frac{9}{5}x$.

     Llegaría a la meta cuando $y = 18$: $18 = \frac{9}{5}x \rightarrow x = \frac{18 \cdot 5}{9} = 10 \text{ min}$.

   - La tortuga verde llegaría cuando $x = 18$ min.

2. La flecha y el globo

Hazlo tú

- **Responde a las mismas preguntas suponiendo que el globo sube a 10 m/s y que a los 12 s se lanza la flecha.**

  a) Tomamos el origen del tiempo ($t = 0$) cuando se lanza la flecha; en ese momento el globo se encuentra a $10 \cdot 12 = 120$ metros. La expresión de la función de la altura del globo es, pues $y = 120 + 10\,t$.

  b) Resolvemos el sistema con las ecuaciones de la flecha y el globo:

  $$\left.\begin{array}{l} a = 120 + 10\,t \\ a = 60t - 5t^2 \end{array}\right\} \rightarrow 120 + 10t = 60t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 50t + 120 = 0 \rightarrow$$

  $$\rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0 \left\langle \begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = 6 \end{array}\right.$$

  Es decir, a los 4s la flecha pincha el globo a una altura de:

  $$a = 120 + 10 \cdot 4 = 160 \text{ m}$$

  c) Si no pincha el globo al subir, lo haría al bajar a los 6 s a una altura de:

  $$a = 120 + 10 \cdot 6 = 180 \text{ m}$$

  d) La gráfica de la flecha es la misma que la del problema resuelto original.

  La gráfica del globo es una recta que pasa por (0, 120), (4, 160) y (6, 180).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 182

Practica

Funciones lineales. Rectas

1 **Asocia cada recta con su ecuación:**

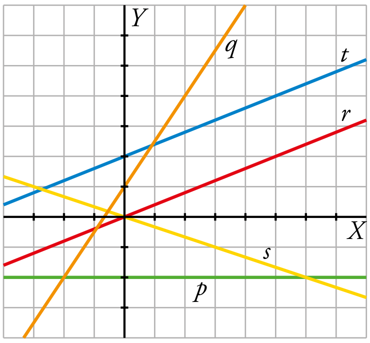
a) $y = -\frac{1}{3}x$

b) $y = \frac{3}{2}x + 1$

c) $y = \frac{2}{5}x$

d) $y = \frac{2}{5}x + 2$

e) $y = -2$



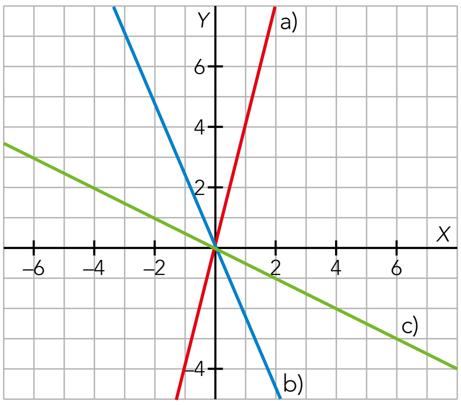
a) s b) q c) r d) t e) p

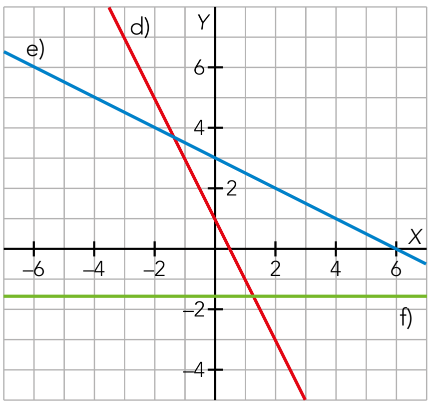
2 **Representa las rectas siguientes:**

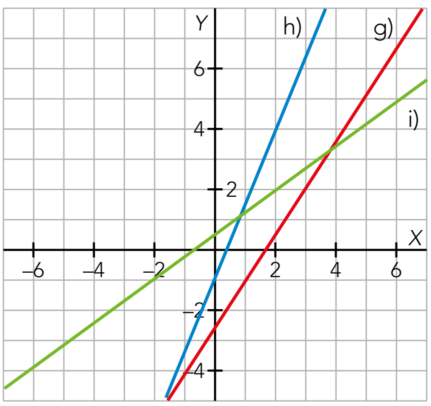
a) $y = 4x$ b) $y = -2{,}4x$ c) $y = -\frac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$ e) $y = -\frac{x}{2} + 3$ f) $y = -\frac{8}{5}$

g) $y = \frac{3x - 5}{2}$ h) $y = 2{,}5x - 1$ i) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$







3 **Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?**

a) $y = 2x$ **b)** $y = 2x - 3$

c) $2x - y + 1 = 0$ **d)** $4x - 2y + 5 = 0$

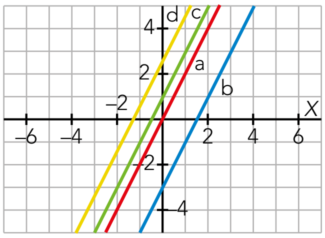
Las pendientes de las rectas son:

a) $m = 2$

b) $m = 2$

c) $2x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow m = 2$

d) $4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \dfrac{5}{2} \rightarrow m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

4 **Indica la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de las rectas de los ejercicios 1 y 2. ¿Cuáles de ellas corresponden a funciones de proporcionalidad?**

1. a) $m = -\dfrac{1}{3};\ n = 0$ 1. b) $m = \dfrac{3}{2};\ n = 1$

1. c) $m = \dfrac{2}{5};\ n = 0$ 1. d) $m = \dfrac{2}{5};\ n = 2$

1. e) $m = 0;\ n = -2$ 2. a) $m = 4;\ n = 0$

2. b) $m = -2{,}4;\ n = 0$ 2. c) $m = -\dfrac{1}{2};\ n = 0$

2. d) $m = -2;\ n = 0$ 2. e) $m = -\dfrac{1}{2};\ n = 3$

2. f) $m = 0;\ n = -\dfrac{8}{5}$ 2. g) $m = \dfrac{3}{2};\ n = -\dfrac{5}{2}$

2. h) $m = 2{,}5;\ n = -1$ 2. i) $m = \dfrac{3}{4};\ n = \dfrac{1}{2}$

Son funciones de proporcionalidad 1. a); 1. c); 2. a); 2. b); 2. c); 2. d).

5 **Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:**

a) $P(-2, 5),\ m = 3$ **b)** $P(0, -5),\ m = -2$

c) $P(0, 0),\ m = \dfrac{3}{2}$ **d)** $P(-2, -4),\ m = -\dfrac{2}{3}$

a) $y = 5 + 3(x + 2)$ b) $y = -5 - 2(x - 0) \rightarrow y = -2x - 5$

c) $y = 0 + \dfrac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x$ d) $y = -4 - \dfrac{2}{3}(x + 2)$

6 **Escribe las pendientes de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:**

a) $A(0, 0)$ **y** $B(1, 1)$ **b)** $A(0, 0)$ **y** $B(1, -2)$

c) $A(1, 3)$ **y** $B(5, 3)$ **d)** $A(0, 2)$ **y** $B(2, 0)$

e) $A(-5, -2)$ **y** $B(-1, 3)$ **f)** $A(3, -2)$ **y** $B(0, -1)$

g) $A\left(\frac{4}{5}, 1\right)$ **y** $B\left(3, -\frac{2}{3}\right)$ **h)** $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ **y** $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right)$

a) $A(0, 0);\ B(1, 1);\ \to\ m = \dfrac{1-0}{1-0} = 1$

b) $A(0, 0);\ B(1, -2);\ \to\ m = \dfrac{-2-0}{1-0} = -2$

c) $A(1, 3);\ B(5, 3);\ \to\ m = \dfrac{3-3}{5-1} = 0$

d) $A(0, 2);\ B(2, 0);\ \to\ m = \dfrac{0-2}{2-0} = -1$

e) $A(-5, -2);\ B(-1, 3);\ \to\ m = \dfrac{3-(-2)}{-1-(-5)} = \dfrac{5}{4}$

f) $A(3, -2);\ B(0, -1);\ \to\ m = \dfrac{-1-(-2)}{0-3} = \dfrac{-1}{3}$

g) $A\left(\frac{4}{5}, 1\right);\ B\left(3, -\frac{2}{3}\right);\ \to\ m = \dfrac{-\frac{2}{3}-1}{3-\frac{4}{5}} = \dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{11}{5}} = \dfrac{-25}{33}$

h) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right);\ B\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{5}\right);\ \to\ m = \dfrac{-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{14}{15}}{\frac{11}{6}} = \dfrac{-14\cdot 6}{15\cdot 11} = \dfrac{28}{55}$

7 **Obtén la ecuación de la recta que pasa por** A **y** B**.**

a) $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ **b)** $A(-5, 2)$, $B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, $B\left(1, \frac{2}{3}\right)$ **d)** $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) $m = \dfrac{4-(-1)}{3-2} = 5$

$y = -1 + 5(x-2)$

b) $m = \dfrac{1-2}{-3-(-5)} = \dfrac{-1}{2}$

$y = 2 - \frac{1}{2}(x+5)$

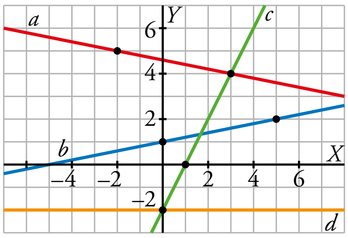
c) $m = \dfrac{\frac{2}{3}-2}{1-\frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \dfrac{8}{3}$

$y = 2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

d) $m = \dfrac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{3}{10}$

$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

8 **Escribe la ecuación de cada una de estas rectas. Ayúdate de los puntos representados:**



Utilizamos los puntos marcados para hallar la pendiente de cada recta.

- La recta a tiene pendiente $m = \frac{-1}{5}$ y pasa por el punto (3, 4).

  Su ecuación es $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3)$.

- La recta b tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$ y pasa por el punto (0, 1).

  Su ecuación es $y = \frac{1}{5}x + 1$.

- La recta c tiene pendiente $m = \frac{4}{2} = 2$ y pasa por (0, –2).

  Su ecuación es $y = 2x - 2$.

- La ecuación de la recta d es $y = -2$.

9 **¿Cuáles de las funciones de la actividad anterior son crecientes? ¿Y decrecientes? Comprueba el signo de la pendiente en cada caso.**

Las funciones b y c son crecientes, y tienen pendiente positiva.

La función a es decreciente, y tiene pendiente negativa.

La función d es constante, y su pendiente es 0.

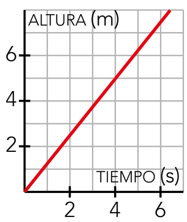
10 **Un grifo llena un depósito de 5 m de alto. La altura del agua varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).**

a) Represéntala.

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a) $a(t) = \frac{5}{4}t$. Es una función lineal de pendiente $\frac{5}{4}$. Pasa por los puntos (0, 0) y (4, 5).



Si la altura es 5 m, el dominio de la función es el tramo 0 – 4.

b) Sí, se trata de una función de proporcionalidad.

c) La pendiente es $\frac{5}{4}$. Significa que por cada cuatro segundos que pasen, la altura del depósito aumenta 5 metros.

11 Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.

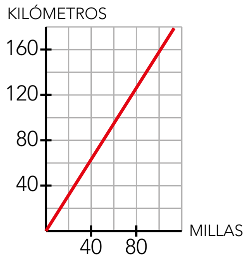
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.

b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5	10	20	50	100
KILÓMETROS	1,6	3,2	4,8	6,4	8	16	32	80	160

b) La ecuación es $y = 1{,}6x$



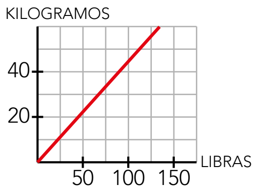
12 Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:

a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, y, que equivalen a x libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

a) x: libras; y: kilos $\to y = \dfrac{45}{100}x$

b) La gráfica pasa por (0, 0) y por (100, 45)



13 **Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:**

t (*min*)	0	1	2	3	5
V (*l*)	20	18	16	14	10

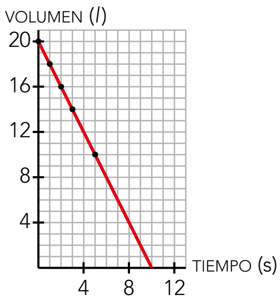
a) Representa la función *tiempo* → *volumen*.

b) Escribe su ecuación y su dominio de definición.

c) Di cuál es su pendiente y qué significa.

d) ¿Es una función de proporcionalidad?

a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



b) La pendiente de la función es $m = \frac{-2}{1} = -2$ y su ordenada en el origen es $n = 20$.

La ecuación de la función es $y = -2x + 20$. Su dominio de definición es el tramo 0 – 10.

c) La pendiente es $m = -2$ y significa que por cada minuto que está el desagüe abierto, el volumen de agua que hay en el depósito disminuye 2 litros.

d) No, no es una función de proporcionalidad. Es una función afín.

Página 183

14 **Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:**

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

a) Escribe la ecuación que relaciona la longitud de la sombra con la altura del poste en ese instante.

b) ¿Qué longitud tiene la sombra de un poste de 3,5 m de altura? ¿Cuál es la altura de un poste que arroja una sombra de 3 m?

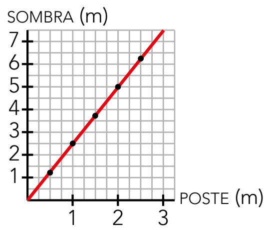
c) Representa la función *altura del poste* → *longitud de la sombra*.

a) Es una función de proporcionalidad de constante 2,5. Por tanto, la ecuación pedida es $y = 2{,}5x$.

b) • Si $x = 3{,}5$ m $\to$ $y = 2{,}5 \cdot 3{,}5 = 8{,}75$ $\to$ 8,75 m

• Si $y = 3$ m $\to$ $3 = 2{,}5 \cdot x$ $\to$ $x = 1{,}2$ $\to$ 1,2 m

c) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



15 **Mamen anda a una velocidad de 3 km/h y su casa se encuentra a 10 km de la piscina. Asocia cada uno de estos enunciados con una de las ecuaciones de más abajo:**

a) Si empieza a andar ahora, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

b) Si empezó a andar hace 3 h, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de *t* horas?

c) Si sale de su casa para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

d) Si salió desde su casa a las 10:00 h para bañarse, ¿a qué distancia se encontrará de la piscina a las *t* horas?

e) Si salió de su casa hace 3 horas para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de *t* horas?

$d = 3t + 3$ $\quad$ $d = 10 + 3(t - 10)$ $\quad$ $d = 3(t + 3)$

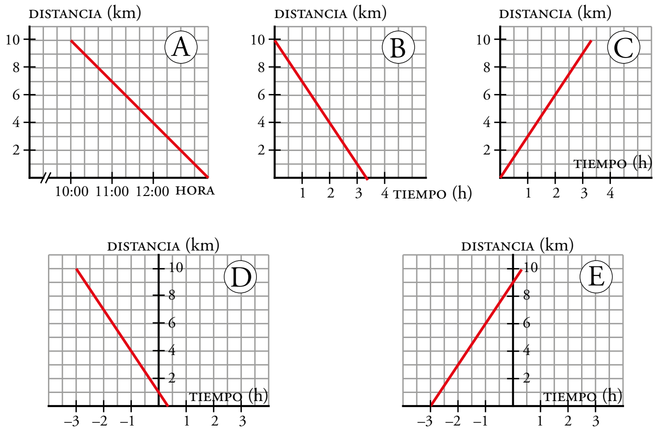
$d = 3(t - 3)$ $\quad$ $d = 10 - 3(t - 10)$ $\quad$ $d = 10 - 3t$

$d = 3t$ $\quad$ $d = 10 - 3(t + 3)$ $\quad$ $d = 10 + 3(t + 3)$

a) $d = 3t$ $\quad$ b) $d = 3(t + 3)$ $\quad$ c) $d = 10 - 3t$

d) $d = 10 - 3(t - 10)$ $\quad$ e) $d = 10 - 3(t + 3)$

16 **Indica cuál es la gráfica correspondiente a cada uno de los enunciados de la actividad anterior.**



a) → C b) → E c) → B

d) → A b) → D

Funciones cuadráticas. Parábolas

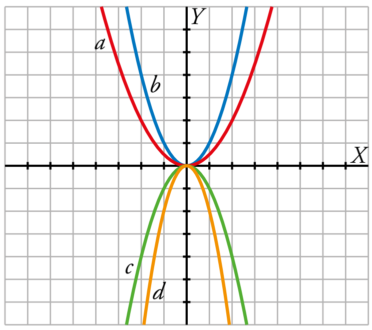
17 **Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:**

I) $y = x^2$

II) $y = -x^2$

III) $y = -2x^2$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



I) b II) c III) d IV) a

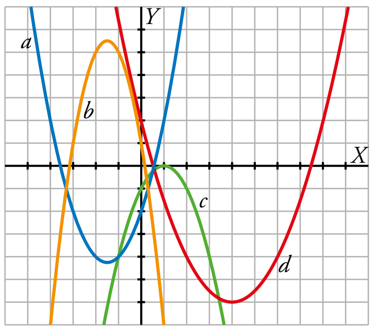
18 **Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:**

I) $y = x^2 + 3x - 2$

II) $y = -x^2 + 2x - 1$

III) $y = -2x^2 - 6x + 1$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



I) a II) c III) b IV) d

19 **Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo:**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = 3 - x^2$ **c)** $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 5x^2 + 20x + 20$ **e)** $y = -\frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$

a) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$; $f(0) = -5$; $V(0, -5)$.

Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

b) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$; $f(0) = 3$; $V(0, 3)$.

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

c) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1$; $f(-1) = 5$; $V(-1,-5)$.

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

d) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot 5} = -2$; $f(-2) = 0$; $V(-2, 0)$.

Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

e) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot \frac{-5}{2}} = 1$; $f(1) = 1$; $V(1, 1)$.

Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

20 **Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:**

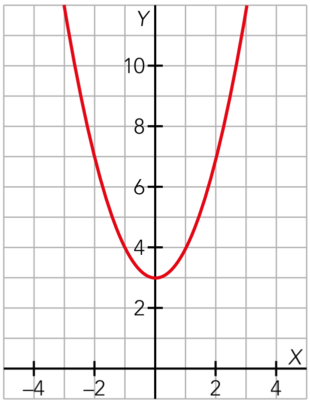
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4$ **c)** $y = 2x^2$ **d)** $y = 0{,}5x^2$

a) $y = x^2 + 3$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

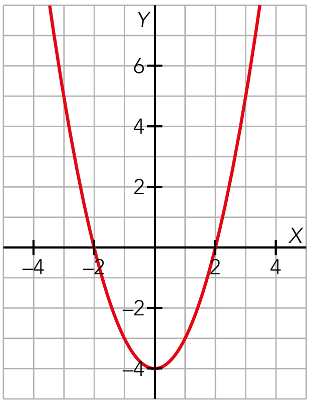
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 3).



b) $y = x^2 - 4$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	–3	–4	–3	0	5	12

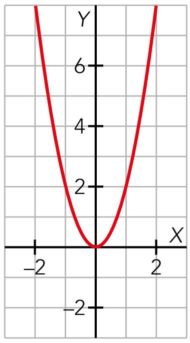
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, –4).



c) $y = 2x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

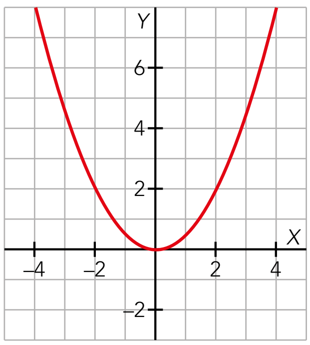
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



d) $y = 0{,}5x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 0)



21 **Representa las siguientes parábolas hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = (x+4)^2$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ **c)** $y = -3x^2 + 6x - 3$ **d)** $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x+4)^2 \;\to\; y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-8}{2} = -4$

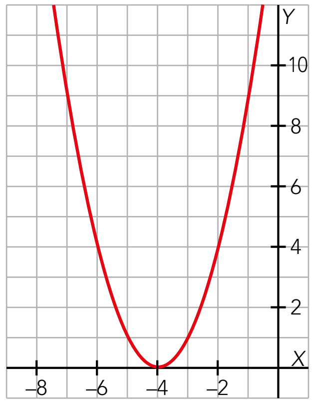
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\to\; y = 0 + 0 + 16 \;\to\; (0, 16)$

$y = 0 \;\to\; (x+4)^2 = 0 \;\to\; x = -4 \;\to\; (-4, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -3$

Calculamos los cortes con los ejes:

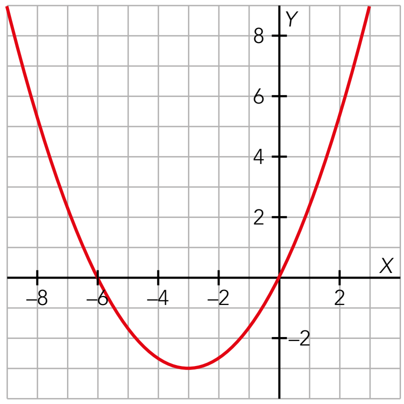
$x = 0 \;\to\; y = 0 \;\to\; (0, 0)$

$y = 0 \;\to$

$\to \dfrac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \to x\left(\dfrac{1}{3}x + 2\right) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to (0, 0) \\ x = -6 \to (-6, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–9	–6	–4	–3	–2	0	3
y	9	0	–2,667	–3	–2,667	0	9



c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

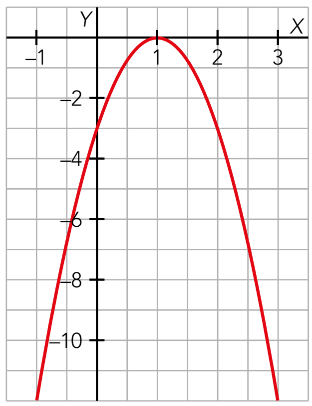
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\to\; y = -3 \;\to\; (0, -3)$

$y = 0 \;\to\; -3x^2 + 6x - 3 = 0 \to -3(x-1)^2 = 0 \to x = 1 \to (1, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–1	0	1	2	3
y	–12	–3	0	–3	–12



d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

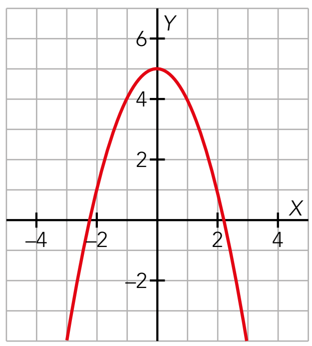
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \;\to\; y = 5 \;\to\; (0, 5)$

$y = 0 \;\to\; -x^2 + 5 = 0 \;\to\; \begin{cases} x = -\sqrt{5} \;\to\; (-\sqrt{5}, 0) \\ x = \sqrt{5} \;\to\; (\sqrt{5}, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	–3	$-\sqrt{5}$	–2	–1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
y	–4	0	1	4	5	4	1	0	–4



Página 184

Resuelve problemas

22 **a) Resuelve el sistema formado por las ecuaciones $y = x^2 - 5x + 2$ e $y = 5x - 23$, y comprueba que tiene una única solución, (5, 2). Represéntalas y observa que la recta y la parábola son tangentes en el punto (5, 2).**

b) Averigua si alguna de estas rectas es tangente a la parábola anterior:

i) $y = x - 1$ **ii) $2x + y = 4$** **iii) $y = -3$**

iv) $y = -x - 2$ **v) $x + y = -8$** **vi) $x = -3y$**

a) Parábola: $y = x^2 - 5x + 2$. Recta: $y = 5x - 23$.

$x^2 - 5x + 2 = 5x - 23 \rightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$

$$x_0 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$$

Si $x = 5$, $y = 5 \cdot 5 - 23 = 25 - 23 \rightarrow y = 2$

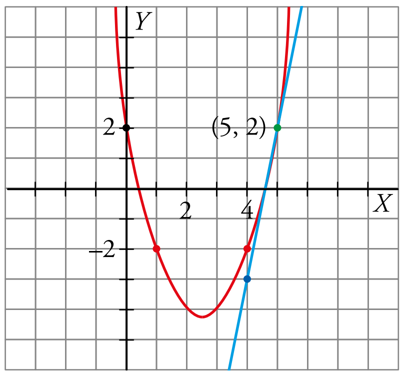
El único punto de corte de la recta y la parábola es (5, 2)

- La recta pasa por (5, 2) y (4, –3)
- Calculamos el vértice de la parábola y algunos puntos cercanos:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \qquad y_0 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 2 = -\frac{17}{4}$$

El vértice está en (2, 5; –4, 25)

x	0	1	2	3	4	5
y	2	–2	–4	–4	–2	2



b) i) $y = x - 1$ pasa por (0, –1) y (1, 0) $\rightarrow$ No es tangente.

ii) $2x + y = 4$ pasa por (0, 4) y (1, 2) $\rightarrow$ No es tangente.

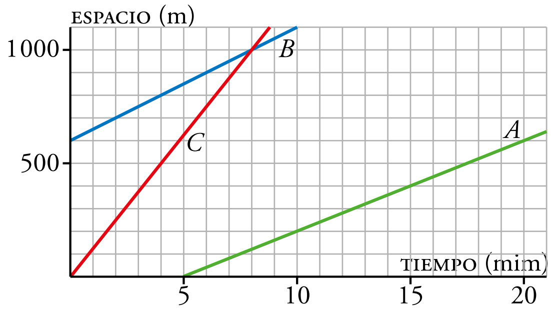
iii) $y = -3$ pasa por (0, –3) y (1, –3) $\rightarrow$ No es tangente.

iv) $x^2 - 5x + 2 = -x - 2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = -4 \rightarrow$ Sí es tangente en (2, –4).

v) $x + y = -8$ pasa por (0, –8) y (–1, –7) $\rightarrow$ No es tangente.

vi) $x = -3y$ pasa por (0, 0) y (–3, 1) $\rightarrow$ No es tangente.

23 **Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:**



a) ¿Qué velocidad, en m/min, lleva cada uno?

b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.

a) La velocidad se corresponde con la pendiente de cada función.

A lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

B lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min

C lleva una velocidad de $\frac{400}{3} \approx 133,3$ m/min

b) $A \rightarrow y = 500 + \frac{100}{3}(x - 20)$

$B \rightarrow y = \frac{100}{3}x + 500$

$C \rightarrow y = \frac{400}{3}x$

24 **En cada uno de los siguientes enunciados, halla la ecuación y representa la función lineal en unos ejes coordenados:**

a) Antonio compra naranjas a 3 €/kg. ¿Cuánto le costarán p kg de naranjas?

b) Sonia sale de viaje a las 8:00 h a 120 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido a las t horas?

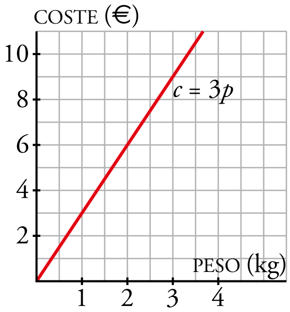
c) A Juan le cobran 5 € por alquilar unos patines, más 1 € por cada hora que esté patinando. ¿Cuánto le cobrarán por t horas de patinaje?

d) Tengo 25 € y el taxi me ha cobrado 2,50 € por la bajada de bandera más 1,20 € por kilómetro recorrido. ¿Cuánto dinero me quedará si el taxi me lleva a d km de distancia?

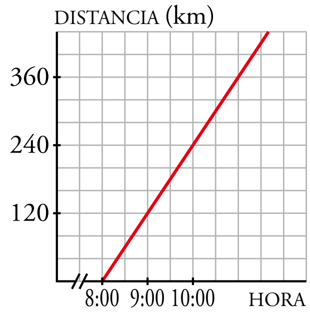
e) A las 12:00 he sacado un refresco a 10 °C de la nevera. Si cada minuto se calienta 1,5 °C, ¿a qué temperatura estará a las t horas?

f) Hace 10 min he abierto el grifo que llena la bañera. Si el nivel sube a razón de 2 cm de altura por minuto y la bañera tiene 40 cm de profundidad, ¿cuántos centímetros faltarán para que rebose el agua dentro de t minutos?

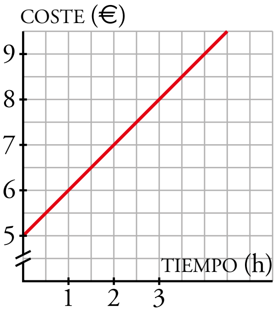
a) $c = 3p$



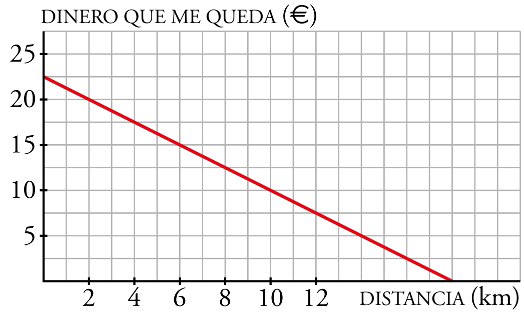
b) $d = 120(t - 8) \rightarrow d = 120t - 960$



c) $c = 5 + t$

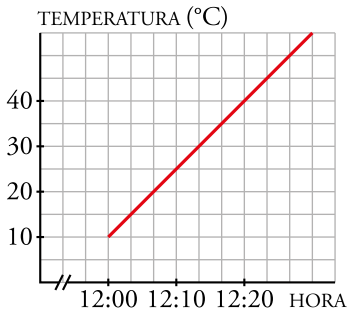


d) $D = 25 - (2{,}50 + 1{,}20d) \rightarrow D = -1{,}2d + 22{,}5$



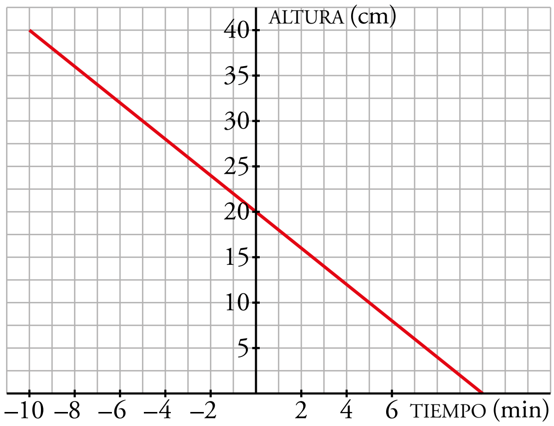
e) $g = 10 + 1{,}5 \cdot 60(t - 12) \rightarrow$

$\rightarrow g = 10 + 90t - 1\,080 \rightarrow g = 90t - 1\,070$



f) $n = 40 - 2(t + 10) \rightarrow n = 40 - 2t - 20 \rightarrow$

$\rightarrow n = -2t + 20$

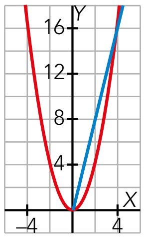


25 **a) ¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área?**

b) Dibuja ambas funciones.

a) El perímetro, y, en función del lado, x, viene dado por $y = 4x$.

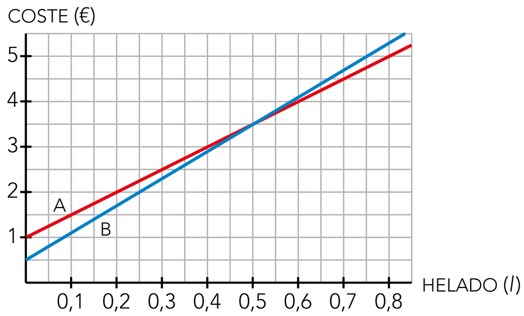
El área en función del lado viene dada por $y = x^2$

b) 

26 **En una heladería A venden el helado a 5 € el litro, y cobran 1 € por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0,50 € por un envase y 6 € por cada litro de helado.**

a) Representa la función *litros de helado - coste* para cada heladería y escribe sus ecuaciones.

b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compremos.

a) 

Si y es el coste del helado, en euros, y x es la cantidad de helado, en litros:

Heladería A $\rightarrow$ $y = 1 + 5x$

Heladería B $\rightarrow$ $y = 0,5 + 6x$

b) Si compramos menos de medio litro de helado, es más barato comprar en la heladería B. Si compramos más de medio litro, la heladería A es la mejor opción.

27 **La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 °C, y en la Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es 100 °C, que equivale a 212 °F.**

a) Encuentra y representa la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas.

b) Pasa a grados Fahrenheit 25 °C; 36,5 °C y 10 °C.

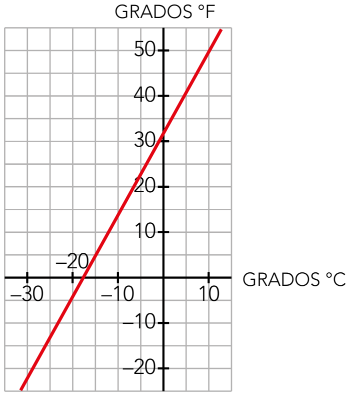
c) Pasa a grados centígrados 86 °F y 63,5 °F.

GRADOS °C	0	100
GRADOS °F	32	212

a) La pendiente de la función es $m = \dfrac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$y = 32 + 1,8(x - 0) \rightarrow y = 1,8x + 32$



b) $y = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77$ °F; 25 °C $\Leftrightarrow$ 77 °F

$y = 1,8 \cdot 36,5 + 32 = 97,7$ °F; 36,5 °C $\Leftrightarrow$ 97,7 °F

$y = 1,8 \cdot 10 + 32 = 50$ °F; 10 °C $\Leftrightarrow$ 50 °F

c) $86 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{86 - 32}{1,8} = 30$ °C; 86 °F $\Leftrightarrow$ 30 °C

$63,5 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \dfrac{63,5 - 32}{1,8} = 17,5$ °C; 63,5 °F $\Leftrightarrow$ 17,5 °C

28 **La altura, a, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba es $a = 20t - 5t^2$.**

a) Representa gráficamente la función.

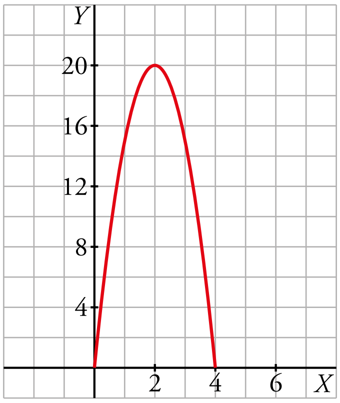
b) Di cuál es el dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento toca la piedra el suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

a)



b) El dominio de definición es el intervalo 0-4, incluyendo los extremos.

c) Alcanza su altura máxima a los 2 s de ser lanzada, llegando a los 20 m de altura.

d) Toca el suelo a los 4 s de haber sido lanzada.

e) En el intervalo 1-3, sin tener en cuenta los extremos, ya que se pide una altura superior, no igual.

29 **Los gastos anuales, en euros, que una empresa tiene por la fabricación de x ordenadores son:**

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

Y los ingresos, también en euros, que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que los ingresos superen a los gastos y haya beneficios?

$G(x) = 20\,000 + 250x$

$I(x) = 600x - 0{,}1x^2$

Veamos los puntos de corte de ambas funciones:

$20\,000 + 250x = 600x - 0{,}1x^2 \rightarrow 0{,}1x^2 - 350x + 20\,000 = 0$

$$x = \frac{350 \pm \sqrt{122\,500 - 8\,000}}{0{,}2} = \frac{350 \pm 338{,}38}{0{,}2} \rightarrow \begin{cases} x = 58{,}1 \\ x = 3\,441{,}9 \end{cases}$$

Ahora comprobemos en qué tramos los ingresos están por encima de los gastos:

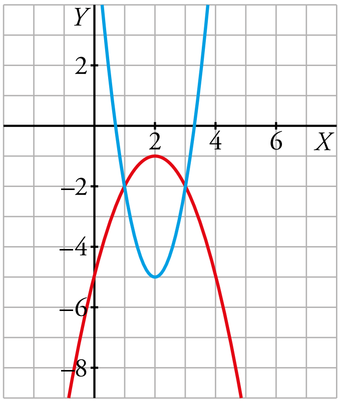
- Si $x < 58{,}1 \rightarrow G(x) > I(x)$
- Si $58{,}1 < x < 3\,441{,}9 \rightarrow G(x) < I(x)$
- Si $x > 3\,441{,}9 \rightarrow G(x) > I(x)$

Para que los ingresos superen a los gastos, es decir, para que haya beneficios, deben fabricarse entre 59 y 3 441 ordenadores.

30 **Dibuja las parábolas cuyas ecuaciones son:**

$$y = 3x^2 - 12x + 7 \qquad\qquad y = -x^2 + 4x - 5$$

Busca los puntos de corte mediante un sistema de ecuaciones y comprueba que corresponden a los hallados gráficamente.



$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 12x + 7 \\ y = -x^2 + 4x - 5 \end{array}\right\} \; 3x^2 - 12x + 7 = -x^2 + 4x - 5 \;\rightarrow\; 4x^2 - 16x + 12 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1 \;\rightarrow\; y = -2 \\ x = 3 \;\rightarrow\; y = -2 \end{array}\right.$$

Página 185

Resuelve: un poco más difícil

31 **La medicina recomienda que al hacer deporte no se superen ciertas limitaciones de frecuencia cardiaca. Hace tiempo se estableció un algoritmo para hallar la Máxima Frecuencia Cardiaca Recomendada (MFCR) según la edad:**

MFCR = 220 – edad

Investigaciones médicas posteriores sugieren una leve modificación de esta fórmula:

MFCR = 208 – (0,7 · edad)

La comunidad médica afirma que la nueva fórmula reduce un poco las pulsaciones recomendadas a los jóvenes y las aumenta ligeramente para los mayores.

a) ¿A partir de qué edad la nueva fórmula aumenta la limitación?

b) Dibuja las dos gráficas, calcula el punto de corte y comprueba que coincide con lo hallado en el apartado anterior.

c) Comprueba, para cada una de las dos fórmulas, qué limitación de frecuencia cardiaca corresponde a tu edad.

1.^{er} algoritmo: MFCR = 220 – edad $\rightarrow$ $y = 220 - x$

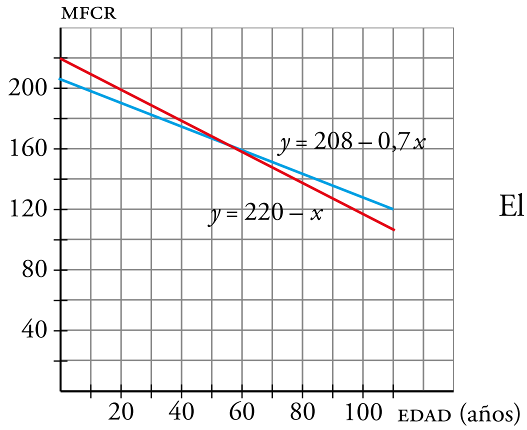
2.º algoritmo: MFCR = 208 – (0,7 · edad) $\rightarrow$ $y = 208 - 0{,}7\,x$

a) Hallamos el punto de corte de las dos funciones anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} y = 220 - x \\ y = 208 - 0{,}7x \end{array}\right\} \rightarrow 220 - x = 208 - 0{,}7x \rightarrow 12 = 0{,}3x \rightarrow x = 40 \rightarrow y = 220 - 40 = 180$$

A partir de los 40 años.

b)

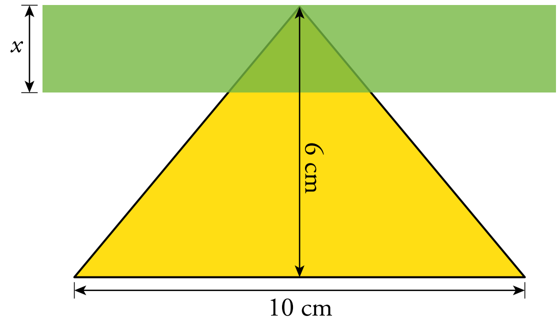


El punto de corte es (40, 180).

c) Hacemos los cálculos para 14 años.

- $y = 220 - x \rightarrow y = 220 - 14 \rightarrow y = 206$
- $y = 208 - 0{,}7 \cdot x \rightarrow y = 208 - 0{,}7 \cdot 14 \rightarrow y = 198{,}2$

32 **La siguiente figura muestra cómo al bajar una cortinilla se oculta el triángulo coloreado de forma que al principio se ve el triángulo completo y al final no se ve nada:**



a) Calcula en función de ***x*** **(lo que baja la cortinilla) el área de la parte del triángulo que podemos ver.**

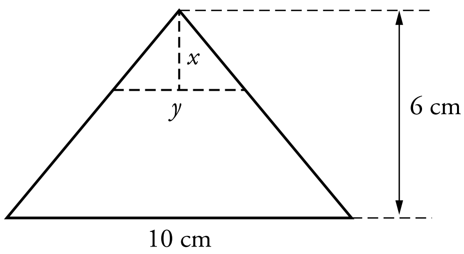
b) ¿Cuál es el dominio de la función?

c) Dibuja la gráfica correspondiente.

a) • Área del triángulo amarillo: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$ cm^2

• El triángulo de base 10 y el de base y son semejantes.

Por tanto: $\frac{10}{6} = \frac{y}{x} \rightarrow y = \frac{5}{3}x$



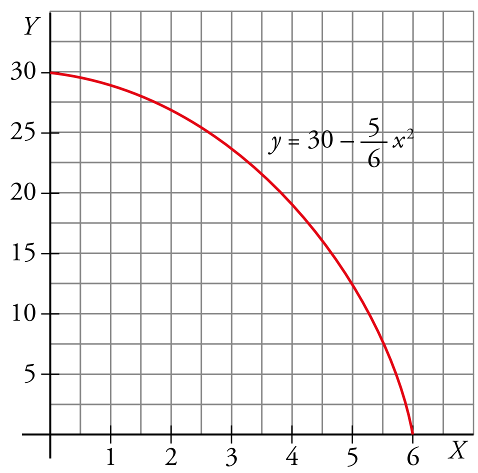
• Área del triángulo de base y:

$\frac{1}{2} \cdot y \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}x \cdot x = \frac{5}{6} \cdot x^2$

• Área de la parte visible del triángulo: $A = 30 - \frac{5}{6} \cdot x^2$

b) El dominio de la función es [0, 6].

c) El vértice de la parábola $y = 30 - \frac{5}{6}x^2$ está en (0, 30). La parábola pasa por (0, 30), (3; 22,5), (6, 0)



33 **Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg.**

a) ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio?

b) ¿Cuál será ese beneficio?

Si llamamos x a los días que han de pasar, la función que nos da el precio de las naranjas es la siguiente:

$$f(x) = (200 - x)(0{,}40 + 0{,}01x) \rightarrow f(x) = -0{,}1x^2 + 1{,}60x + 80$$

El beneficio máximo se encontrará en el vértice de la parábola:

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-1{,}60}{2 \cdot (-0{,}01)} = 80 \rightarrow f(80) = 144$$

Para obtener el máximo beneficio, las naranjas se deberán vender, tras 80 días, por 144 €.

Reflexiona

34 **a) Calcula c para que la recta $3x - 5y = c$ pase por el punto (–2, 4).**

b) Calcula b para que la recta $2x + by = -11$ pase por el punto (2, –5).

c) Halla k para que la parábola $y = kx^2 - 2x + 3$ pase por el punto (–1, 0).

d) Halla el valor de a para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + 2x + 3$ tenga su vértice en el punto de abscisa $x = 2$.

a) El punto (–2, 4) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$3 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = c \rightarrow c = -26$

b) El punto (2, –5) tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$2 \cdot 2 + b \cdot (-5) = -11 \rightarrow b = 3$

c) Sustituimos el punto en la parábola, para hacer que cumpla la ecuación, y despejamos k:

$k + 2 + 3 = 0 \rightarrow k = -5$

d) Sustituimos el punto en la ecuación del vértice para hallar el coeficiente a:

$p = -\frac{2}{2a} = 2 \rightarrow a = \frac{-1}{2}$

35 **¿Verdadero o falso?**

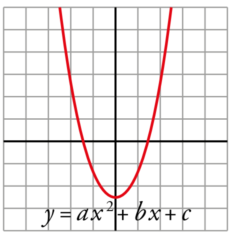
a) $a > 0$

b) $c = 0$

c) $c < 0$

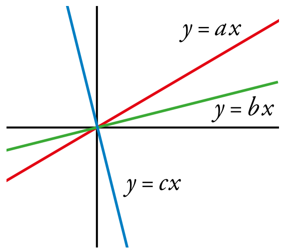
d) $b^2 - 4ac > 0$

e) $b = 0$



a) Verdadero b) Falso c) Verdadero d) Verdadero e) Verdadero

36 **¿Verdadero o falso?**



a) $a > 0$ **b)** $b > 0$

c) $c > 0$ **d)** $a > b$

e) $c < b$ **f)** $c > a$

g) $-c > a$ **h)** $b > -c$

a) Verdadero b) Verdadero c) Falso d) Verdadero e) Verdadero

f) Falso g) Verdadero h) Falso

37 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) Se puede obtener la ecuación de una recta sabiendo su pendiente y el punto de corte con el eje *Y*.

b) Con los puntos de corte con los ejes siempre es posible obtener la ecuación de una recta.

c) La pendiente de una recta es lo que aumenta la x cuando la y aumenta 1.

d) La pendiente de una recta es lo que aumenta la y cuando la x aumenta 1.

e) Si una parábola corta al eje *X* en dos puntos, su vértice está entre medias de estos puntos.

a) Verdadero. Tenemos la pendiente y un punto de la recta, suficiente para hallar su ecuación.

b) Verdadero. Tendríamos un par de puntos con los que hallar la pendiente y la ecuación de la recta.

c) Falso. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.

d) Verdadero. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.

e) Verdadero. Los dos puntos de corte con el eje *X* son simétricos, por lo que entre medias se encontrará el vértice.

38 **Explica por qué el siguiente razonamiento es correcto:**

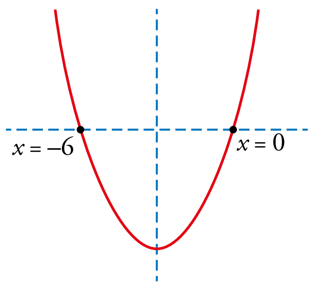
Para hallar la abscisa del vértice de la parábola de ecuación $y = x^2 + 6x - 7$, le quito el término independiente, –7, e igualo la y a 0. Así obtengo:

$$x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(x + 6) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ y } x = -6$$

El vértice está en medio, es decir, $x = -3$.

- Quitar el término independiente, –7, e igualar la y a 0 es lo mismo que buscar los puntos de corte de la parábola con la recta $y = -7$.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 6x - 7 \\ y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 + 6x - 7 = -7 \rightarrow x^2 + 6x = 0 \rightarrow x\,(x + 6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$

- 

Como las parábolas son simétricas respecto a una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y, la abscisa del vértice está en el punto medio de x_1 y x_2, es decir, en $x_0 = -3$.

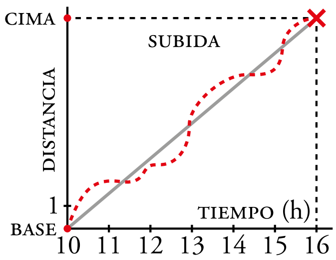
Reflexiona

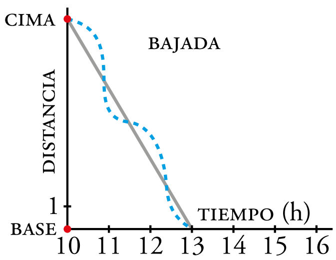
Subir y Bajar

- **Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en el refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.**

  ¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?

  Observa las gráficas de la derecha y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.

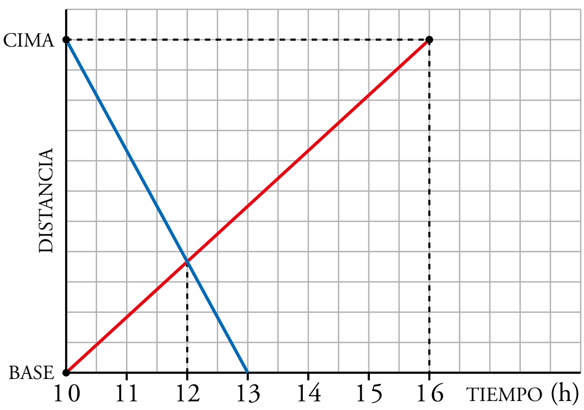




Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.



Piensa y decide

¿Cual es cual?

- **Cada gráfica representa dos vehículos que van a velocidad constante. Así, la función que relaciona la distancia y el tiempo, en cada vehículo, es una recta. Asocia cada enunciado con una gráfica:**

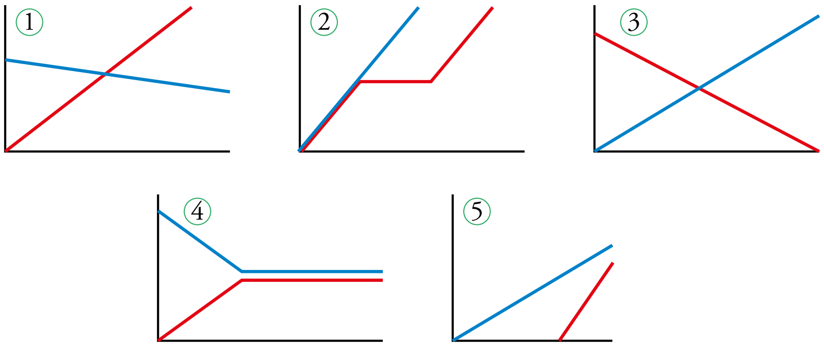
  Ⓐ **Un coche partió y una moto salió en su persecución.**

  Ⓑ **Un coche va, otro viene, y chocan.**

  Ⓒ **Un coche va, un camión viene, y se cruzan.**

  Ⓓ **Un coche se acerca y otro se aleja.**

  Ⓔ **Dos autobuses salen juntos y uno de ellos hace un descanso.**



A ↔ 5 B ↔ 4 C ↔ 1 D ↔ 3 E ↔ 2

Página 187

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Fátima ha invitado a diez personas a su fiesta de cumpleaños y les propone un acertijo con premio:**

  «Se llevará la caja de bombones quien averigüe, sin abrirla, cuántos bombones contiene. Doy tres pistas:

  — Hay menos de cinco docenas.

  — Están ordenados en filas de nueve.

  — Si se repartieran entre los presentes, sobraría uno».

  ¿Cuántos bombones contiene la caja?

  — Hay menos de 5 docenas $\to$ $5 \cdot 12 = 60$. Hay menos de 60 bombones.

  — El número de bombones tiene que ser un múltiplo de 9 menor que 60. Por tanto, hay las siguientes posibilidades:

  9 18 27 36 45 54

  — El la fiesta hay 10 invitados más Fátima, es decir, hay 11 personas. Por tanto, el número de bombones tiene que ser una unidad mayor que un múltiplo de 11:

  12 23 34 45 56

  El único número que verifica todas las condiciones es 45. La caja contiene 45 bombones.

- **a) Tienes estas tres monedas:**

  ¿Cuántas cantidades de dinero distintas puedes formar con ellas?

  b) ¿Y si tuvieras estas cinco monedas?

  a) Puedes poner una moneda y obtendrías:

   0,10 €;  0,20 € y  0,50 €

  Con dos monedas, obtendrías:

  0,10 + 0,20 = 0,30 € 0,10 + 0,50 = 0,60 € 0,20 + 0,50 = 0,70 €

  Con tres monedas, obtendrías:

   0,10 + 0,20 + 0,50 = 0,80 €

  En total, son 7 cantidades distintas de dinero.

  Si añadimos la cantidad 0 € (no tenemos ninguna moneda) serían 8 posibles cantidades.

b) Tomando una moneda, hay 5 posibilidades, una por cada moneda. Tomando dos monedas hay 10 posibilidades:

 10 cént. + 20 cént.	 20 cént. + 50 cént.	 50 cént. + 1 €	 1 € + 2 €
 10 cént. + 50 cént.	 10 cént. + 1 €	 50 cént. + 2 €	
 10 cént. + 1 €	 20 cént. + 2 €		
 10 cént. + 2 €			

AUTOEVALUACIÓN

1 **Asocia cada una de estas funciones lineales con su ecuación y escribe su pendiente:**

a) $y = 3x - 4$

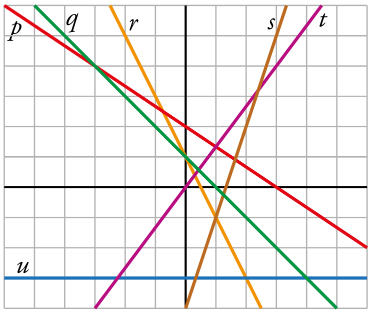
b) $y = -2x + 1$

c) $y = (4/3)x$

d) $y = -2/3x + 2$

e) $y = -3$

f) $y = -x + 1$



a) Recta s, $m = 3$ b) Recta r, $m = -2$ c) Recta t, $m = 4/3$

d) Recta p, $m = -2/3$ e) Recta u, $m = 0$ f) Recta q, $m = -1$

2 **Representa estas funciones lineales y escribe la ecuación de las tres últimas:**

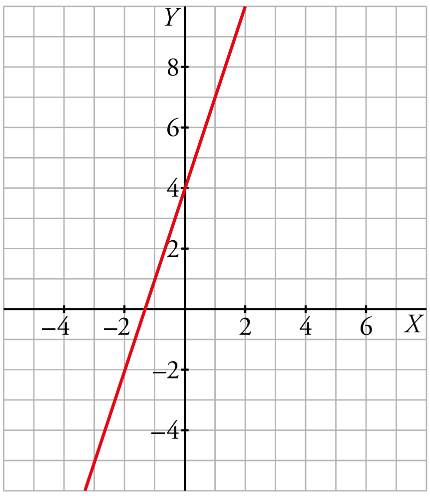
a) $y = 3x + 4$ **b)** $3x + 2y = 5$

c) **Recta de pendiente 1/4 que pasa por (3, 0).**

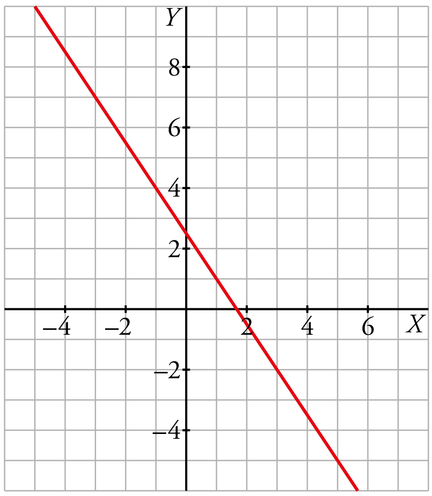
d) **Recta que pasa por los puntos (4, 1) y (–2, 4).**

e) **Función de proporcionalidad que pasa por (4, –3).**

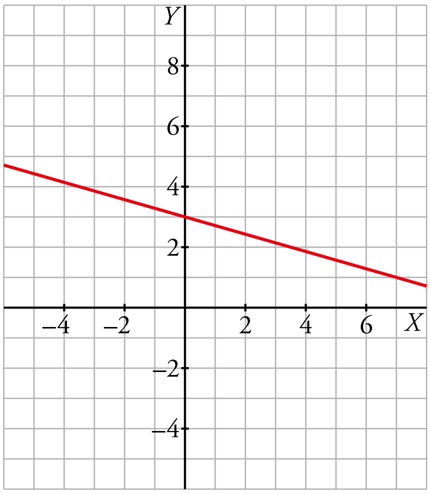
a) $y = 3x + 4$



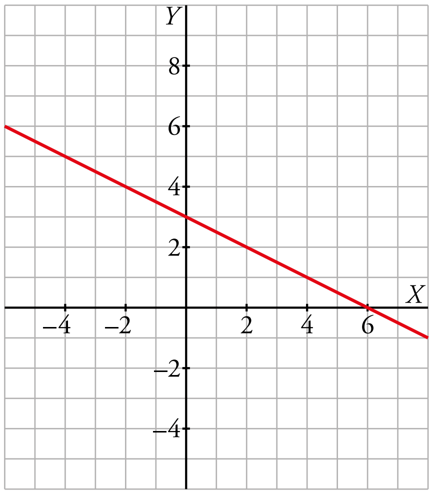
b) $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$



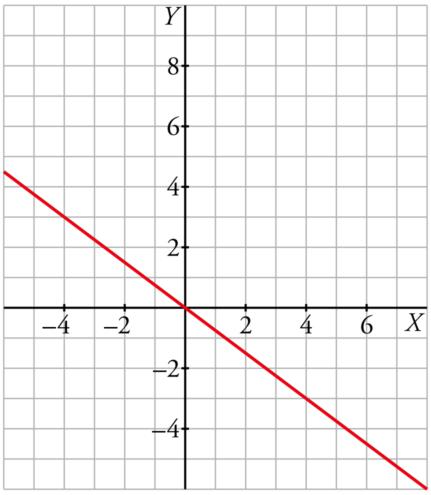
c) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$



d) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2};\ y = -\frac{1}{2}x + 3$



e) La función pasa por (0, 0). $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{4};\ y = -\frac{3}{4}x$



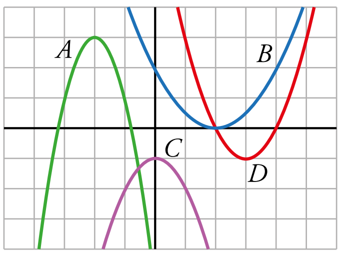
3 **Asocia cada ecuación con su parábola:**

$y = -x^2 - 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$y = -2x^2 - 8x - 5$

$y = x^2 - 6x + 8$



A $\rightarrow$ $y = -2x^2 - 8x - 5$

B $\rightarrow$ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

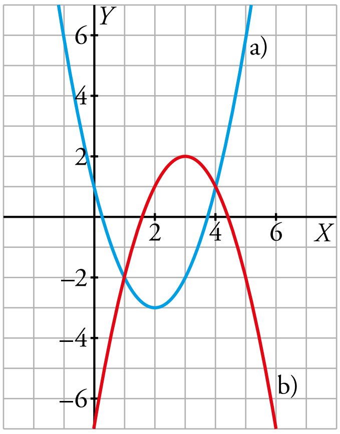
C $\rightarrow$ $y = -x^2 - 1$

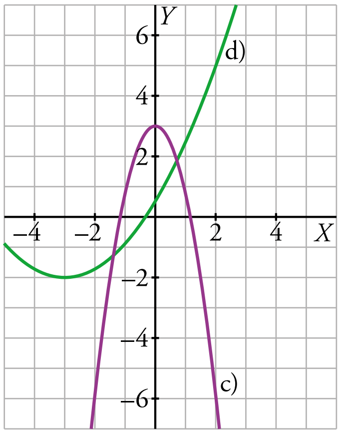
D $\rightarrow$ $y = x^2 - 6x + 8$

4 **Representa estas parábolas:**

a) $y = x^2 - 4x + 1$ **b)** $y = -x^2 + 6x - 7$

c) $y = -2x^2 + 3$ **d)** $y = (1/3)x^2 + 2x + 1$





5 **Hoy hay 20 °C, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura desciende, aproximadamente, 6 °C por cada kilómetro de ascensión.**

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km? ¿Cuánto habremos ascendido si estamos a 11 °C?

b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

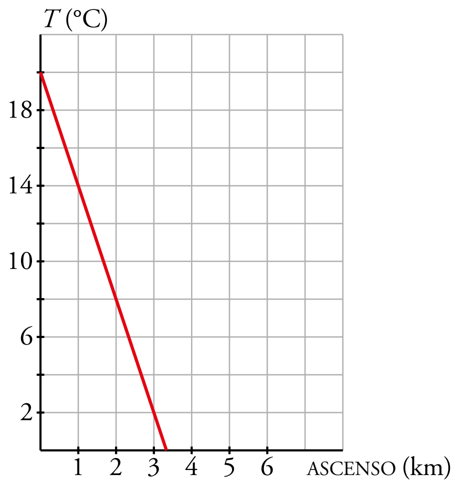
a) $20 - 6 \cdot 3 = 2°$

Si estamos a 11 °C habremos ascendido 1,5 km.

b) Pasa por (0, 20) y (3, 2).

$$m = \frac{2 - 20}{3 - 0} = -3$$

$$y = 20 - 3x$$



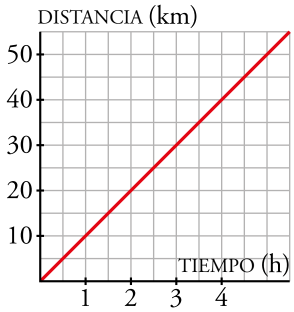
6 **Halla la ecuación para cada uno de estos enunciados y representa las funciones correspondientes:**

a) Begoña empieza ahora a correr a 10 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?

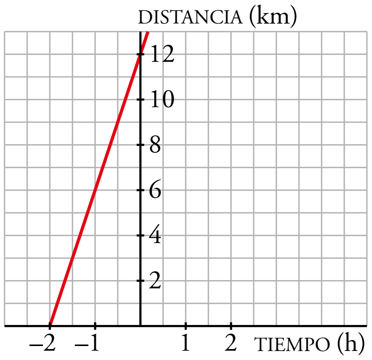
b) Andrés salió de casa hace dos horas a 6 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?

c) Mariajo sale a 4 km/h desde su casa hacia la mía, que está a 18 km. ¿A qué distancia se encontrará de mi casa dentro de t horas?

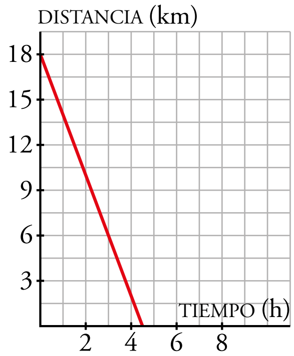
a) $d = 10t$



b) $d = 6(t + 2) \rightarrow d = 6t + 12$



c) $d = 18 - 4t$



7 **Hace dos horas, Bárbara salió en bici de su casa hacia la de Víctor a 15 km/h. Víctor sale ahora andando a 6 km/h en su busca. Sabiendo que viven a 58 km y tomando como origen cuando salió Víctor:**

a) Expresa mediante dos funciones la distancia de cada uno a casa de Víctor.

b) Representa, en unos ejes coordenados, las dos rectas correspondientes a las funciones. Indica el punto de corte de ambas rectas y lo que representa.

c) Sabiendo que Bárbara salió de su casa a las 8:00 a.m., ¿a qué hora y a qué distancia de la casa de Bárbara se encuentran?

a) Llamamos d a la distancia de cada uno a casa de Víctor.

Bárbara: $d = 28 - 15 \cdot t$

Cuando sale Víctor, Bárbara lleva 2 h moviéndose a 15 km/h, es decir, ha hecho 30 km y ya está a 28 km de la casa de Víctor.

Víctor: $d = 6 \cdot t$

b) Calculamos el punto de corte:

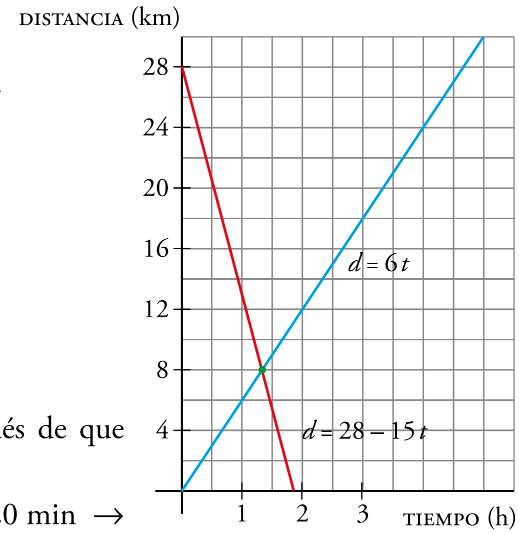
$$\left.\begin{array}{l} d = 28 - 15t \\ d = 6t \end{array}\right\} \rightarrow 28 - 15t = 6t \rightarrow 28 = 21t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} \text{ h}$$

$$d = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8 \text{ km}$$

Punto de corte: $\left(\frac{4}{3}, 8\right)$

Significa que se encuentran 1 h 20 min después de que salga Víctor a 8 km de su casa.



c) Sale a las 8:00 am, se mueve dos horas más 1 h 20 min $\rightarrow$ $\rightarrow$ 11:20 am.

Lleva 30 km y hace otros 8 km $\rightarrow$ 38 km.

10 PROBLEMAS MÉTRICOS EN EL PLANO

Página 191

Resuelve

1 **Busca información sobre siete grandes geómetras de la antigua Grecia. Puedes completarla con información de Eratóstenes e Hipatia.**

Tales de Mileto (600 a. C.). Se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico, como el teorema que lleva su nombre.

Pitágoras (572 a. C.). Fundó la escuela pitagórica, a la que se le atribuye la demostración del teorema de Pitágoras y, como consecuencia, el descubrimiento de los números irracionales que contradecían la doctrina básica de la escuela.

Pappus de Alejandría (300 a. C.). Hizo anotaciones al teorema de Pitágoras y demostró que el hexágono es la forma geométrica que almacena mayor cantidad de miel utilizando menor cantidad de cera.

Euclides (300 a. C.). Se le conoce, sobre todo, por su obra *Elementos*, que durante más de 20 siglos fue la base de las matemáticas en todo el mundo.

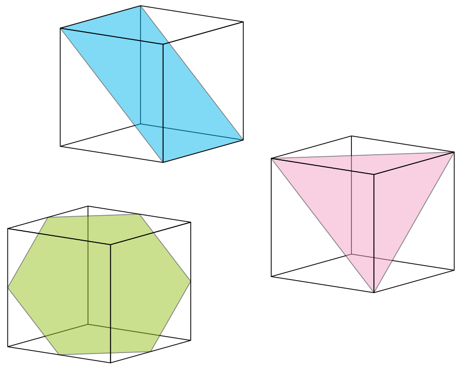
Arquímedes de Siracusa (287 a. C.). Elaboró un método para calcular una aproximación del valor de π, la proporción entre el diámetro y la longitud de una circunferencia.

Erastótenes (276 a. C.). Fue el primero en medir la longitud de la Tierra, formulando dos hipótesis muy atrevidas para su época: la Tierra tiene forma esférica y los rayos del Sol son paralelos. También conocemos su criba para encontrar números primos.

Apolonio de Perga (262 a. C.). Estudió la familia de curvas conocidas como cónicas y descubrió muchas de sus propiedades fundamentales. Las cónicas son importantes en muchos campos de la física; por ejemplo, en las órbitas de los planetas alrededor del Sol.

Hipatia de Alejandría (370). Escribió sobre geometría, álgebra y astronomía, mejoró el diseño de los antiguos astrolabios e inventó un densímetro.

2 **De las tres secciones del cubo que ves en la página de la izquierda, ¿cuál crees que tiene mayor perímetro? ¿Y mayor área? Cuando termines la unidad, sabrás contestar con seguridad a estas cuestiones.**



Tomamos como medida de la arista del cubo 1 m. Las diagonales de sus caras miden entonces $\sqrt{2}$ m.

Rectángulo. Su base coincide con la diagonal de las caras de los lados del cubo, $\sqrt{2}$ m, y su altura coincide con la arista, 1 m. Por tanto:

$P = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4{,}83$ m $\qquad\qquad A = \sqrt{2} \approx 1{,}41$ m^2

Triángulo. Es equilátero y su lado coincide con la diagonal de las caras del cubo, $\sqrt{2}$ m.

$P = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ m

Calculamos su altura para hallar el área: $h = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \dfrac{2}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ m

$$A = \frac{\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87 \text{ m}^2$$

Hexágono. Los vértices del hexágono coinciden con los puntos medios de las aristas del cubo.

Calculamos su lado: $l = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m

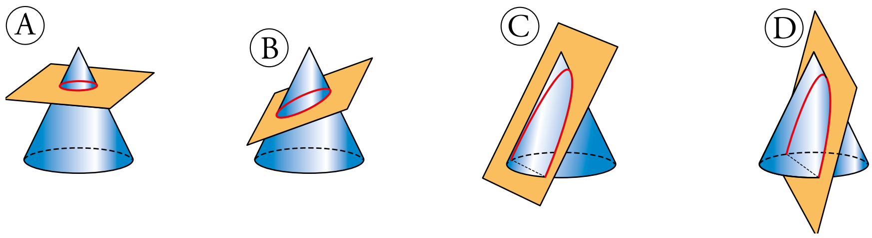
Ahora el perímetro: $P = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ m

Recordando que en los hexágonos regulares coinciden las medidas del radio y el lado, calculamos la apotema: $ap = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ m

Por último, calculamos su área: $A = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{4}}{2} = \dfrac{3\sqrt{12}}{8} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}30$ m^2

Tras estos resultados, concluimos que el rectángulo es la sección con mayor perímetro y mayor área.

3 **¿Qué cónica crees que se obtiene en cada caso?**



A → Circunferencia $\qquad$ B → Elipse

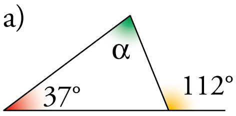
C → Hipérbola $\qquad$ D → Parábola

1 RELACIONES ANGULARES

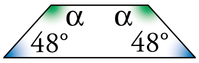
Página 192

1 **Halla el valor de cada ángulo α:**

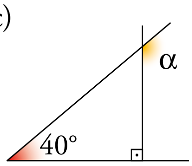
a)



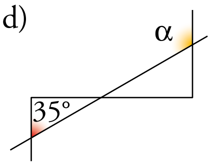
b)



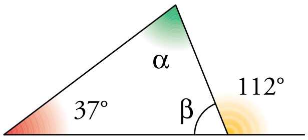
c)



d)



a)

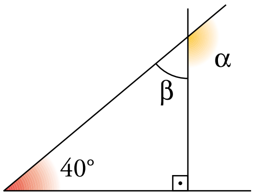


$\beta = 180° - 112° = 68°$

$\alpha = 180° - 37° - 68° = 75°$

b) $2\alpha = 360° - 48° \cdot 2 \rightarrow \alpha = 132°$

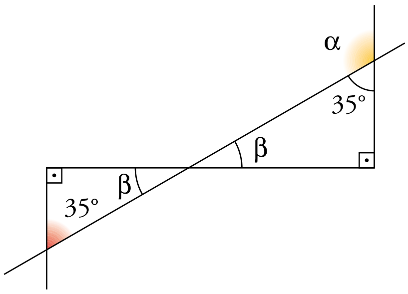
c)



$\beta = 180° - 90° - 40° = 50°$

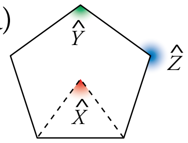
$\alpha = 180° - 50° = 130°$

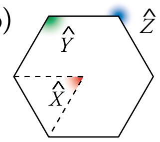
d)

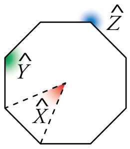


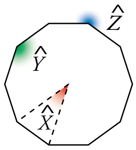
$\alpha = 180° - 35° = 145°$

2 **Calcula $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ en estos polígonos regulares:**

a) 

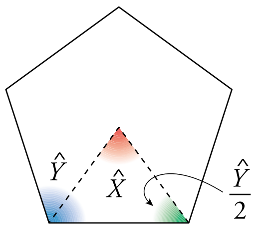
b) 

c) 

d) 

a) $\hat{X}$ es un ángulo central del pentágono regular.

Por tanto, $\hat{X} = \dfrac{360°}{5} = 72°$.



$$\frac{\widehat{Y}}{2} + \frac{\widehat{Y}}{2} + \hat{X} = 180°$$

$$\hat{Y} = 180° - \hat{X} = 180° - 72° = 108°$$

$\hat{Z} = 360° - \hat{Y} = 360° - 108° = 252°$

b) $\hat{X} = 360° : 6 = 60°$

$\hat{Y} = \dfrac{(6-2) \cdot 180°}{6} = 4 \cdot 30° = 120°$

$\hat{Z} = 360° - 120° = 240°$

c) $\hat{X} = 360° : 8 = 45°$

$\hat{Y} = \dfrac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$

$\hat{Z} = 360° - 135° = 225°$

d) $\hat{X}$ es un ángulo central del decágono regular.

Por tanto, $\hat{X} = \dfrac{360°}{10} = 36°$.

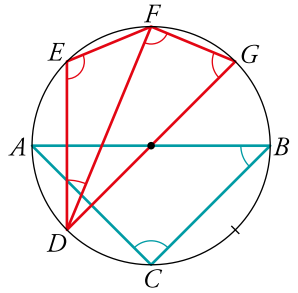
$\hat{Y} = \dfrac{180° \cdot (10-2)}{10} = 144°$; $\hat{Z} = 360° - 144° = 216°$

Página 193

3 **¿Cuál es la medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia?**

Di el valor de los ángulos

$\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{FDE}$, $\widehat{DEF}$, $\widehat{DFG}$, $\widehat{FGD}$



La medida angular de cada uno de los ocho arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\dfrac{360°}{8} = 45°$.

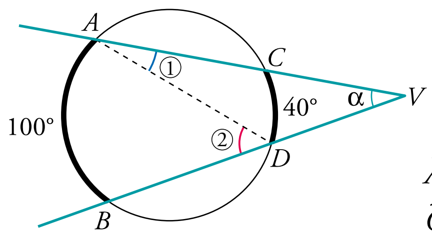
$\widehat{ABC} = \dfrac{2 \cdot 45°}{2} = 45°$ $\widehat{DFG} = \dfrac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$ $\widehat{ACB} = \dfrac{4 \cdot 45°}{2} = 90°$

$\widehat{FDE} = \dfrac{45°}{2} = 22°\ 30'$ $\widehat{FGD} = \dfrac{3 \cdot 45°}{2} = 67°\ 30'$ $\widehat{DEF} = \dfrac{5 \cdot 45°}{2} = 112°\ 30'$

4 **Halla:**

a) $\widehat{CAD}$ = ① **b)** $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{ADV}$ **d)** $\widehat{AVD} = \alpha$



$\overset{\frown}{AB} = 100°$

$\overset{\frown}{CD} = 40°$

a) $\widehat{CAD}$ = ① $= \dfrac{40°}{2} = 20°$

b) $\widehat{ADB}$ = ② $= \dfrac{100°}{2} = 50°$

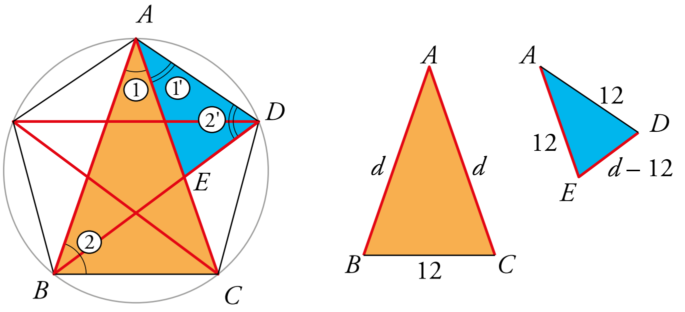
c) $\widehat{ADV} = 180° -$ ② $= 180° - 50° = 130°$

d) $\widehat{AVD} = 180° -$ ① $- 130° = 180° - 20° - 130° = 30°$

2 ▶ SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

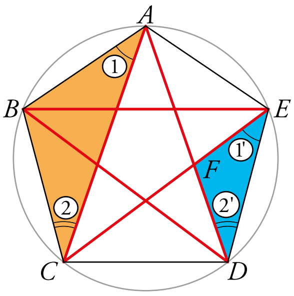
Página 195

1 **Repite el razonamiento del ejercicio resuelto, pero suponiendo ahora que el lado del pentágono mide 12 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?**



$$\frac{d}{12} = \frac{12}{d-12} \rightarrow d^2 - 12d = 144 \rightarrow d = 6 + 6\sqrt{5} = 19{,}4 \text{ cm}$$

2 **Prueba que los triángulos *ABC* y *EFD* del pentágono de arriba son semejantes. A partir de esa semejanza, vuelve a obtener la relación entre *d* y *l*.**

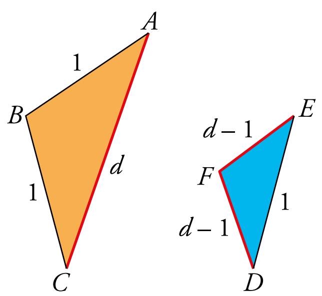


① = ①' porque están inscritos en la circunferencia y abarcan arcos iguales.

② = ②' por el mismo motivo.

Por tanto, los triángulos *ABC* y *EFD* son semejantes y sus lados son proporcionales.

Tomamos como unidad el lado del pentágono, $l = 1$. Además, $\overline{EF} = \overline{FD} = d - 1$.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{1}{d-1} = \frac{d}{1} \rightarrow d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$$

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomamos la solución positiva.

La relación pedida es: $\frac{d}{l} = \frac{d}{1} = d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$

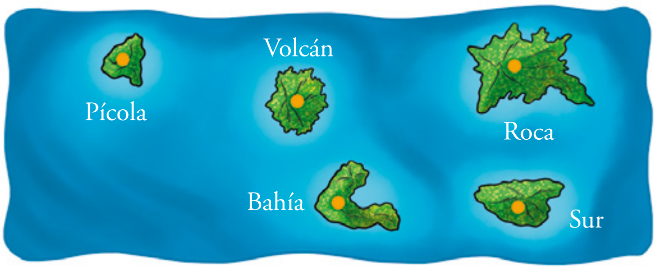
3 FIGURAS SEMEJANTES. ESCALAS

Página 196

3 **a) Teniendo en cuenta que Isla Roca e Isla Volcán distan 10 km, calcula la escala del mapa.**

b) Halla la distancia real entre Roca y Bahía.

c) Isla Tortuga no se ve, ya que se encuentra a 45 km al norte de Isla Volcán. ¿Qué longitud representa dicha distancia en el mapa?



a) La distancia en el mapa entre las islas Volcán y Roca es de 3 cm. 10 km = 1 000 000

$$\frac{3}{1\,000\,000} \to \text{Escala } 3 : 1\,000\,000$$

b) La distancia entre Roca y Bahía en el mapa es de 3 cm.

Por tanto, su distancia real son 10 km.

c) $\dfrac{3}{1\,000\,000} = \dfrac{x}{4\,500\,000} \to x = \dfrac{3 \cdot 4\,500\,000}{1\,000\,000} = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5$

En el mapa, 45 km, representan 13,5 cm.

4 TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 197

1 **En los siguientes triángulos rectángulos, se dan dos catetos y se pide la hipotenusa (si su medida no es exacta, dala con una cifra decimal):**

a) 37 cm y 45 cm **b) 16 cm y 30 cm**

a = hipotenusa

a) $a = \sqrt{37^2 + 45^2} = \sqrt{3\,394} \approx 58{,}3$ cm b) $a = \sqrt{16^2 + 30^2} = \sqrt{1\,156} = 34$ cm

2 **En los siguientes triángulos rectángulos, se da la hipotenusa y un cateto, y se pide el otro cateto (exactamente o con una cifra decimal):**

a) 45 cm y 37 cm **b) 39 cm y 15 cm**

c = cateto que falta

a) $c = \sqrt{45^2 - 37^2} = \sqrt{656} \approx 25{,}6$ cm b) $c = \sqrt{39^2 - 15^2} = \sqrt{1\,296} = 36$ cm

3 **Averigua cómo son los triángulos de lados:**

a) 7 cm, 8 cm, 11 cm **b) 11 cm, 17 cm, 15 cm**

c) 34 m, 16 m, 30 m **d) 65 m, 72 m, 97 m**

e) 12 cm, 13 cm, 20 cm **f) 15 m, 36 m, 39 m**

a) $7^2 + 8^2 = 113$; $11^2 = 121$

Como $11^2 > 7^2 + 8^2$, entonces el triángulo es obtusángulo.

b) $11^2 + 15^2 = 346$; $17^2 = 289$

Como $17^2 < 11^2 + 15^2$, entonces el triángulo es acutángulo.

c) $16^2 + 30^2 = 1\,156$; $34^2 = 1\,156$

Como $34^2 = 16^2 + 30^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

d) $65^2 + 72^2 = 9\,409$; $97^2 = 9\,409$

Como $97^2 = 65^2 + 72^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

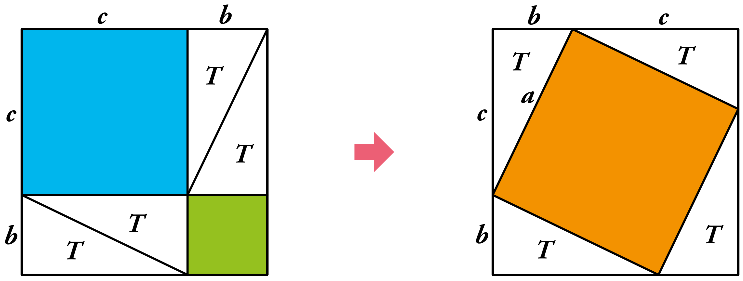
e) $12^2 + 13^2 = 313$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 12^2 + 13^3$, entonces el triángulo es obtusángulo.

f) $15^2 + 36^2 = 1\,521$; $39^2 = 1\,521$

Como $39^2 = 15^2 + 36^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

4 **Demuestra el teorema de Pitágoras a partir de las dos descomposiciones del cuadrado de lado $b + c$ que aparecen arriba. Para ello, empieza probando que el cuadrilátero naranja es un cuadrado de lado a.**



Puesto que los cuatro triángulos blancos son rectángulos de catetos b y c, sus hipotenusas, que coinciden con el lado del cuadrado, miden a. Por tanto, la figura naranja es un cuadrado de lado a y área a^2.

En el otro cuadrado vuelven a aparecer los mismos triángulos blancos, dejando ahora un cuadrado verde de lado b, cuya área será b^2, y otro azul de lado c y área c^2.

Por último, nos fijamos en los dos cuadrados completos de lado $b + c$. Si a dos cuadrados iguales les quitamos la misma parte (los cuatro triángulos blancos), la parte que queda también será igual. En este caso, en el primer cuadrado nos quedan dos cuadrados más pequeños, el verde y el azul, de áreas b^2 y c^2 y en el segundo cuadrado queda el cuadrado naranja de área a^2.

Por tanto, $b^2 + c^2 = a^2$.

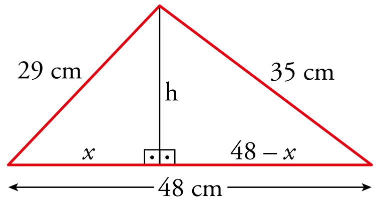
5 ▸ APLICACIÓN ALGEBRAICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 198

1 Averigua si el triángulo de lados 29 cm, 35 cm y 48 cm es rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Halla la longitud de la altura sobre el lado mayor.

$29^2 + 35^2 = 2\,066$; $48^2 = 2\,304$

Como $48^2 > 29^2 + 35^2$, el triángulo es obtusángulo.



Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + h^2 = 29^2 \\ (48 - x)^2 + h^2 = 35^2 \end{array}\right\} \text{ Restando: } x^2 - (48 - x)^2 = 29^2 - 35^2$$

Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 20$ cm.

Calculamos h:

$20^2 + h^2 = 29^2 \rightarrow h = 21$ cm

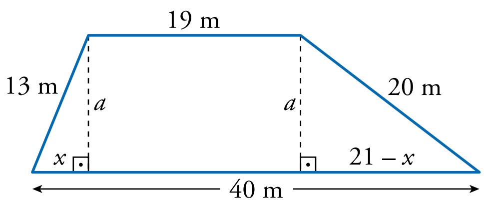
La altura sobre el lado mayor mide 21 cm.

2 Los lados de un trapecio miden 13 m, 20 m, 19 m y 40 m. Los dos últimos son paralelos. Halla la altura del trapecio.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en los dos triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + x^2 = 13^2 \\ a^2 + (21 - x)^2 = 20^2 \end{array}\right\}$$

Restando: $x^2 - (21 - x)^2 = 13^2 - 20^2$



Se resuelve la ecuación y se obtiene $x = 5$ m.

Ahora se obtiene el valor de a: $a^2 + 5^2 = 13^2 \rightarrow a = 12$ m

La altura del trapecio mide 12 m.

6 ▶ ÁREAS DE LOS POLÍGONOS

Página 199

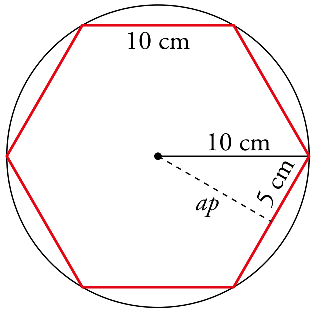
1 Halla el área de un triángulo cuyos lados miden 10 m, 17 m y 21 m.

Aplicamos la fórmula de Herón:

Perímetro = $p = 10 + 17 + 21 = 48$ m; $s = \dfrac{48}{2} = 24$ m

$A = \sqrt{24 \cdot (24-10) \cdot (24-17) \cdot (24-21)} = \sqrt{7\,056} = 84 \text{ m}^2$

2 Halla el área del hexágono regular en el que cada uno de sus lados mide 10 cm.

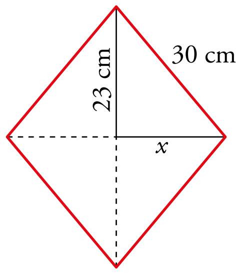


Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar la apotema.

$ap = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$ cm

$A = \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}8 \text{ cm}^2$

3 Halla el área de un rombo de lado 3 dm, sabiendo que una diagonal mide 46 cm.



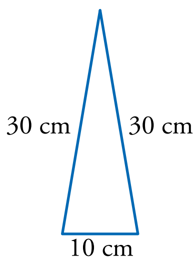
Lado = 3 dm = 30 cm

$x = \sqrt{30^2 - 23^2} = \sqrt{371} \approx 19{,}26$ cm

La otra diagonal mide $2 \cdot 19{,}26 = 38{,}52$ cm

$A = \dfrac{46 \cdot 38{,}52}{2} = 885{,}96 \text{ cm}^2$

4 Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 30 cm y 13 cm. Halla su área.



Los lados iguales del triángulo isósceles miden 30 cm, y el otro lado, 10 cm.

No puede ser de otra forma, porque si los lados iguales miden 10 cm, el otro no podría medir 30 cm.

$(10 + 10 = 20 < 30)$

Aplicamos la fórmula de Herón:

$p = 30 \cdot 2 + 10 = 70$ cm

$s = 35$ cm

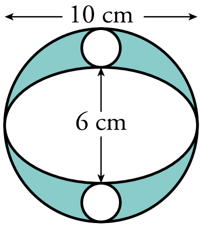
$A = \sqrt{35 \cdot (35-30)^2 \cdot (35-10)} \approx 147{,}9 \text{ cm}^2$

7 ÁREAS DE LAS FIGURAS CURVAS

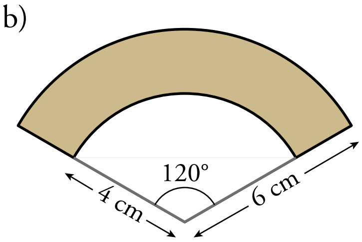
Página 200

1 **Halla el área de la parte coloreada en las figuras siguientes:**

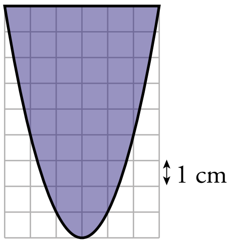
a)



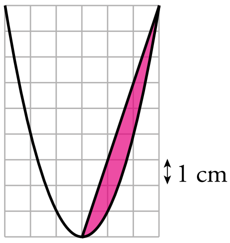
b)

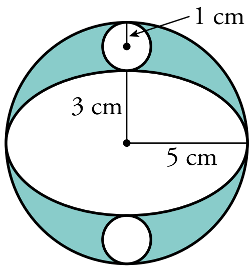


c)



d)





a) $A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 5^2 \approx 78,54 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 1^2 \approx 3,14 \text{ cm}^2$

$A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 5 \cdot 3 \approx 47,12 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78,54 - 2 \cdot 3,14 - 47,12 = 25,14 \text{ cm}^2$

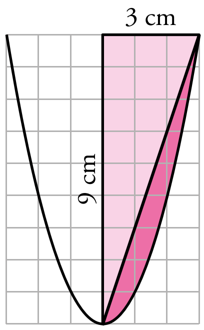
b) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{\pi \cdot 6^2 \cdot 120°}{360°} - \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 120°}{360°} \approx 20,94 \text{ cm}^2$

c) $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{2}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 36 \text{ cm}^2$

d) $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{3 \cdot 9}{2} = 13,5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 36 \text{ cm}^2$ (según el ejercicio anterior)

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = \dfrac{A_{\text{SECTOR PARÁBOLA}}}{2} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{36}{2} - 13,5 = 4,5 \text{ cm}^2$



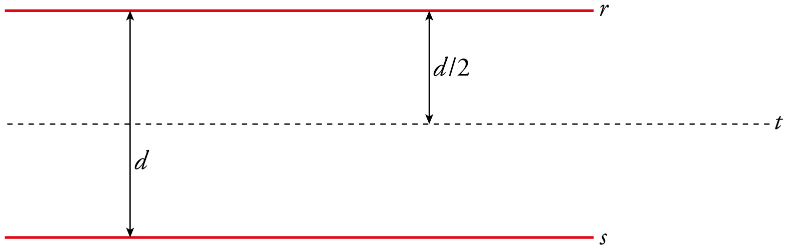
8 LUGARES GEOMÉTRICOS

Página 201

1 Define como lugar geométrico una circunferencia de centro C y radio 8 cm.

La circunferencia de centro C y radio 8 cm es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a C es 8 cm: $\overline{CP} = 8$ cm.

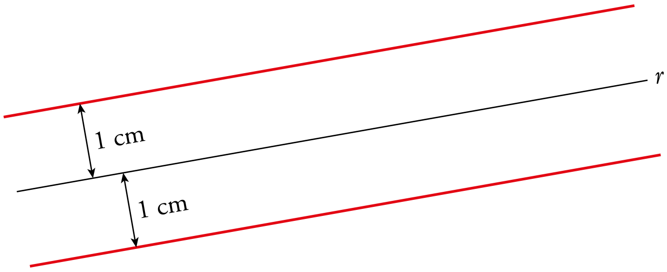
2 Dadas dos rectas paralelas, *r* y *s*, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ambas? Dibújalo en tu cuaderno.



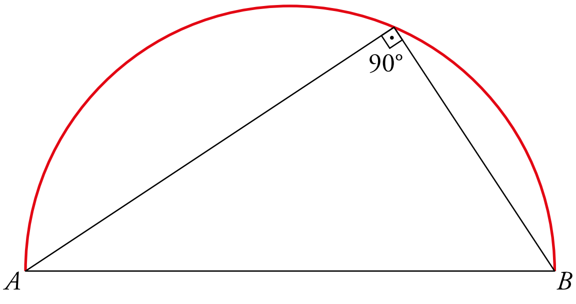
La recta t es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas r y s.

A la recta t se la llama **paralela media** a r y s.

3 Dibuja en negro una recta *r*. Dibuja en rojo el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a *r* es 1 cm. (ATENCIÓN: son dos rectas).



4 Dibuja una circunferencia de diámetro *AB*. Defínela como lugar geométrico (arco capaz de 90°).



La circunferencia de diámetro AB (el arco rojo) es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve el segmento AB bajo un ángulo de 90°. Se llama arco capaz de 90° para el segmento AB.

9 LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

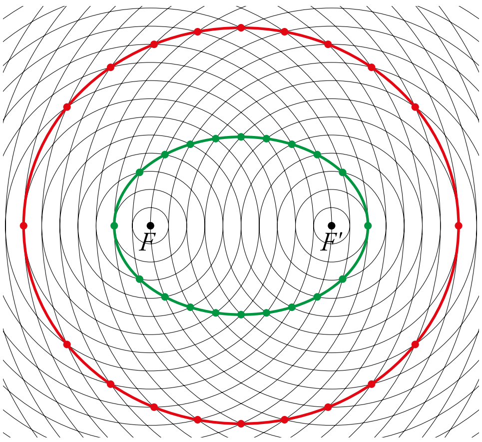
Página 203

1 **Toma de la web una trama como la del ejercicio resuelto 1 y dibuja en ella:**

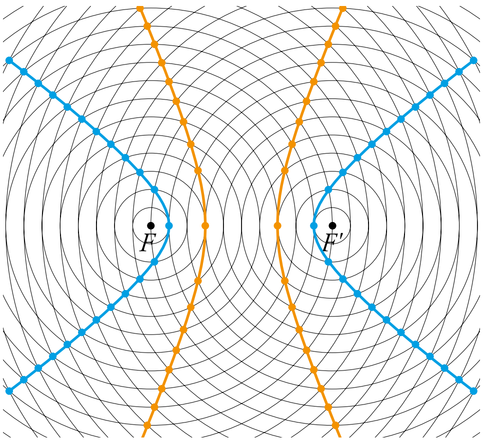
a) Dos elipses con $d = 14$ y $d = 24$.

b) Dos hipérbolas con $d = 8$ y $d = 4$.

a)



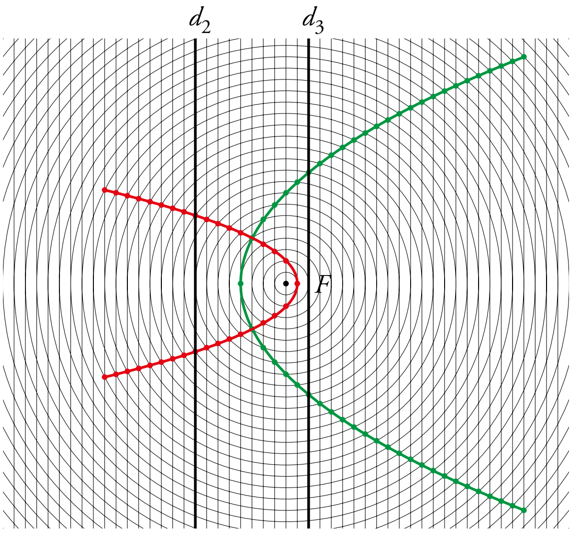
b)



2 **Toma de la web una trama como la del ejercicio resuelto 2 y dibuja en ella:**

a) Una parábola de foco F y directriz d_2.

b) Una parábola de foco F y directriz d_3.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 205

3 Tangente a una circunferencia

Hazlo tú

- **Supón un problema similar, y calcula el radio de la circunferencia si $\overline{OP}$ = 39 cm y $\overline{PT}$ = 36 cm.**

$r = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15$ cm

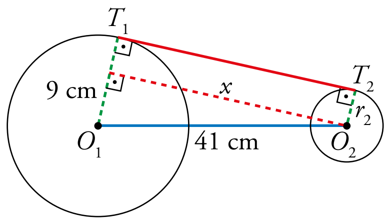
4 Tangente común a dos circunferencias

Hazlo tú

- **Halla la longitud de la tangente suponiendo que los radios miden 15 cm y 6 cm, y que la distancia entre sus centros es de 41 cm.**

La longitud del segmento T_1T_2 es igual que x:

$x = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$ cm



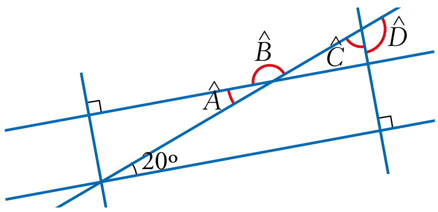
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 206

Practica

Ángulos

1 **Halla el valor de cada ángulo indicado:**



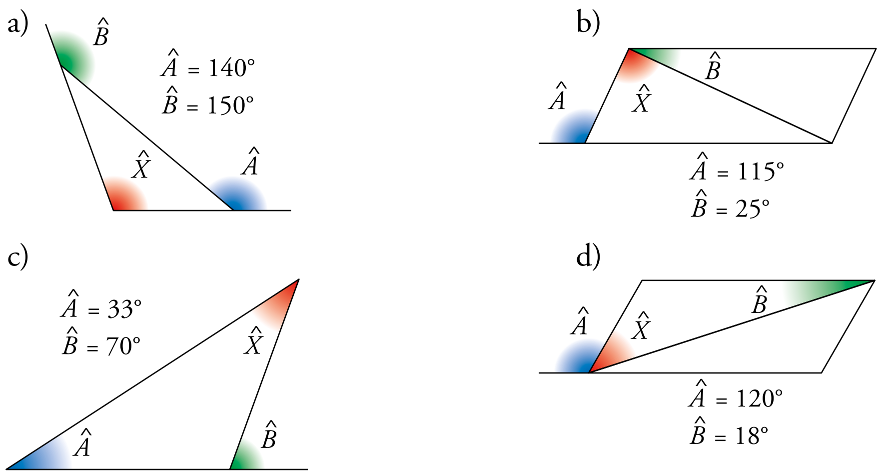
$\hat{A}$ = 20° (alternos interno)

$\hat{B}$ = 180° – 20° = 160°

$\hat{C}$ = 180° – 90° – 20°= 70°

$\hat{D}$ = 180° – 70° = 110°

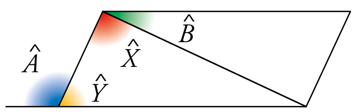
2 **Calcula la medida de $\hat{X}$ en cada caso:**



a) $\hat{A}$ = 140° → 180° – 140° = 40°; $\hat{B}$ = 150° → 180° – 150° = 30°;

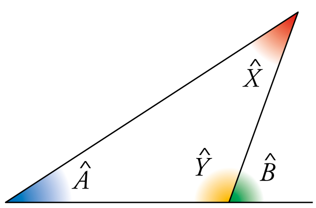
$\hat{X}$ = 180° – 40° – 30° = 110°

b)



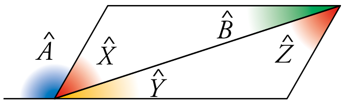
$\hat{Y}$ = 180° – 115° = 65°; $\hat{Z}$ = 180° – 25° – 65° = 90°; $\hat{X}$ = $\hat{Z}$ = 90°

c)



$\hat{Y}$ = 180° – 70° = 110°; $\hat{X}$ = 180° – 110° – 33° = 37°

d)



$$\hat{X} + \hat{Y} = 180° - 120° = 60°;\ \hat{B} + \hat{Z} = 60° \rightarrow \hat{Z} = 60° - 18° = 42°;\ \hat{X} = \hat{Z} = 42°$$

3 **Calcula los ángulos central e interior de un polígono regular de:**

a) 7 lados. **b) 12 lados.** **c) 13 lados.**

d) 15 lados. **e) 20 lados.** **f) 100 lados.**

a) Ángulo central: $\dfrac{360°}{7} \approx 51,43°$

Ángulo interior: $\dfrac{180°\,(7-2)}{7} = \dfrac{180° \cdot 5}{7} \approx 128,57°$

b) Ángulo central: $\dfrac{360°}{12} = 30°$

Ángulo interior: $\dfrac{180°\,(12-2)}{12} = 150°$

c) Ángulo central: $\dfrac{360°}{13} \approx 27,69°$

Ángulo interior: $\dfrac{180°\,(13-2)}{13} \approx 152,31°$

d) Ángulo central: $\dfrac{360°}{15} = 24°$

Ángulo interior: $\dfrac{180°\,(15-2)}{15} = 156°$

e) Ángulo central: $\dfrac{360°}{20} = 18°$

Ángulo interior: $\dfrac{180°\,(20-2)}{20} = 162°$

f) Ángulo central: $\dfrac{360°}{100} = 3,6°$

Ángulo interior: $\dfrac{180°\,(100-2)}{100} = 176,4°$

4 **¿Cuántos lados tiene un polígono regular si su ángulo interior es de 140°? ¿Puede haber un polígono regular cuyo ángulo interior sea 40°? ¿Y uno que tenga un ángulo interior de 150°?**

- Si el ángulo interior es 140°, entonces:

$$140° = \frac{180°\,(n-2)}{n} \rightarrow 140n = 180n - 360 \rightarrow n = \frac{360}{40} = 9$$

El polígono tiene 9 lados.

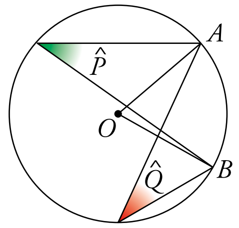
- $40° = \dfrac{180°\,(n-2)}{n} \rightarrow 40n = 180n - 360 \rightarrow n = \dfrac{360}{140} \approx 2,57$

Como n no es un número entero, no existe un polígono cuyo ángulo interior sen 40°.

- $150° = \dfrac{180°\,(n-2)}{n} \rightarrow 150n = 180n - 360 \rightarrow n = \dfrac{360}{30} = 12$

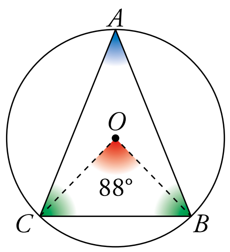
Un polígono regular de 12 lados tiene un ángulo interior de 150°.

5 **Indica cuánto miden los ángulos $\hat{P}$ y $\hat{Q}$, sabiendo que $\widehat{AOB} = 70°$.**



$\hat{P} = \hat{Q} = \dfrac{70°}{2} = 35°$

6 **El triángulo ABC es isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?**



$\hat{A}$ es un ángulo inscrito cuyo central correspondiente es $\widehat{BOC} = 88°$.

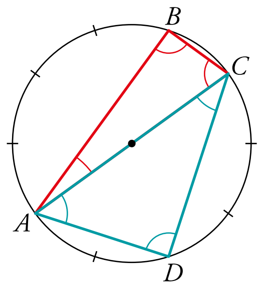
$\hat{A} = 88° : 2 = 44°$

$\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ suman 180° y $\hat{B} = \hat{C}$.

$(180° - 44°) : 2 = 136° : 2 = 68°$

$\hat{A} = 44°$, $\hat{B} = \hat{C} = 68°$

7 **¿Cuál es la medida angular de cada uno de los diez arcos iguales? Halla el valor de los ángulos $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAD}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{ACD}$.**



La medida angular de cada uno de los diez arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia es $\dfrac{360°}{10} = 36°$.

$\widehat{CAB} = \dfrac{36°}{2} = 18°$ $\widehat{CAD} = \dfrac{3 \cdot 36°}{2} = 54°$ $\widehat{ABC} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

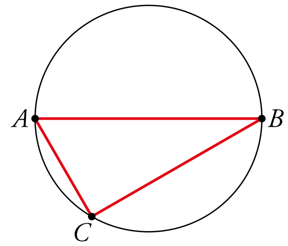
$\widehat{ADC} = \dfrac{180°}{2} = 90°$ $\widehat{BCA} = \dfrac{4 \cdot 36°}{2} = 72°$ $\widehat{ACD} = \dfrac{2 \cdot 36°}{2} = 36°$

8 **Dibuja un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, de modo que los vértices A y B sean extremos de un diámetro y el arco $\overset{\frown}{AC}$ sea la sexta parte de la circunferencia. ¿Cuánto miden sus ángulos?**

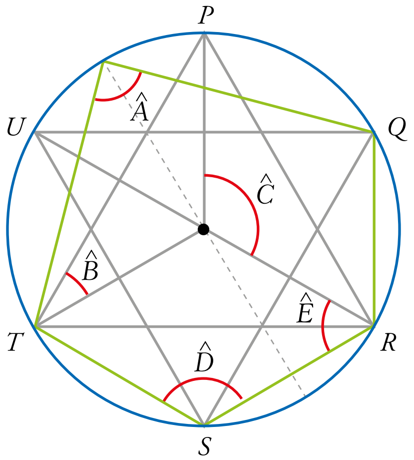
$\overset{\frown}{AC} = 60° \longrightarrow \hat{B} = 30°$

$\overset{\frown}{AB} = 180° \longrightarrow \hat{C} = 90°$

$\hat{A} = 180° - \hat{B} - \hat{C} = 60°$



9 **Calcula los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ y $\hat{E}$ dentro del polígono inscrito en la circunferencia.**



PQRSTU es un hexágono regular.

$\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{QT}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

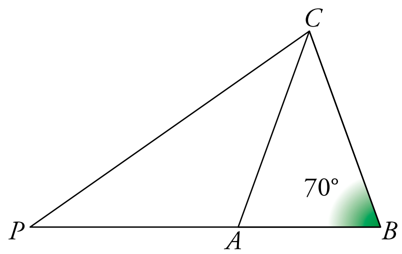
$\hat{B} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

$\hat{C} = \overset{\frown}{PR} = 120°$

$\hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{TR}}{2} = \dfrac{240°}{2} = 120°$

$\hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{SU}}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$

10 **Sabiendo que $\overline{PA} = \overline{AC} = \overline{BC}$, $\hat{B} = 70°$, halla el ángulo $\widehat{PCB}$ en el siguiente triángulo:**



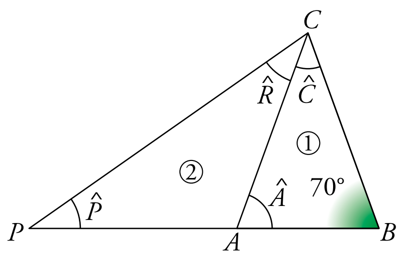
Si $\overline{AC} = \overline{BC}$, el triángulo ABC es isósceles, tiene dos ángulos iguales, $\hat{A} = \hat{B} = 70°$.

El otro ángulo mide $\hat{C} = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$.

Si $\overline{PA} = \overline{AC}$, el triángulo ACP es isósceles, tiene dos ángulos iguales, $\hat{P} = \hat{R}$.

El otro ángulo mide $\hat{Q} = 180° - 70° = 110°$ y, por tanto, $\hat{R} = \dfrac{180° - 110°}{2} = 35°$.

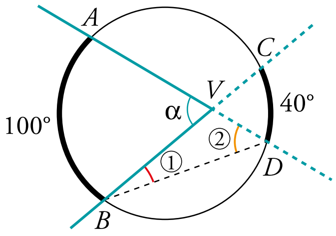
Por último, $\widehat{PCB} = \hat{C} + \hat{R} = 40° + 35° = 75°$.



11 **Halla:**

a) $\widehat{CBD}$ = ①　　**b)** $\widehat{ADB}$ = ②

c) $\widehat{BVD}$　　**d)** $\widehat{AVB} = \alpha$



$\overset{\frown}{AB} = 100°$

$\overset{\frown}{CD} = 40°$

a) $\widehat{CBD}$ = ① $= \dfrac{40°}{2} = 20°$

b) $\widehat{ADB}$ = ② $= \dfrac{100°}{2} = 50°$

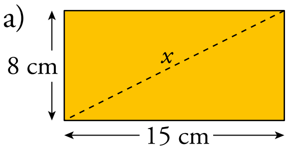
c) $\widehat{BVD}$ = 180° – ① – ② = 180° – 20° – 50° = 110°

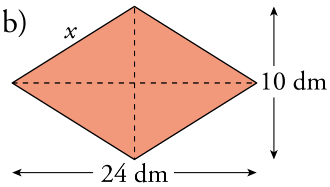
d) $\widehat{AVB} = \alpha = 180° - 110° = 70°$

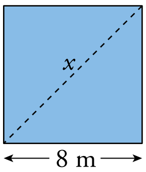
Página 207

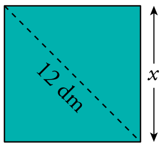
Teorema de Pitágoras

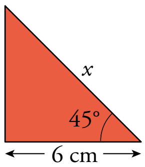
12 Calcula el valor de *x* en cada caso:

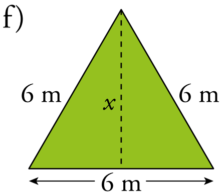
a)


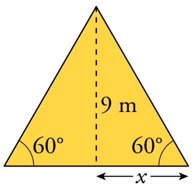
b)


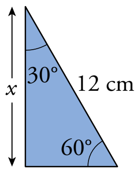
c)


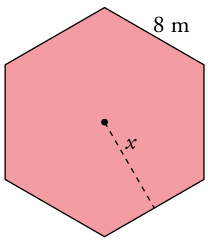
d)


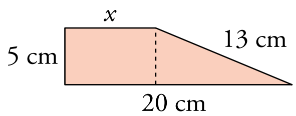
e)


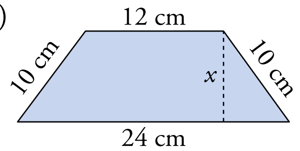
f)


g)


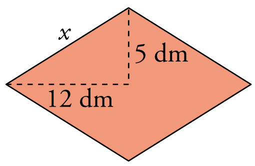
h)


i)


j)


k)


a) $x = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$ cm

b)


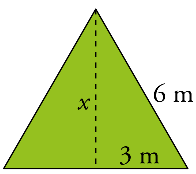
$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ dm

c) $x = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,3$ m

d) $x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow 2x^2 = 144 \rightarrow$

$\rightarrow x = \sqrt{72} \approx 8,5$ dm

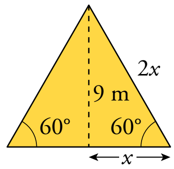
e) Como es un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, el otro tendrá que medir 45° también, por lo que sabemos que el triángulo es isósceles. Así: $x = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8,5$ cm

f)


$x = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} \approx 5,2$ m

g) Como dos de sus ángulos miden 60°, el otro también medirá 60°. Como tiene los tres ángulos iguales, el triángulo es equilátero. Si medio lado mide x, el lado entero medirá $2x$.

$(2x)^2 = x^2 + 9^2 \rightarrow 3x^2 = 81 \rightarrow x = \sqrt{27} \approx 5{,}2$ m

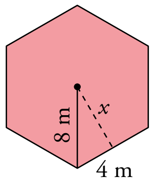


h) El triángulo es la mitad de un triángulo equilátero. Por tanto, utilizando el mismo razonamiento que en el apartado a), el lado que no mide ni 12 cm ni x, es la mitad de 12 cm, es decir, 6 cm. Por tanto:

$x = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} \approx 10{,}4$ cm

i) Como es un hexágono, el radio es igual que el lado. Por eso:

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6{,}9$ cm

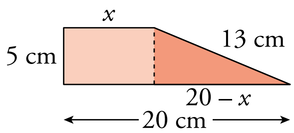


j) Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo:

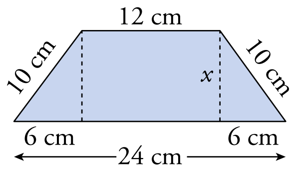
$13^2 = 5^2 + (20 - x)^2 \rightarrow x^2 - 40x + 256 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 32$ cm, $x = 8$ cm

La solución $x = 32$ cm no tiene sentido, ya que $x < 20$. Por tanto, $x = 8$ cm.



k)



$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ cm

13 **Clasifica en rectángulos, acutángulos u obtusángulos los triángulos de lados:**

a) 11 m, 13 m, 20 m. **b) 20 m, 21 m, 29 m.**

c) 25 m, 29 m, 36 m. **d) 7 m, 24 m, 25 m.**

a) $11^2 + 13^2 = 290$; $20^2 = 400$

Como $20^2 > 11^2 + 13^2$, el triángulo es obtusángulo.

b) $20^2 + 21^2 = 841$; $29^2 = 841$

Como $29^2 = 20^2 + 21^2$, el triángulo es rectángulo.

c) $25^2 + 29^2 = 1\,466$; $36^2 = 1\,296$

Como $36^2 < 25^2 + 29^2$, el triángulo es acutángulo.

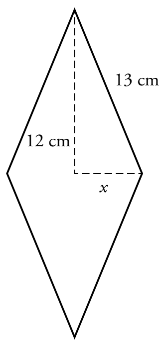
d) $7^2 + 24^2 = 625$; $25^2 = 625$

Como $25^2 = 7^2 + 24^2$, el triángulo es rectángulo.

14 **De un rombo, conocemos una diagonal, 24 cm, y el lado, 13 cm. Halla la otra diagonal y su área.**

$\rightarrow 13^2 = 12^2 + x^2 \rightarrow x = 5$ cm

- La otra diagonal mide 10 cm.
- Calculamos el área: $\dfrac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ cm}^2$



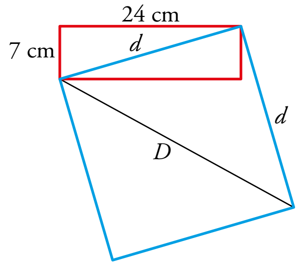
15 **La diagonal de un rectángulo mide 37 cm, y uno de sus lados, 12 cm. Calcula su perímetro.**

$l \to$ lado de falta

$l = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1225} = 35$ cm

Perímetro = $2 \cdot 35 + 2 \cdot 12 = 94$ cm

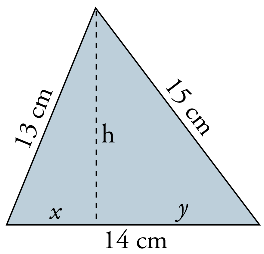
16 **La diagonal de un rectángulo de lados 7 cm y 24 cm mide igual que el lado de un cuadrado. Halla la diagonal de ese cuadrado.**



$d = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$

$D = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1250} \approx 35{,}36$ cm

17 **Halla, con la ayuda de un sistema de ecuaciones, los valores de h, x e y.**



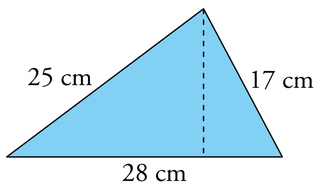
$y = 14 - x$

$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 13^2 \\ h^2 + (14-x)^2 = 15^2 \end{array}\right\}$ Restando, $x^2 - (14-x)^2 = 13^2 - 15^2 \to x^2 - 196 + 28x - x^2 = -56 \to$

$\to x = \dfrac{-56 + 196}{28} = 5$

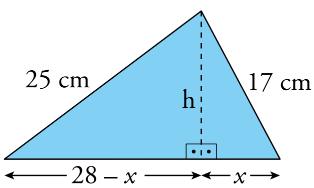
Por tanto, $x = 5$ cm, $h = \sqrt{169 - 25} = 12$ cm, $y = 14 - 5 = 9$ cm.

18 **Calcula la altura de este triángulo, aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que aparecen. Después, halla su área.**

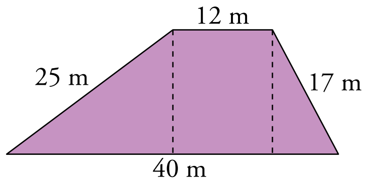


$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 17^2 \\ (28-x)^2 + h^2 = 25^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array}\right\}$

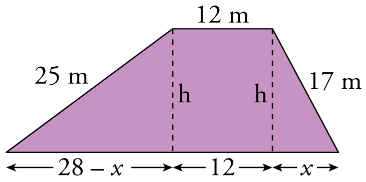
$A = \dfrac{28 \cdot 15}{2} = 210 \text{ cm}^2$



19 **Halla la altura del trapecio siguiente. Después, calcula su área.**

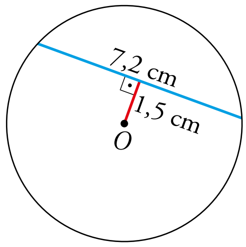


$$\left.\begin{array}{l} 17^2 = h^2 + x^2 \\ 25^2 = h^2 + (28 - x)^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 8 \text{ m} \\ h = 15 \text{ m} \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{40 + 12}{2} \quad A = \frac{40 + 12}{2} \cdot 15 = 390 \text{ m}^2$$

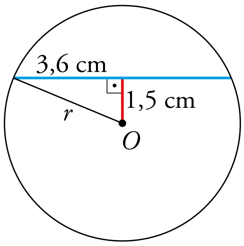


20 **a) Calcula el radio de esta circunferencia.**

b) ¿Cuál será la longitud de una cuerda cuya distancia al centro es 2,9 cm?

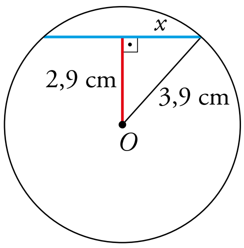


a)



$r = \sqrt{3,6^2 + 1,5^2} = \sqrt{15,21} = 3,9$ cm

b)



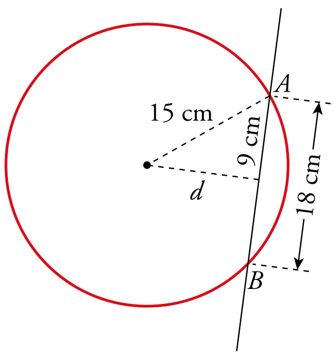
$x = \sqrt{3,9^2 - 2,9^2} = \sqrt{6,8} \approx 2,6$ cm

La longitud de la cuerda será $2 \cdot 2,6 = 5,2$ cm

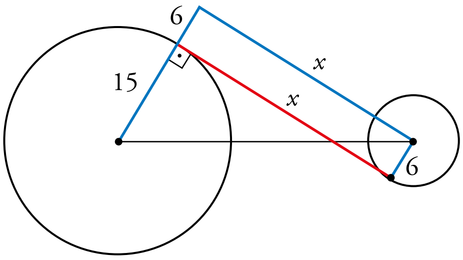
21 **Una circunferencia tiene un radio de 15 cm. Una recta, *r*, corta a la circunferencia en dos puntos, *A* y *B*. La distancia entre *A* y *B* es de 18 cm. ¿Cuál es la distancia del centro de la circunferencia a la recta?**

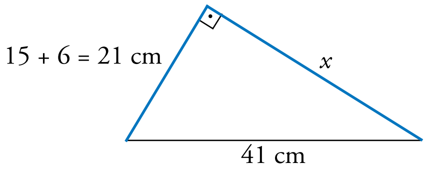
$d = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ cm

La distancia del centro de la circunferencia a la recta es 12 cm.



23 **Halla la longitud del segmento tangente interior común a dos circunferencias de radios 15 cm y 6 cm cuya distancia entre sus centros es de 41 cm.**





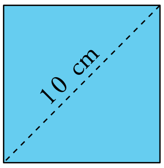
$\boldsymbol{x} = \sqrt{41^2 - 21^2} = \sqrt{1240} \approx 35,21 \text{ cm}$

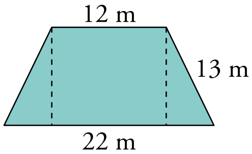
El segmento tangente interior común mide 35,21 cm, aproximadamente.

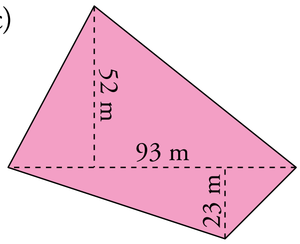
Página 208

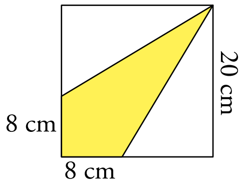
Áreas y perímetros

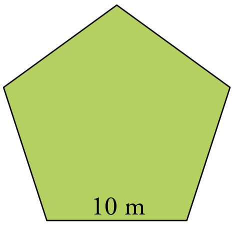
24 Halla el área de la parte coloreada de las figuras siguientes:

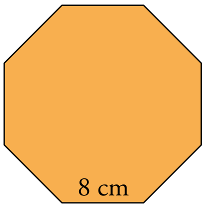
a) 

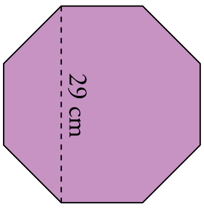
b) 

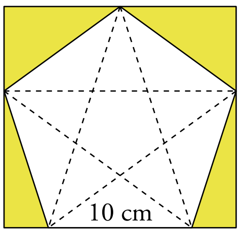
c) 

d) 

e) 

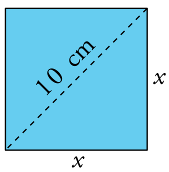
f) 

g) 

h) 

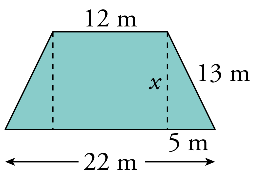
a) $x^2 + x^2 = 10^2 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm

$A = 7{,}1^2 = 50 \text{ cm}^2$



b) $x = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ m

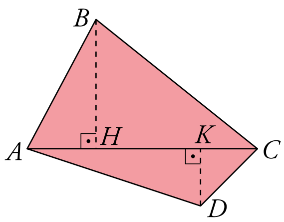
$A = \dfrac{20 + 12}{2} \cdot 12 = 192 \text{ m}^2$



c) $A_{\text{TRIÁNGULO } ABC} = \dfrac{93 \cdot 52}{2} = 2\,418 \text{ m}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO } ACD} = \dfrac{93 \cdot 23}{2} = 1\,069{,}5 \text{ m}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2\,418 + 1\,069{,}5 = 3\,487{,}5 \text{ m}^2$



d) $A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{12 \cdot 20}{2} = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 400 - 2 \cdot 120 = 160 \text{ cm}^2$

e) $a = 0{,}6882 \cdot 10 = 6{,}882$ cm (ver ejercicio resuelto 1, apartado d), de la página 196).

Por tanto, el área del pentágono es $A = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}882}{2} = 172{,}05 \text{ cm}^2$.

f) $a = 1{,}2071 \cdot 8 = 9{,}6568$ cm (ver ejercicio resuelto 1, apartado e), de la página 197).

Por tanto, el área del octógono es $A = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot 9{,}6568}{2} \approx 309{,}02 \text{ cm}^2$.

g) Imaginemos que el octógono está inscrito en un cuadrado de 29 cm de lado, y llamaremos x a la medida del lado del octógono. Utilizando el resultado del ejercicio resuelto 2 de la página 197, $x = \dfrac{29}{\sqrt{2} + 2} \approx 8{,}49$ cm.

Siguiendo los mismos pasos que en el apartado anterior, $a = 1{,}2071 \cdot 8{,}49 \approx 10{,}2483$ cm.

Por tanto, el área del octógono es $A = \dfrac{8 \cdot 8{,}49 \cdot 10{,}2483}{2} \approx 348{,}03 \text{ cm}^2$.

h) El pentágono es el mismo que el del apartado e), su área es $172{,}05 \text{ cm}^2$. Vamos a calcular el área del cuadrado exterior y las restaremos.

La diagonal del pentágono regular es igual a Φl. Por tanto, $d = \dfrac{(1 + \sqrt{5}) \cdot 10}{2} \approx 16{,}18$ cm.

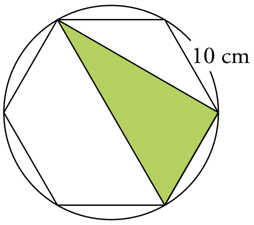
Elegimos el triángulo isósceles que tiene como base la del pentágono y como lados iguales dos de las diagonales del pentágono, y calculamos su altura: $h = \sqrt{16{,}18^2 - 5^2} \approx 15{,}39$ cm.

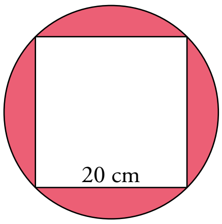
Esta altura coincide con el lado del cuadrado, cuya área será:

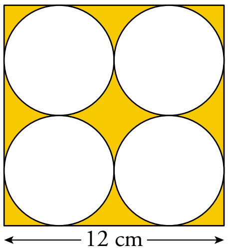
$A_{\text{CUADRADO}} = 15{,}39^2 = 236{,}85 \text{ cm}^2$

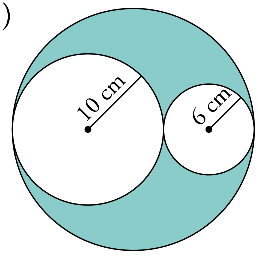
Por tanto, el área de la parte coloreada es $A = 236{,}85 - 172{,}05 = 64{,}8 \text{ cm}^2$.

25 Halla el área y el perímetro de la parte coloreada de cada figura:

a) 

b) 

c) 

d) 

Recuerda que el perímetro es la periferia interior y exterior.

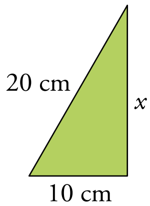
a) Como sabemos, el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita a él. Por eso, del triángulo (que sabemos que es rectángulo) conocemos las siguientes medidas:

hipotenusa = 2 · 10 = 20 cm

un cateto = 10 cm

$x = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} \approx 17,32$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{10 \cdot 17,32}{2} = 86,6 \text{ cm}^2$



- $P = 10 + 20 + 17,32 = 47,32$ cm

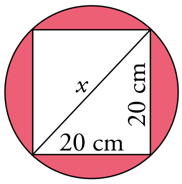
b) $x = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} \approx 28,28$ cm

radio $= \dfrac{x}{2} = 14,14$ cm

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 14,14^2 \approx 628,13 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CUADRADO}} = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 628,13 - 400 = 228,13 \text{ cm}^2$



- $P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2 \cdot \pi \cdot 14,14 \approx 88,84$ cm

  $P_{\text{CUADRADO}} = 4 \cdot 20 = 80$ cm

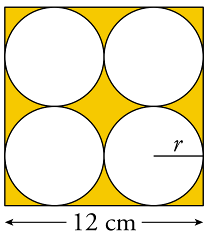
  $P_{\text{TOTAL}} = 88,84 + 80 = 168,84$ cm

c) $r = \dfrac{12}{4} = 3$ cm

$A_{\text{CUADRADO}} = 12 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 3^2 \approx 28,27 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 144 - 4 \cdot 28,27 = 30,92 \text{ cm}^2$



- $P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 18,85$ cm

  $P_{\text{CUADRADO}} = 4 \cdot 12 = 48$ cm

  $P_{\text{TOTAL}} = 4 \cdot 18,85 + 48 = 123,4$ cm

d) El diámetro del círculo grande mide $2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 32$ cm.

Su radio medirá $\dfrac{32}{2} = 16$ cm.

$A_{\text{CÍRCULO GRANDE}} = \pi \cdot 16^2 \approx 804{,}25 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO MEDIANO}} = \pi \cdot 10^2 \approx 314{,}16 \text{ cm}^2$

$A_{\text{CÍRCULO PEQUEÑO}} = \pi \cdot 6^2 \approx 113{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 804{,}25 - 314{,}16 - 113{,}1 \approx 377 \text{ cm}^2$

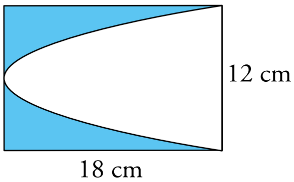
- $P_{\text{CIRCUNFERENCIA GRANDE}} = 2 \cdot \pi \cdot 16 \approx 100{,}53$ cm

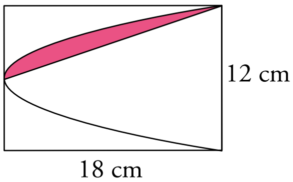
  $P_{\text{CIRCUNFERENCIA MEDIANA}} = 2 \cdot \pi \cdot 10 \approx 62{,}83$ cm

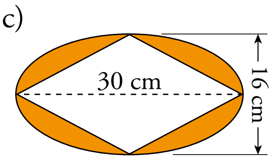
  $P_{\text{CIRCUNFERENCIA PEQUEÑA}} = 2 \cdot \pi \cdot 6 \approx 37{,}70$ cm

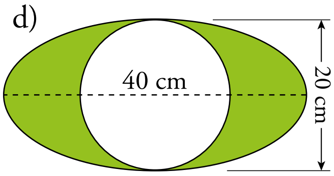
  $P_{\text{TOTAL}} = 100{,}53 + 62{,}83 + 37{,}70 = 201{,}06$ cm

26 Halla las áreas de estas figuras coloreadas:

a) 

b) 

c) 

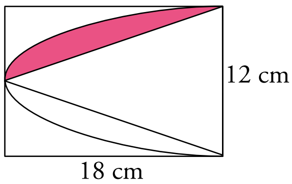
d) 

a) Área del segmento de parábola: $A = \dfrac{2}{3} \cdot 18 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^2$

Área de la zona coloreada $= 18 \cdot 12 - 144 = 72 \text{ cm}^2$

b) Área de la zona coloreada $= \dfrac{A_{\text{SEGMENTO DE PARÁBOLA}} - A_{\text{TRIÁNGULO}}}{2} =$

$= \dfrac{144 - 12 \cdot 18/2}{2} = 18 \text{ cm}^2$



c) Área de la elipse $= \pi \cdot 8 \cdot 15 = 120\pi \text{ cm}^2 \approx 377 \text{ cm}^2$

Área del rombo $= \dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240 \text{ cm}^2$

Área total $= 120\pi - 240 = 136{,}9 \text{ cm}^2$

d) Calculamos el área de la elipse: $A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 10 \cdot 20 = 628{,}32 \text{ cm}^2$

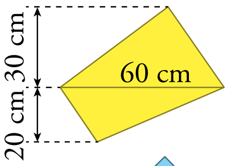
Calculamos el área del círculo: $A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$

Obtenemos el área de la figura coloreada restando las áreas anteriores:

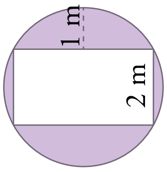
$A = 628{,}32 - 314{,}16 = 368{,}16 \text{ cm}^2$

27 En a) no tienes suficientes herramientas para calcular el perímetro, pero sí el área. Indica en cuáles puedes hallar el perímetro y en cuáles el área. En los que puedas, hállalos.

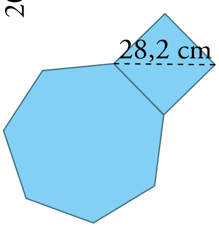
a)



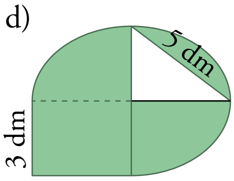
b)



c)



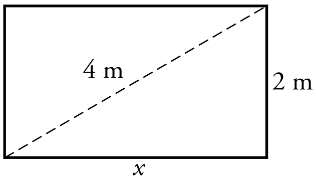
d)



a) Calculamos el área dividiendo la figura en dos triángulos de base 60 cm.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 20 = 900 + 600 = 1500 \text{ cm}^2$$

b)



$$x = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

- $A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 2^2 \approx 12{,}57 \text{ m}^2$

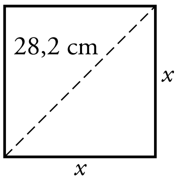
  $A_{\text{RECTÁNGULO}} = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3} \text{ m}^2$

  $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = A_{\text{CÍRCULO}} - A_{\text{RECTÁNGULO}} = 12{,}57 - 4\sqrt{3} \approx 5{,}64 \text{ m}^2$
- $P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} = 2\pi \cdot 2 \approx 12{,}57 \text{ m}$

  $P_{\text{CUADRADO}} = 2(2\sqrt{3} + 2) = (4\sqrt{3} + 4) \text{ m}$

  $P_{\text{PARTE COLOREADA}} = P_{\text{CIRCUNFERENCIA}} - P_{\text{RECTÁNGULO}} = 12{,}57 + 4\sqrt{3} + 4 = 23{,}50 \text{ m}$

c)

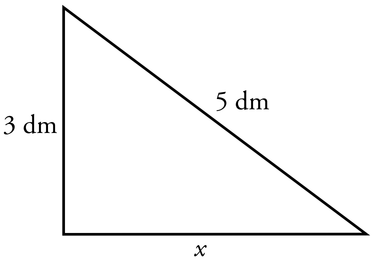


$$x^2 + x^2 = 28{,}2^2 \rightarrow 2x^2 = 795{,}24 \rightarrow x \approx 19{,}94 \text{ cm}$$

Podemos calcular el perímetro, pero no el área.

$P_{\text{PARTE COLOREADA}} = 9 \cdot 19{,}94 = 179{,}46 \text{ cm}$

d)



$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ dm}$$

Podemos calcular el área, pero no el perímetro. La figura está formada por tres cuartas partes de una elipse, más un rectángulo menos un triángulo.

- $A_{\text{ELIPSE}} = \pi \cdot 3 \cdot 4 \approx 37{,}70 \text{ dm}^2$

  $A_{\text{RECTÁNGULO}} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ dm}^2$

  $A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ dm}^2$

  $P_{\text{PARTE COLOREADA}} = \frac{3}{4} \cdot A_{\text{ELIPSE}} + A_{\text{RECTÁNGULO}} - A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{3}{4} \cdot 37{,}70 + 12 - 6 = 34{,}275 \text{ dm}^2$

28 **Halla, en cada caso, el área y el perímetro de un sector circular de un círculo de 15 cm de radio y cuya amplitud es:**

a) 90° **b) 120°** **c) 65°** **d) 140°**

a) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 90° \approx 176{,}71 \text{ cm}^2$

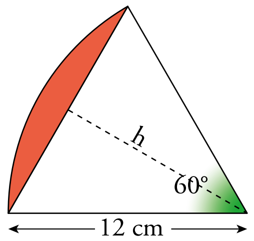
b) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 120° \approx 235{,}62 \text{ cm}^2$

c) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 65° \approx 127{,}63 \text{ cm}^2$

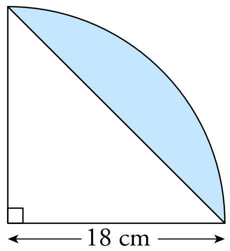
d) $A = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot 140° \approx 274{,}89 \text{ cm}^2$

29 **Halla el área de estos segmentos circulares:**

a)



b)



a) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot 60°}{360°} = 75{,}4 \text{ cm}^2$

Altura del triángulo equilátero: $h = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10{,}4$ cm

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{12 \cdot 10{,}4}{2} = 62{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 75{,}4 - 62{,}4 = 13 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = \dfrac{\pi \cdot 18^2 \cdot 90°}{360°} = 254{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{18 \cdot 18}{2} = 162 \text{ cm}^2$

$A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 254{,}5 - 162 = 92{,}5 \text{ cm}^2$

30 **Comprueba que los siguientes triángulos son rectángulos y calcula sus áreas de dos formas: a partir de sus catetos y aplicando la fórmula de Herón.**

a) 51 cm, 68 cm y 85 cm. **b) 110 m, 264 m y 286 m.**

c) 72 dam, 135 dam y 153 dam. **d) 48 m, 140 m y 148 m.**

a) $51^2 + 68^2 = 7\,225 = 85^2$

$A = \dfrac{51 \cdot 68}{2} = 1\,734 \text{ cm}^2$

$A = \sqrt{102 \cdot 51 \cdot 34 \cdot 17} = 1\,734 \text{ cm}^2$

b) $110^2 + 264^2 = 81\,796 = 286^2$

$A = \dfrac{110 \cdot 264}{2} = 14\,520 \text{ m}^2$

$A = \sqrt{330 \cdot 220 \cdot 66 \cdot 44} = 14\,520 \text{ m}^2$

c) $72^2 + 135^2 = 23\,409 = 153^2$

$A = \dfrac{72 \cdot 135}{2} = 4\,860 \text{ dam}^2$

$A = \sqrt{180 \cdot 108 \cdot 45 \cdot 27} = 4\,860 \text{ dam}^2$

d) $48^2 + 140^2 = 21\,904 = 148^2$

$A = \dfrac{48 \cdot 140}{2} = 3\,360 \text{ m}^2$

$A = \sqrt{168 \cdot 120 \cdot 28 \cdot 20} = 3\,360 \text{ m}^2$

Página 209

Semejanza. Escalas

31 **Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con razón de semejanza 1,2.**

Calcula los lados del triángulo $A'B'C'$ sabiendo que:

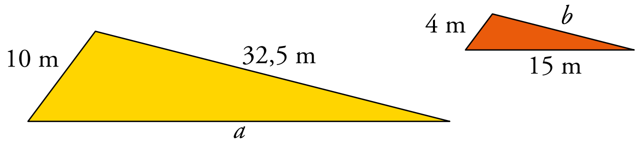
$\overline{AB} = 16$ **cm** $\qquad \overline{BC} = 25$ **cm** $\qquad \overline{AC} = 39$ **cm**

$\overline{A'B'} = 1{,}2 \cdot 16 = 19{,}2$ cm

$\overline{B'C'} = 1{,}2 \cdot 25 = 30$ cm

$\overline{A'C'} = 1{,}2 \cdot 39 = 46{,}8$ cm

32 **Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos:**



Como todos sus lados son paralelos, sus ángulos son iguales, por lo que los dos triángulos son semejantes. Así:

$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} = \frac{32,5}{b}$$

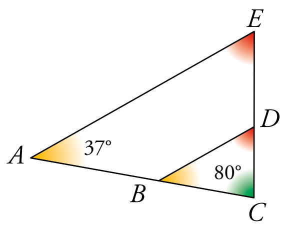
$$\frac{10}{4} = \frac{a}{15} \to 4a = 150 \to a = 37{,}5 \text{ m}$$

$$\frac{10}{4} = \frac{32,5}{b} \to 10b = 130 \to b = 13 \text{ m}$$

33 **Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm, $\overline{BD} = 6{,}4$ cm, $\overline{AE} = 18$ cm:**

a) Calcula $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$.

b) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, halla $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



Por semejanza de triángulos:

a) $\dfrac{18}{6,4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \to \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6,4}{18} \approx 3{,}9$ cm

$\dfrac{18}{6,4} = \dfrac{15}{\overline{BC}} \to \overline{BC} = \dfrac{15 \cdot 6,4}{18} \approx 5{,}33$ cm

b) $\hat{E} = 180° - 37° - 80° = 63°$

$\hat{B} = \hat{A} = 37°$

$\hat{D} = \hat{E} = 63°$

34 **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a) $\left.\begin{array}{l} 1 \;\to\; 1\,500\,000 \\ 2{,}5 \;\to\; x \end{array}\right\} \to x = 2{,}5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000 \text{ cm} = 37{,}5 \text{ km}$

b) $\left.\begin{array}{l} 1 \;\to\; 1\,500\,000 \\ x \;\to\; 36\,000\,000 \end{array}\right\} \to x = \dfrac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24 \text{ cm}$

35 **Indica, en cada caso, cuál es la escala del plano:**

a) 1 mm del plano representa 10 m reales.

b) 50 km reales se representan por 1 dm en el plano.

c) 0,001 mm reales se representan por 1 cm en el plano.

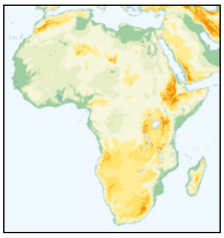
a) 1 mm equivale a 10 m = 10 000 mm $\to$ Escala 1 : 10 000.

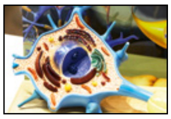
b) 1 dm equivale a 50 km = 500 000 dmm $\to$ Escala 1 : 500 000.

c) 1 cm = 10 mm equivale a 0,001 mm $\to$ Escala 10 000 : 1.

36 **Asocia cada imagen con su escala:**

A


B


C


D


E


a) 1:300 **b) 10 000:1** **c) 1:10 000 000**

d) 1:100 000 **e) 1:375 000 000**

A $\to$ d) B $\to$ e) C $\to$ b)

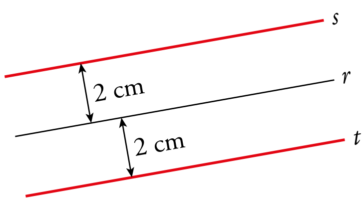
D $\to$ a) E $\to$ c)

Lugares geométricos y cónicas

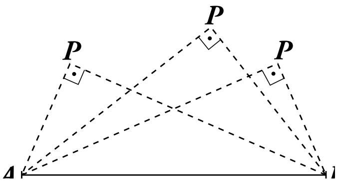
37 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a una recta *r* es de 2 cm? Dibújalo.**

Las rectas *s* y *t* son el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta *r* es de 2 cm.

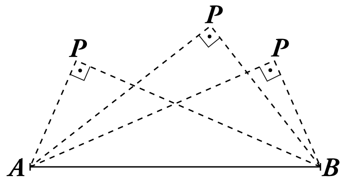
Las rectas *s* y *t* son paralelas a *r*, cada una a un lado de esta y a 2 cm de distancia de *r*.



38 **¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos *P* del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto?**



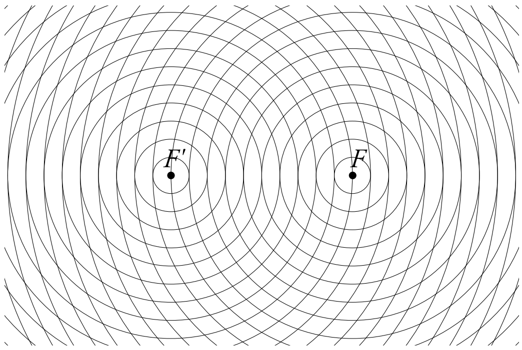
La circunferencia de centro el punto medio de $\overline{AB}$ (exceptuando los puntos A y B) es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el ángulo $\widehat{APB}$ es recto.

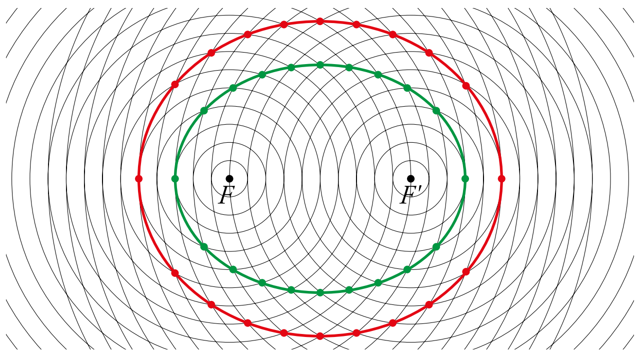


39 **Define como lugar geométrico el circuncentro y el incentro de un triángulo.**

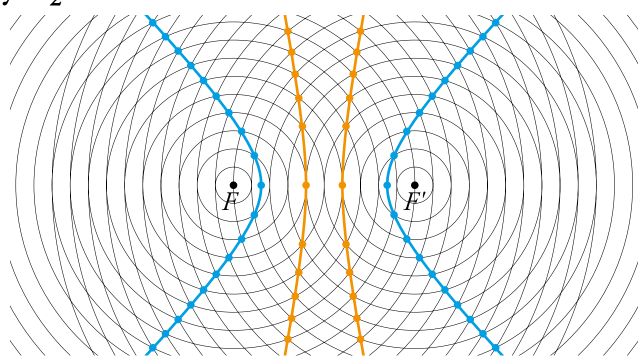
El circuncentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus vértices. El incentro de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus lados.

40 **Utiliza una trama como la siguiente para dibujar dos elipses de focos *F* y *F'* y constantes $d_1 = 16$ y $d_2 = 20$ (tomando como unidad la distancia entre dos circunferencias consecutivas).**

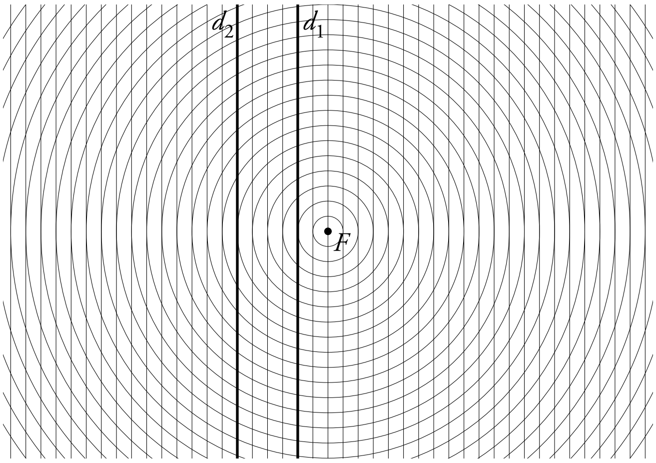


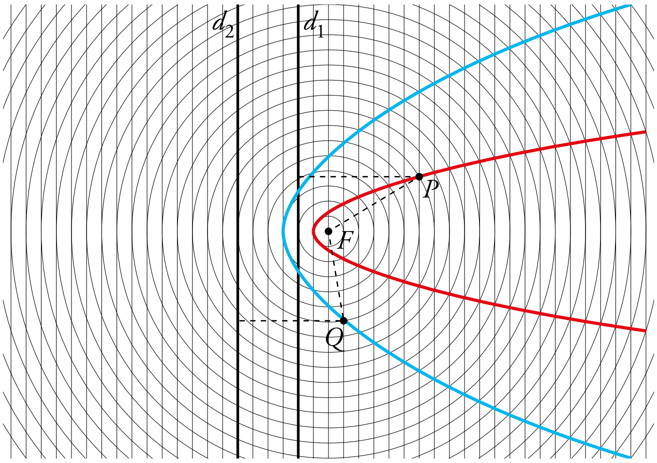


41 **En una trama como la del ejercicio anterior, dibuja dos hipérbolas de focos *F* y *F'* y constantes $d_1 = 2$ y $d_2 = 7$.**



42 **Utiliza esta trama para dibujar dos parábolas de foco** F **y de directrices** d_1 **y** d_2**.**



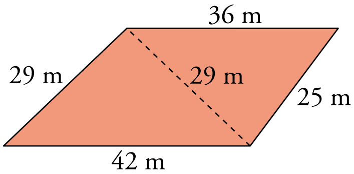


La parábola roja tiene como directriz d_1 y la azul tiene como directriz d_2.

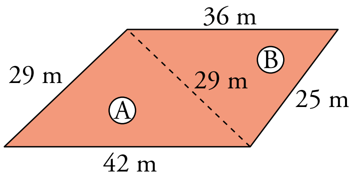
Página 210

Resuelve problemas

43 **Una finca tiene la forma y las dimensiones indicadas en la figura. Calcula su área.**



Aplicamos la fórmula de Herón:



$s_{Ⓐ} = \dfrac{29 + 29 + 42}{2} = 50$ m

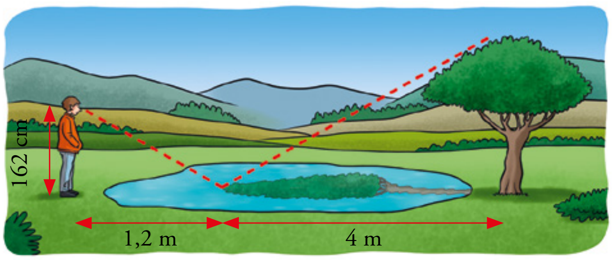
$A_{Ⓐ} = \sqrt{50\,(50 - 29)^2\,(50 - 42)} = \sqrt{176\,400} = 420 \text{ m}^2$

$s_{Ⓑ} = \dfrac{29 + 36 + 25}{2} = 45$ m

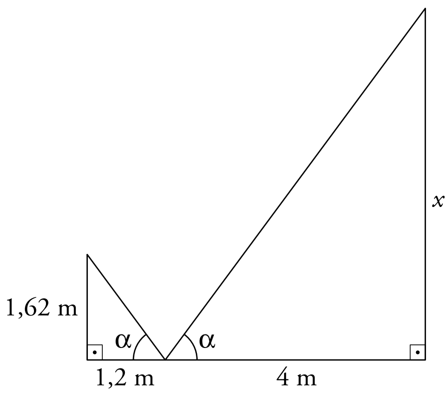
$A_{Ⓑ} = \sqrt{45\,(45 - 29)\,(45 - 36)\,(45 - 25)} = \sqrt{129\,600} = 360 \text{ m}^2$

$A_{\text{finca}} = A_{Ⓐ} + A_{Ⓑ} = 780 \text{ m}^2$

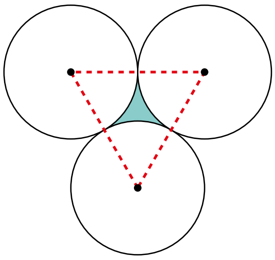
44 **Para calcular la altura de un árbol, Eduardo ve la copa reflejada en un charco y toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol?**



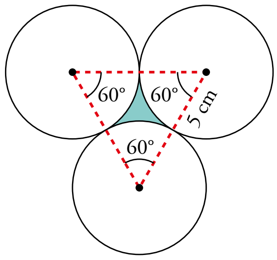
Por semejanza de triángulos: $\dfrac{4}{1,2} = \dfrac{x}{1,62} \rightarrow x = 5,4$ m



45 Calcula el área del recinto que tiene Sara para sembrar, es el que está entre los tres depósitos de agua cilíndricos de 5 m de radio que ha puesto su padre en el jardín.



Como es un triángulo equilátero, sus ángulos son de 60°.



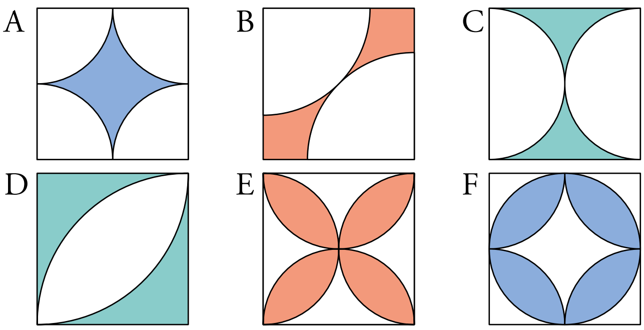
$A_{\text{SECTOR } 60°} = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{360°} \cdot 60° \approx 13{,}09 \text{ cm}^2$

Aplicamos la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo de lado 10 cm:

$s = \dfrac{30}{2} = 15 \rightarrow A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{15 \cdot (5)^3} \approx 43{,}3 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 43{,}3 - 3 \cdot 13{,}09 = 4{,}09 \text{ cm}^2$

46 A cada uno de los seis mejores grafiteros y grafiteras de un certamen les han dado un lienzo cuadrado de 1 m de lado para que representen algún motivo geométrico. Estos son los resultados:



Fijándote en la superficie coloreada de cada lienzo, ordénalos de mayor a menor.

$A_{\text{CUADRADO}} = 100^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$

<u>Figura A</u>

$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \dfrac{7\,854}{4} \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 4 \cdot \dfrac{7\,854}{4} = 2\,146 \text{ cm}^2$

<u>Figura B</u>

Calculamos la diagonal del cuadrado, $d = \sqrt{100^2 + 100^2} \approx 141{,}42$ cm

El radio de las circunferencias es $\dfrac{141{,}42}{2} = 70{,}71$ cm.

$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 70{,}71^2 \approx \dfrac{15\,707{,}66}{4} \text{ cm}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot \dfrac{15\,707{,}66}{4} = 2\,146{,}17 \text{ cm}^2$

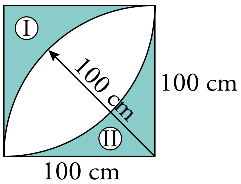
Figura C

El radio de las circunferencias es 50 cm.

$A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 50^2 \approx \dfrac{7\,854}{2}$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot \dfrac{7\,854}{2} = 2\,146$ cm^2

Figura D



$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \dfrac{1}{4}\ \pi \cdot 100^2 \approx 7\,854$ cm^2

$A_{\text{I}} = A_{\text{II}} = 10\,000 - 7\,854 \approx 2\,146$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 2 \cdot 2\,146 = 4\,292$ cm^2

Figura E

El área de la parte coloreada de la figura C es la mitad del área de las partes blancas de esta figura. Por tanto, $A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 10\,000 - 2 \cdot 2\,146 = 5\,708$ cm^2

Figura F

La parte coloreada de la figura A es la parte blanca del centro de esta figura.

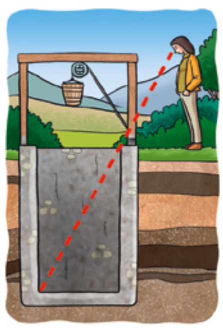
$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi \cdot 50^2 \approx 7\,854$ cm^2

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 7\,854 - 2\,146 = 5\,708$ cm^2

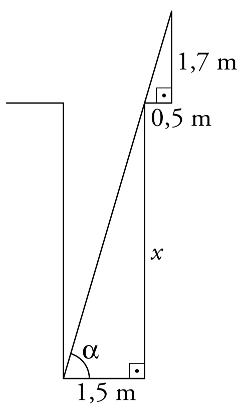
Ordenamos las superficies coloreadas de mayor a menor:

$E = F > D > B > A = C$

47 **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, observas que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

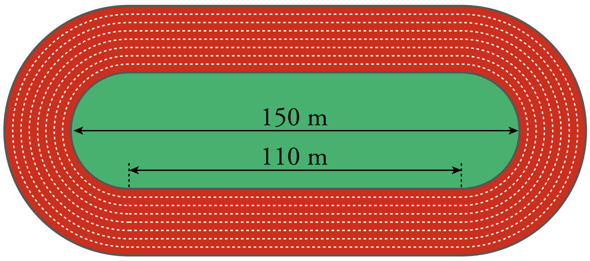


Por semejanza de triángulos: $\dfrac{1,5}{0,5} = \dfrac{x}{1,7} \rightarrow x = 5,1$ m



48 **Se quiere renovar con material sintético, que cuesta 15 €/m^2, el piso de una pista de atletismo como la que ves en la figura, compuesta por 8 calles de 1 m de anchura.**

¿A cuánto ascenderá el presupuesto para la compra del material?



$A_{\text{PISTA}} = \pi \cdot 9^2 - \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot (110 \cdot 8) \approx 2011{,}33 \text{ m}^2$

PRESUPUESTO $= 2011{,}33 \cdot 15 \approx 30\,170$ €

49 **¿Cuál es el diámetro de la tubería más gruesa que se puede introducir por el agujero cuya sección es un triángulo equilátero de 6 cm de lado?**

El diámetro de la tubería coincidirá con el de la circunferencia inscrita en el triángulo. Esta circunferencia tiene por radio la apotema del triángulo y sabemos que la apotema de un triángulo equilátero es 1/3 de su altura.

$h = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}20$ cm

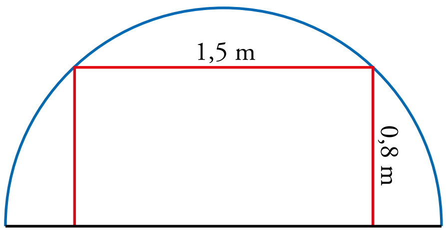
$ap = \frac{1}{3} 5{,}20 \approx 1{,}73$ cm

$d = 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46$ cm

El diámetro de la tubería es 3,46 cm.

50 **Se va a perforar un túnel semicircular por el que circulará una vagoneta de 1,5 m de ancho por 0,8 m de alto.**

¿Qué diámetro, como mínimo, debe tener la sección del túnel?

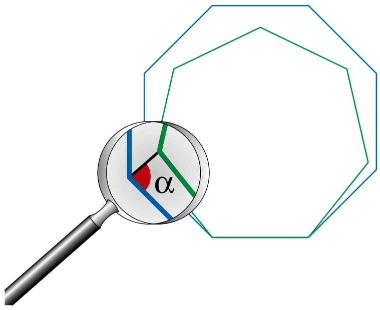


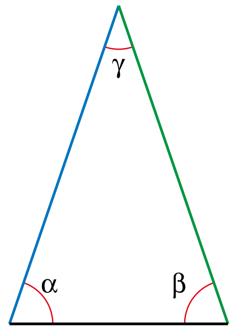
Si dibujamos el círculo completo, tendremos un rectángulo de base 1,5 m y altura $2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ m inscrito en él. La diagonal de este rectángulo coincide con el diámetro del círculo.

$d = \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}6^2} \approx 2{,}19$ m

La sección del túnel debe tener, como mínimo, 2,19 m.

51 **Calcula el valor del ángulo α señalado en el dibujo.**





- El triángulo dibujado es isósceles, pues los lados del octógono regular y del heptágono regular miden lo mismo. Por tanto, $\alpha = \beta$.
- Calculamos el valor de γ como la diferencia del ángulo interno del octógono menos el ángulo interno del heptágono:

$$\gamma = \frac{180° \cdot 6}{8} - \frac{180° \cdot 5}{7} = 135° - 128{,}57° = 6{,}43°$$

- $\alpha + \rho + \gamma = 180° \rightarrow 2\alpha = 180° - \gamma \rightarrow$

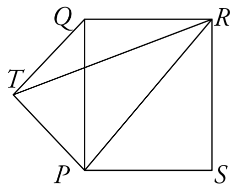
$$\rightarrow \alpha = \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{180° - 6,43°}{2} = 86{,}79°$$

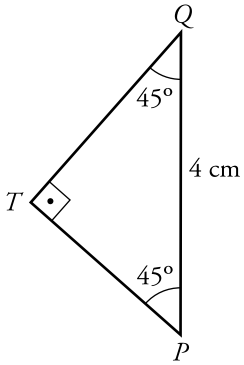
El ángulo α buscado mide 86,79°, aproximadamente.

Página 211

Resuelve: un poco más difícil

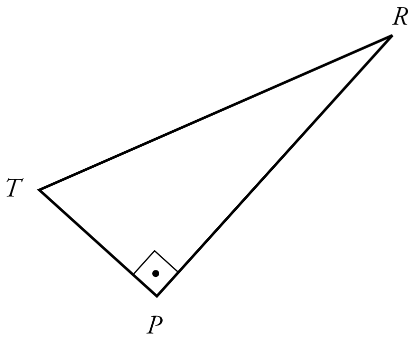
52 Calcula el área del triángulo *PTR* del dibujo sabiendo que el triángulo *PTQ* es rectángulo isósceles y que $\overline{PQ}$ = 4 cm y $\overline{QR}$ = 3 cm.





Por ser rectángulo isósceles:

$$\overline{PT} = \overline{TQ} \rightarrow \overline{PT}^2 + \overline{PT}^2 = 4^2 \rightarrow \overline{PT} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$$



— Es rectángulo porque:

$\widehat{TPR} = \widehat{TPQ} + \widehat{QPR} = 45° + 45° = 90°$.

— PR es la diagonal de $PQRS$ →

→ $\widehat{PR} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.

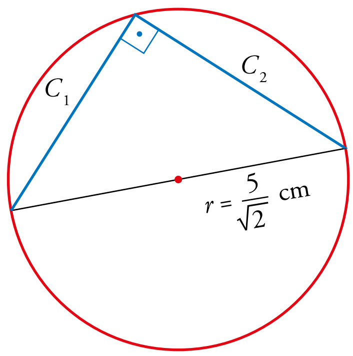
— $A_{\text{PTR}} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{PT} \cdot \overline{PR} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 =$

$= 5\sqrt{2}\ \text{cm}^2 \approx 7{,}07\ \text{cm}^2$.

53 En una circunferencia de $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ cm de radio inscribimos un triángulo rectángulo. Sus catetos, dados en centímetros, son números naturales diferentes. Calcula el área del triángulo.

Si inscribimos un ángulo recto en una circunferencia, necesariamente abarca un arco de 180°, es decir, media circunferencia.

Por tanto, si inscribimos un triángulo rectángulo en una circunferencia, necesariamente la hipotenusa coincide con un diámetro.

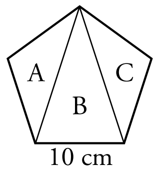


Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$C_1^2 + C_2^2 = \left(2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = 50$$

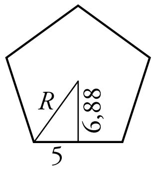
La única pareja de números naturales diferentes que verifican la condición anterior son $C_1 = 1$ y $C_2 = 7$.

54 Calcula el área de cada uno de los tres triángulos en que se ha dividido un pentágono regular de 10 cm de lado por las dos diagonales que salen de un vértice.



La apotema del pentágono es 0,688 · 10 = 6,88 cm.

Radio del pentágono, $R = \sqrt{5^2 + 6,88^2} \approx 8{,}5$ cm

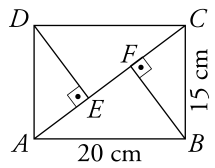


$$A_{\text{PENTÁGONO}} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 6,88}{2} = 172 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{B}} \approx \frac{10 \cdot (6,88 + 8,5)}{2} = 76{,}9 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{A}} = A_{\text{C}} \approx \frac{172 - 76,9}{2} = 47{,}55 \text{ cm}^2$$

55 Observando esta figura, halla:



a) El área del triángulo *ABC*.

b) La longitud del segmento *BF*.

c) La longitud del segmento *EF*.

Calculamos primero la diagonal *AC* del rectángulo: $\overline{AC} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ cm.

a) Aplicamos la fórmula de Herón: $s = \dfrac{20 + 15 + 25}{2} = 30$

$A = \sqrt{30 \cdot (30 - 20) \cdot (30 - 15) \cdot (30 - 25)} = 150 \text{ cm}^2$

b) Despejamos la medida de la altura, $\overline{BF}$, de la fórmula del área del triángulo *ABC*:

$150 = \dfrac{25 \cdot \text{h}}{2} \rightarrow \text{h} = 12 \text{ cm}$

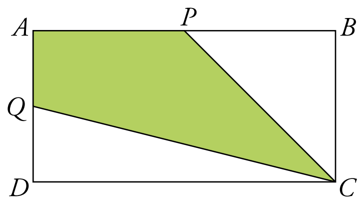
c) Los triángulos *ABC* y *ADC* son iguales, y también lo son sus alturas $\overline{BF}$ y $\overline{DE}$. Sabiendo esto vamos a calcular:

La base del triángulo *DEC* $\rightarrow \overline{EC} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ cm

La base del triángulo *BFC* $\rightarrow \overline{FC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm

Por último, $\overline{EF} = \overline{EC} - \overline{FC} = 16 - 9 = 7$ cm

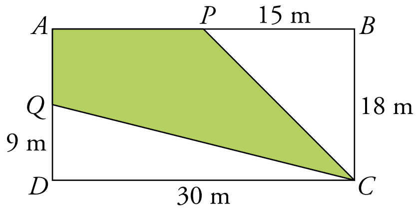
56 **El perímetro de este rectángulo es 96 m, y la base mide 12 m más que la altura.**



Halla el área de la parte coloreada. (*P* y *Q* son los puntos medios de los lados *AB* y *AD*).

Primero hallamos las medidas de la base y la altura del rectángulo. Llamamos x a la altura y $x + 12$ a la base, entonces:

$96 = 2x + 2(x + 12) \rightarrow x = 18$ m $\rightarrow$ La base mide 30 m, y la altura, 18 m.

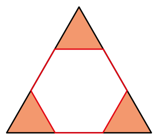


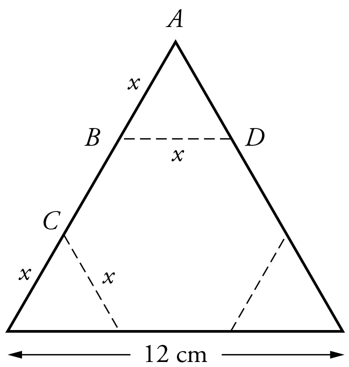
Para averiguar el área de la parte coloreada, calculamos el área de los triángulos rectángulos *PBC* y *QDC* y se las restamos al área del rectángulo:

$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 30 \cdot 18 = 540 \text{ m}^2$; $A_{PBC} = \dfrac{15 \cdot 18}{2} = 135 \text{ m}^2$; $A_{QDC} = \dfrac{9 \cdot 30}{2} = 135 \text{ m}^2$

$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 540 - 2 \cdot 135 = 270 \text{ m}^2$

57 **Tenemos un triángulo equilátero de 12 cm de lado. ¿Cómo hemos de cortar las esquinas para obtener un hexágono regular?**



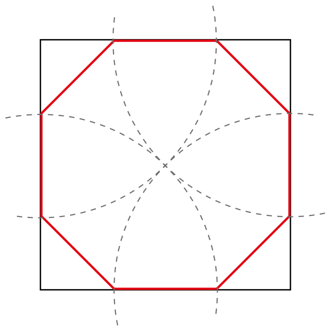


$\overline{BC}$ debe ser igual a $\overline{BD}$

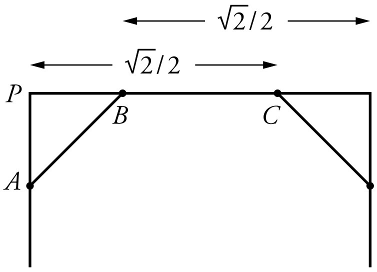
$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC} = 12 - 2x \\ \overline{BD} = x\end{array}\right\} 12 - 2x = x \rightarrow x = 4$$

Hemos de cortar tres triángulos equiláteros de 4 cm de lado. Es decir, hemos de dividir los lados en tres trozos iguales y, así, cortar por las esquinas.

58 **Comprobar que el octógono que se obtiene del siguiente modo es regular:**



Los ángulos de este octógenos son, evidentemente, iguales a 90° + 45° = 135°. Para probar que es regular, hemos de ver que también sus lados son iguales. Si el lado del cuadrado inicial es 1, su diagonal es $\sqrt{2}$. Por tanto, el radio con el que se trazan los arcos es $\sqrt{2}/2$.



$\overline{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$ es un lado.

$\overline{PB} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{AB} = \overline{PB} \cdot \sqrt{2} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$ es otro lado.

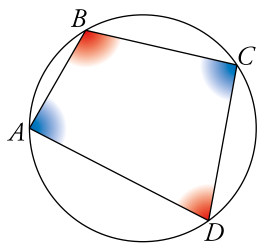
Hemos visto que $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2} - 1$. Todos los lados del octógono son iguales. Por tanto, el octógono es regular.

59 **El cuadrilátero *ABCD* está inscrito en una circunferencia. Observa este razonamiento:**

$\boldsymbol{\hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2}, \; \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2}}$

$\boldsymbol{\hat{C} + \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BCD}}{2} = \dfrac{360°}{2} = 180°}$

Comprueba de igual forma que $\boldsymbol{\hat{B} + \hat{D} = 180°}$.

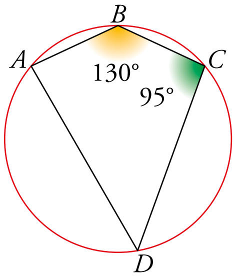


Esta es la condición que debe cumplir un cuadrilátero para que pueda inscribirse en una circunferencia. Exprésala con palabras.

$\hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{ADC}}{2}, \; \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{ABC}}{2} \;\to\; \hat{B} + \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{ADC}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{ABC}}{2} = \dfrac{360°}{2} = 180°$

La condición para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia es que sus ángulos opuestos sumen 180°.

60 **Calcula los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{D}$.**



(Ten en cuenta el problema anterior).

A Teniendo en cuenta el problema anterior, sabemos que los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ deben sumar 180°, luego $\hat{A} = 180° - 95° = 85°$.

Haciendo el mismo razonamiento para $\hat{B}$ y $\hat{D}$, $\hat{D} = 180° - 130° = 50°$.

Reflexiona

61 **¿Qué puedes afirmar de un triángulo si uno de los lados coincide con el diámetro de su circunferencia circunscrita?**

Se puede asegurar que es un triángulo rectángulo, puesto que, el ángulo opuesto al diámetro va a ser siempre recto.

62 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) Si en un plano mides una longitud y conoces la real, puedes hallar la escala.

b) El ángulo inscrito en una circunferencia es igual al doble del ángulo que abarca.

c) Dos triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.

d) Dos figuras semejantes tienen los ángulos proporcionales.

e) Con los tres lados de un triángulo se puede saber si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

f) Con los tres lados de un triángulo se puede hallar su área.

g) Los ángulos de un pentágono regular suman 540°, pero si no es regular, no se sabe cuánto suman.

h) Si una recta corta a dos rectas paralelas, se obtienen ocho ángulos distintos.

a) Verdadero. La escala es el cociente entre la longitud del plano y la real.

b) Falso. El ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco que abarca.

c) Verdadero. Es una de las condiciones de semejanza de triángulos.

d) Falso. Dos figuras semejantes tienen los ángulos iguales.

e) Verdadero. Es una de las aplicaciones del teorema de Pitágoras.

f) Verdadero. Basta con aplicar la fórmula de Herón.

g) Falso. Los ángulos de un pentágono, sea o no regular, siempre suman 540°.

h) Falso. Al menos cuatro ángulos son iguales entre sí, y los otros cuatro, también.

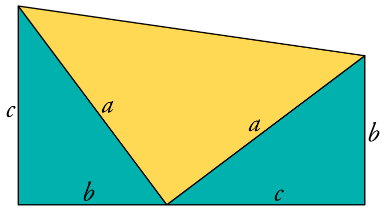
Página 212

Lee y comprende

Una curiosa demostración del teorema de Pitágoras

- **James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente de Estados Unidos, fue profesor de Lenguas Clásicas, militar y político y, además, aficionado a las matemáticas, como puedes comprobar con esta demostración que publicó en el *New England Journal of Education:***

Se toma un triángulo rectángulo cualquiera apoyado sobre un cateto (b). Se repite el mismo triángulo apoyado sobre el otro cateto (c) y se construye un trapecio, como indica la figura.



Área del trapecio $\to$ $A = \dfrac{b+c}{2} \cdot (b+c)$

Área del trapecio $\to$ $A = \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{c \cdot b}{2} + \dfrac{a \cdot a}{2}$

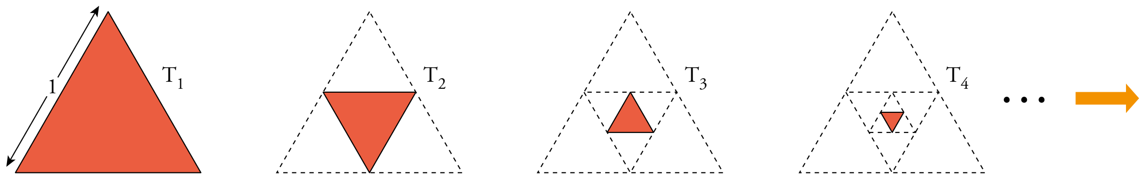
Igualando ambas expresiones del área del trapecio se obtiene, simplificando, la expresión del teorema de Pitágoras. Intenta hacerlo tú.

$$\frac{b+c}{2} \cdot (b+c) = \frac{c \cdot b}{2} + \frac{c \cdot b}{2} + \frac{a \cdot a}{2} \to \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{2cb + a^2}{2} \to$$

$$\to b^2 + c^2 + 2cb = 2cb + a^2 \to a^2 = b^2 + c^2$$

Generaliza

- **Observa la siguiente serie de triángulos equiláteros:**



¿Cuál es la razón de semejanza entre dos triángulos consecutivos? ¿Y la razón de sus áreas?

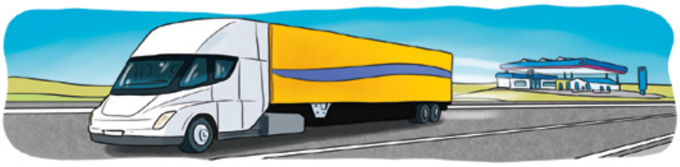
Completa la tabla, resolviendo los primeros casos particulares y, después, generalizando:

	T_1	T_2	T_3	T_4	…	T_{10}	…	T_n
LADO $\to l$	1	1/2	1/4	?	…	?	…	?
ÁREA $\to A$	$\sqrt{3}/4$	?	?	?	…	?	…	?

Página 213

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Un camionero presupuesta cierta cantidad de dinero para el gasto de carburante en un recorrido de 600 km. Sin embargo, una rebaja en el precio del gasóleo le supone un ahorro de 0,14 € por kilómetro, lo que le permite realizar un recorrido de 750 km con el mismo gasto.**



¿Cuál fue la cantidad presupuestada para carburante?

En 600 km ahora $0,14 \cdot 600 = 84$ €.

Ahora hace 750 km; es decir, $750 - 600 = 150$ km más.

Con 84 € hace 150 km. Ahora, cada kilómetro le cuesta $84 : 150 = 0,56$ €.

La cantidad presupuestada es de $750 \cdot 0,56 = 420$ €.

- **Nuria quiere repartir su pulsera de oro de siete eslabones entre sus siete sobrinos y sobrinas.**

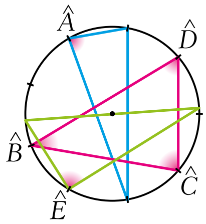
¿Cuántos eslabones debe partir para poder dar uno a cada sobrino y sobrina? (Se supone que quiere estropear lo menos posible su pulsera).

Debe partir tres eslabones: el segundo, el cuarto el texto

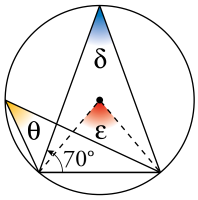
AUTOEVALUACIÓN

1 Calcula los ángulos desconocidos en estas figuras:

a)



b)



a) La circunferencia está dividida en 9 arcos iguales: cada uno de los arcos mide 40°.

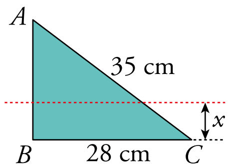
$\hat{A} = \dfrac{4 \cdot 40°}{2} = 80°$ $\qquad \hat{B} = \dfrac{2 \cdot 40°}{2} = 40°$

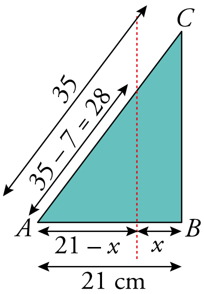
$\hat{C} = \dfrac{4 \cdot 40°}{2} = 80°$ $\qquad \hat{D} = \dfrac{3 \cdot 40°}{2} = 60°$

$\hat{E} = 90°$ (está inscrito en una semicircunferencia).

b) Observamos que los tres ángulos pedidos abarcan el mismo arco y que el triángulo del que es ángulo δ, es isósceles. Así: $\delta = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$, $\theta = 40°$ y $\varepsilon = 2 \cdot 40° = 80°$

2 ¿A qué altura, *x*, hay que cortar el triángulo *ABC* para que la hipotenusa se reduzca en siete centímetros?





Calculamos el lado desconocido,

$\overline{AB} = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21$ cm.

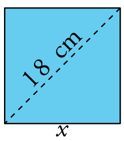
Si giramos la figura, observamos dos triángulos en posición de Tales, son semejantes:

$$\frac{35}{21} = \frac{28}{21 - x} \rightarrow 735 - 35x = 588 \rightarrow x = \frac{588 - 735}{-35} = 4{,}2$$

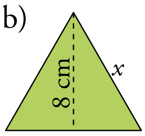
Debemos cortar el triángulo a una altura de 4,2 cm.

3 Calcula el valor de *x* en cada caso:

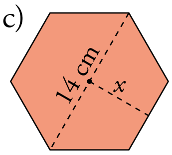
a)



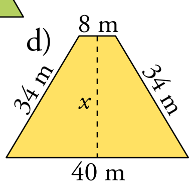
b)



c)



d)



Utilizamos los resultados del ejercicio resuelto 1 de la página 196.

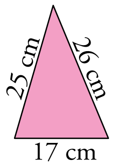
a) $l = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot d \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 18 \approx 12{,}73$ cm

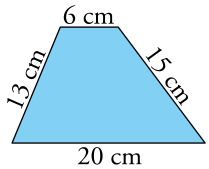
b) $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \rightarrow x = \dfrac{8 \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 9{,}24$ cm

c) $ap = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \approx 6{,}06$ cm

d) $x = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$ m

4 Calcula las alturas del triángulo y del trapecio:





<u>Triángulo</u>

Utilizamos la fórmula de Herón y la del área del triángulo.

$s = \dfrac{25 + 26 + 17}{2} = 34$ cm

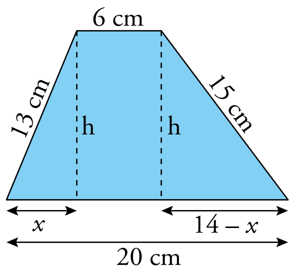
$A = \sqrt{34 \cdot (34 - 25) \cdot (34 - 26) \cdot (34 - 17)} = 204$ cm^2

$204 = \dfrac{17 \cdot \text{h}}{2} \rightarrow \text{h} = \dfrac{204 \cdot 2}{17} = 24$ cm

La altura del triángulo mide 24 cm

<u>Trapecio</u>

Observando la figura planteamos el siguiente sistema y lo resolvemos por igualación:



$$\left.\begin{array}{l} \text{h}^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \\ \text{h}^2 = 13^2 - x^2 \end{array}\right\} \rightarrow 15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2 \rightarrow x = 5$$

$\text{h} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

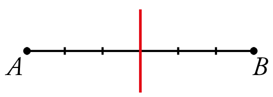
La altura del trapecio mide 12 cm.

5 Dibuja dos puntos, *A* y *B*, a 6 cm de distancia.

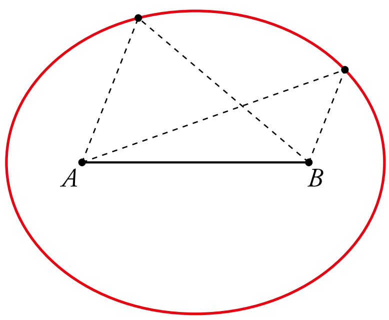
a) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de *A* y *B*? Dibújalo.

b) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a *A* y *B* es 10 cm? Dibújalo aproximadamente.

a) Es la mediatriz del segmento.

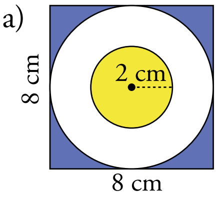


b) Es la elipse de focos ***A*** y ***B***.

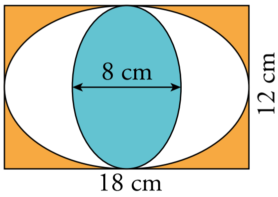


6 **Calcula el área de la zona coloreada en cada una de las siguientes figuras:**

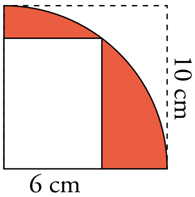
a)



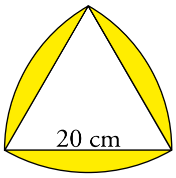
b)



c)



d)



a) $A = 8^2 - \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 2^2 = 64 - 12\pi \approx 26{,}30 \text{ cm}^2$

b) $A = 12 \cdot 18 - \pi \cdot 9 \cdot 6 + \pi \cdot 4 \cdot 6 = 216 - 30\pi \approx 121{,}75 \text{ cm}^2$

c) Para hallar el área de la parte coloreada calculamos la del cuarto de círculo y le restamos la del rectángulo blanco. Observamos que tanto el radio de la circunferencia como la diagonal del rectángulo miden 10 cm.

$$A_{1/4 \text{ DE CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \approx 78{,}54 \text{ cm}^2$$

$$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ cm} \rightarrow A_{\text{RECTÁNGULO}} = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 78{,}54 - 48 = 30{,}54 \text{ cm}^2$$

d) El triángulo blanco es equilátero, por lo que todos sus ángulos miden 60°. Calculamos el área del sector ciruclar de 60° y el área del triángulo:

$$A_{\text{SECTOR CIRCULAR}} = 60° \cdot \frac{\pi \cdot 20^2}{360°} \approx 209{,}44 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \sqrt{30 \cdot (30-20)^3} \approx 173{,}21 \text{ cm}^2$$

Restamos ambas áreas para obtener una de las partes amarillas de la figura:

$$A_{\text{PARTE COLOREADA}} = 3 \cdot (209{,}44 - 173{,}21) = 108{,}69 \text{ cm}^2$$

7 **Si en el plano de una vivienda se representa una mesa de 5 m de largo con un rectángulo de 2 cm de largo:**

a) ¿Cuál es la escala que se ha utilizado?

b) ¿Qué longitud tiene el pasillo si su representación tiene 4 cm de largo?

c) ¿Cuál es el ancho real de la cocina si en el plano tiene 3 cm?

a) 5 m = 500 cm.

$$\left.\begin{array}{l} 500 \rightarrow 2 \\ x \rightarrow 1 \end{array}\right\} \rightarrow x = 250 \rightarrow \text{Escala } 1:250$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 250 \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 4 \end{array}\right\} \rightarrow x = 250 \cdot 4 = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$$

El pasillo mide 10 m en realidad.

c) $$\left.\begin{array}{l} 250 \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 3 \end{array}\right\} \rightarrow x = 250 \cdot 3 = 750 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ m}$$

El ancho real de la cocina son 7,5 cm.

11 CUERPOS GEOMÉTRICOS

Página 215

Resuelve

1 **Busca información sobre los sólidos arquimedianos:**

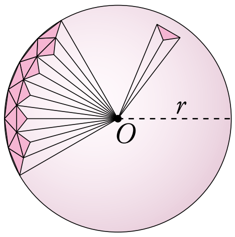
a) ¿Cuántos triángulos y cuántos cuadrados forman la superficie de un rombicuboctaedro?

b) Escribe el nombre de otros tres sólidos arquimedianos.

a) La superficie de un rombicuboctaedro está formada por 8 triángulos y 18 cuadrados.

b) Cuboctaedro, icosidodecaedro, rombicosidodecaedro.

2 **Calcula, al estilo de Arquímedes, la fórmula del volumen de una esfera, teniendo en cuenta las siguientes ayudas:**



- **La suma de los volúmenes de varias pirámides con la misma altura es:**

$$V = \frac{1}{3} \text{(SUMA DE LAS SUPERFICIES DE LAS BASES)} \cdot \text{Altura}$$

- **El volumen de la esfera se calcula aplicando la fórmula anterior a la suma de todas las finísimas pirámides, de vértice O y altura r, en que se puede descomponer la esfera.**
- **El área de la superficie esférica es $4\pi r^2$.**

La suma de la superficie de las bases de las pirámides coincide con la superficie esférica, $4\pi r^2$.

La altura de cada pirámide es muy próxima al radio de la esfera, r.

$$V = \frac{1}{3} \text{(Suma de las superficies de las bases)} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3}(4\pi r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

1 ▸ POLIEDROS REGULARES Y SEMIRREGULARES

Página 216

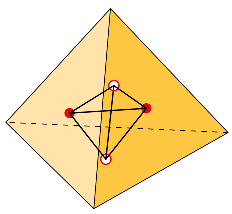
1 **Completa en tu cuaderno el cuadro de abajo con el número de caras, vértices y aristas de los tres poliedros regulares que quedan. Comprueba así que el dodecaedro y el icosaedro son duales y que el tetraedro es dual de sí mismo.**

	TETRAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
CARAS			
VÉRTICES			
ARISTAS			

•

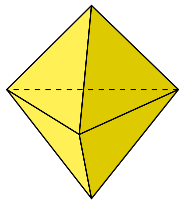
	TETRAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
CARAS	4	12	20
VÉRTICES	4	20	12
ARISTAS	6	30	30

- Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un dodecaedro, se forma un icosaedro. Si hiciéramos lo mismo con un icosaedro, obtendríamos un dodecaedro. Además, el número de caras del dodecaedro coincide con el número de vértices del icosaedro, y viceversa. Ambos tienen el mismo número de aristas. Por tanto, son poliedros duales.
- Al unir mediante segmentos los centros de cada dos caras contiguas de un tetraedro, se forma otro tetraedro. Además, el número de caras y de vértices en un tetraedro son iguales. El tetraedro es dual de sí mismo.



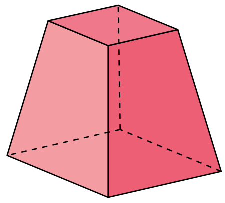
Página 217

2 Hemos visto que esta figura no es un poliedro regular. ¿Es semirregular?



Esta figura no es un poliedro semirregular porque en todos los vértices no concurren los mismos polígonos.

3 Esta pirámide truncada cuyas bases son cuadrados, ¿es un poliedro semirregular? ¿Por qué?



No es un poliedro semirregular porque sus aristas no son todas iguales.

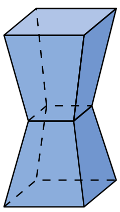
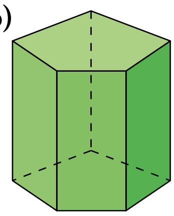
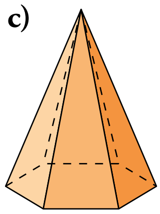
4 Explica por qué las aristas de un poliedro semirregular tienen que ser todas iguales.

Las aristas de un poliedro semirregular tienen que ser todas iguales porque son como poliedros regulares, solo se diferencian en que los primeros no tienen todas las caras iguales.

5 Comprueba que se cumple la fórmula de Euler para los dos poliedros semirregulares de arriba.

- Poliedro naranja: $c = 7,\ a = 15,\ v = 10 \rightarrow 7 + 10 - 15 = 2$
- Poliedro azul: $c = 14,\ a = 24,\ v = 12 \rightarrow 14 + 12 - 24 = 2$

6 Comprueba la fórmula de Euler en estos poliedros:

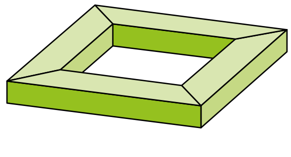
a)

b)

c)


a) $c = 10,\ a = 20,\ v = 12 \rightarrow 10 + 12 - 20 = 2$

b) $c = 7,\ a = 15,\ v = 10 \rightarrow 7 + 10 - 15 = 2$

c) $c = 7,\ a = 12,\ v = 7 \rightarrow 7 + 7 - 12 = 2$

7 Explica por qué este poliedro no es simple. Comprueba que no se cumple en él la fórmula de Euler.



No es simple porque tiene un orificio.

$c = 16,\ v = 16,\ a = 32 \rightarrow 16 + 16 - 32 = 0$

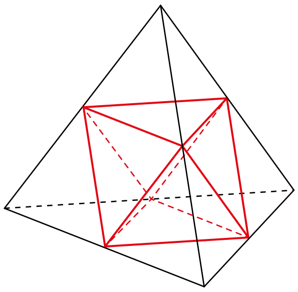
No se cumple la fórmula de Euler.

2 TRUNCANDO POLIEDROS REGULARES

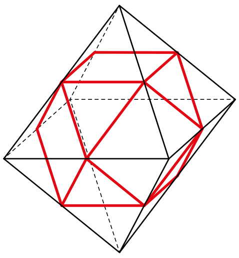
Página 218

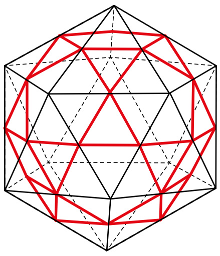
1 **Vamos a truncar, dando cortes que pasen por los puntos medios de las aristas adyacentes, los restantes poliedros regulares.**

a) Al truncar de este modo un tetraedro, se obtiene una figura conocida. ¿Cuál?



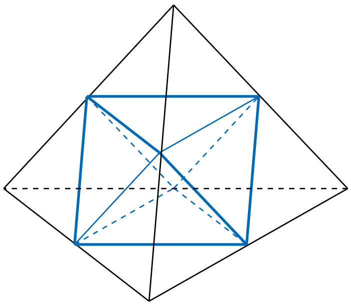
b) El resultado de truncar el octaedro es el cuboctaedro que vimos al principio de la página. Al truncar el icosaedro, obtienes el icosidodecaedro, que vimos también más arriba. Compruébalo en los dibujos.

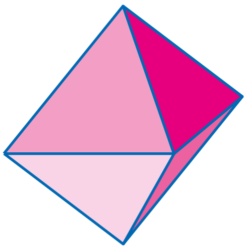




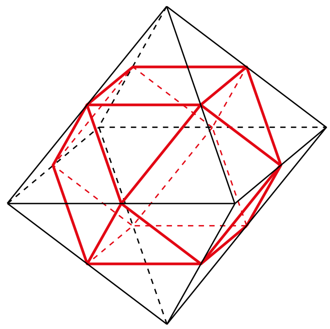
c) Relaciona los resultados con la dualidad de poliedros estudiada en el epígrafe anterior.

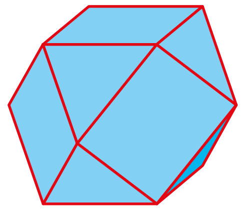
a) La figura que se obtiene es un octaedro.





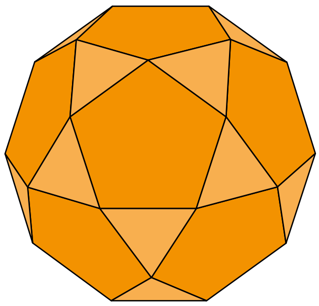
b) La figura que se obtiene es un cuboctaedro.





Al truncar un icosaedro se obtiene un icosidodecaedro, que se compone de pentágonos regulares y de triángulos equiláteros. En cada vértice confluyen dos pentágonos y dos triángulos (es un poliedro semirregular).

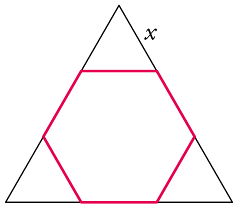
Al truncar un dodecaedro también se obtiene un icosidodecaedro.



c) La figura que resulta al truncar dos poliedros duales es la misma.

Página 219

2 **¿A qué distancia del vértice hemos de cortar los triángulos pequeños para que el hexágono resultante sea regular?**



$x = \frac{1}{3}l$, donde l es el lado del triángulo.

3 **Describe el tetraedro truncado.**

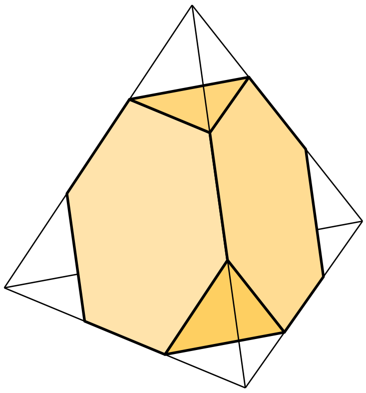
¿Cuántas caras tiene?

¿Cuántas son de cada tipo?

¿Cuántos vértices?

¿Cuántas aristas?

¿Cuánto mide la arista del tetraedro truncado con relación a la del tetraedro original?



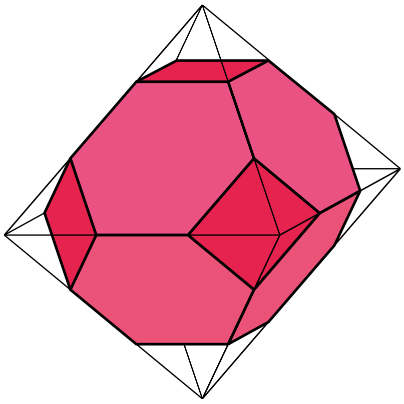
Tiene 8 caras, 4 hexágonos regulares y 4 triángulos equiláteros.

Tiene 12 vértices donde concurren dos hexágonos y un triángulo.

Tiene 18 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del tetraedro original.

4 **Describe el octaedro truncado.**

Indica el número de caras, aristas y vértices, y comprueba que es un poliedro semirregular y que cumple la fórmula de Euler.



Tiene 14 caras, 8 hexágonos y 6 cuadrados.

Tiene 24 vértices donde concurren dos hexágonos y un cuadrado.

Tiene 36 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del octaedro original.

- Es un poliedro semirregular porque todas sus caras son o cuadrados o hexágonos regulares, y en cada vértice concurren un cuadrado y dos hexágonos.
- $c = 14$, $v = 24$, $a = 36 \rightarrow 14 + 24 - 36 = 2$

5 **Repite el ejercicio anterior para el dodecaedro truncado y para el icosaedro truncado dibujados más arriba.**

- Dodecaedro truncado.

  Tiene 32 caras, 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros.

  Tiene 60 vértices donde concurren dos decágonos y un triángulo.

  Tiene 90 aristas.

  Es un poliedro semirregular porque sus caras son decágonos regulares y triángulos equiláteros, y en cada vértice concurren dos decágonos y un triángulo.

  $c = 32, \ v = 60, \ a = 90 \ \rightarrow \ 32 + 60 - 90 = 2$

- Icosaedro truncado.

  Tiene 32 caras, 20 hexágonos y 12 pentágonos.

  Tiene 60 vértices donde concurren dos hexágonos y un pentágono.

  Tiene 90 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del icosaedro original.

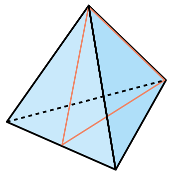
  Es un poliedro semirregular porque sus caras son hexágonos y pentágonos regulares, y en cada vértice concurren dos hexágonos y un pentágono.

  $c = 32, \ v = 60, \ a = 90 \ \rightarrow \ 32 + 60 - 90 = 2$

3 ▶ PLANOS DE SIMETRÍA DE UNA FIGURA

Página 220

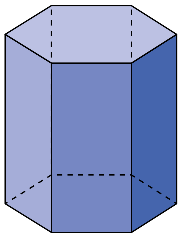
1 ¿Qué condiciones debe cumplir un plano para ser plano de simetría del tetraedro?



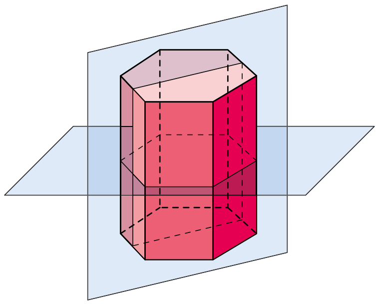
Para que un plano sea plano de simetría del tetraedro tiene que contener una arista y ser perpendicular a dos caras.

El tetraedro tiene 6 planos de simetría, uno por cada arista.

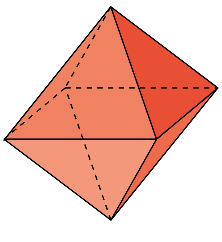
2 Dibuja un prisma hexagonal como este en tu cuaderno y traza un plano de simetría perpendicular a sus bases y otro paralelo.

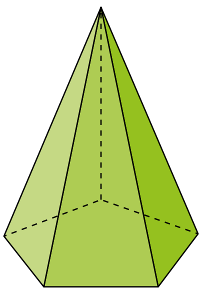


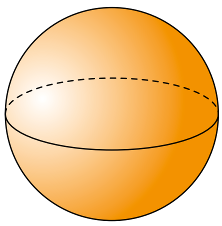
El prisma hexagonal regular tiene seis planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases, y otro plano de simetría paralelo a las dos bases.



3 Describe algunos planos de simetría del octaedro, de la pirámide pentagonal regular y de la esfera.





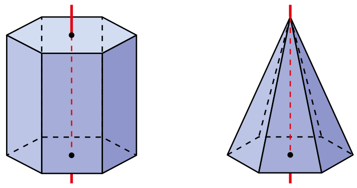


- Octoedro: cualquier plano que equidista de dos vértices opuestos y es perpendicular al segmento que los une es plano de simetría del octoedro.
- Pirámide pentagonal regular: cualquier plano perpendicular a la base que pasa por una arista y por la altura de la cara opuesta es plano de simetría de la pirámide.
- Esfera: cualquier plano que contenga al centro de la esfera es un plano de simetría de esta.

4 EJES DE GIRO DE UNA FIGURA

Página 221

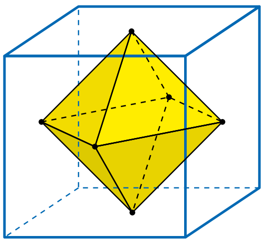
1 Indica el orden de los ejes de giro dibujados.



¿Tiene algún otro eje de giro el prisma? ¿Y la pirámide?

- Primas hexagonal: el eje de giro señalado tiene orden 6. Tiene otros 6 ejes de giro de orden 2; todos ellos son paralelos a las bases; 3 de ellos pasan por el punto medio de las dos caras laterales opuestas, y los otros 3, por las aristas opuestas.
- Pirámide hexagonal: el eje de giro señalado tiene orden 6. No hay más ejes de giro.

2 Estudia los ejes de giro del octaedro.



Puedes basarte en los del cubo.

Todos los ejes de giro del cubo son también ejes de giro del octaedro inscrito en él. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de ejes de giro y de los mismos órdenes. Es decir:

- Tres ejes de giro de orden cuatro, que pasan por dos vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, que pasan por los centros de dos caras opuestas.

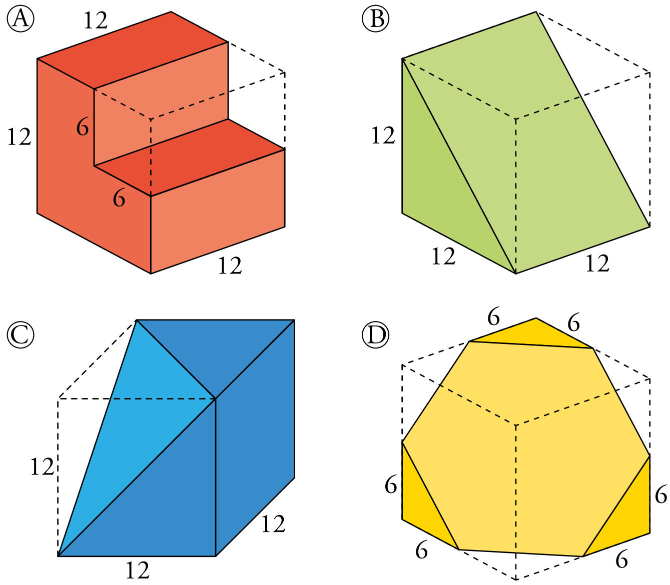
Al comparar estos ejes de giro con los del cubo, se puede observar la dualidad (caras $\leftrightarrow$ vértices, aristas $\leftrightarrow$ aristas):

- Los ejes que en el cubo pasan por los centros de caras opuestas, en el octaedro pasan por vértices opuestos.
- Los ejes que en el cubo pasan por aristas opuestas, en el octaedro pasan por aristas opuestas.
- Los ejes que en el cubo pasan por dos vértices opuestos del cubo, en el octaedro pasan por los centros de caras opuestas.

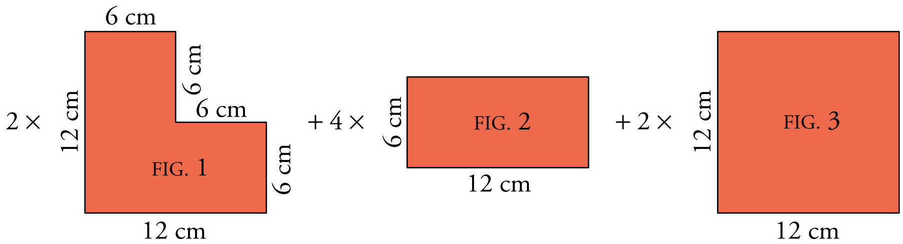
5 SUPERFICIE DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

Página 225

1 Calcula el área de estos poliedros obtenidos a partir de un cubo de 12 cm de arista:



Ⓐ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



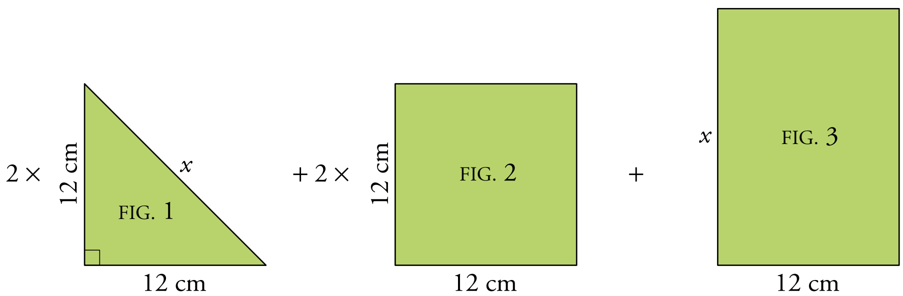
$A_{\text{FIG. 1}} = 12 \cdot 6 + 6 \cdot 6 = 108 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 108 + 4 \cdot 72 + 2 \cdot 144 = 792 \text{ cm}^2$

Ⓑ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$x = \sqrt{12^2 + 12^2} \approx 16,97 \text{ cm}$

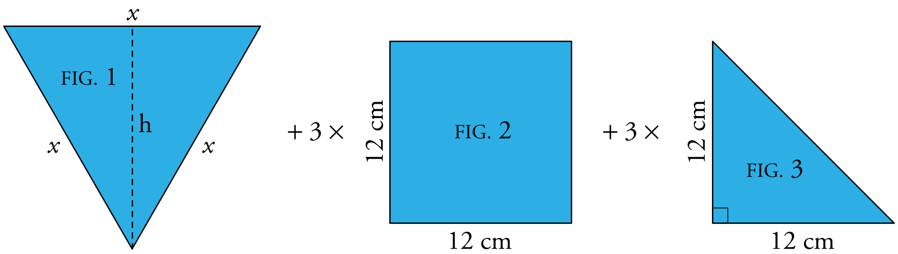
$A_{\text{FIG. 1}} = \dfrac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 16,97 = 203,64 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 72 + 2 \cdot 144 + 203,64 = 635,64 \text{ cm}^2$

Ⓒ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:

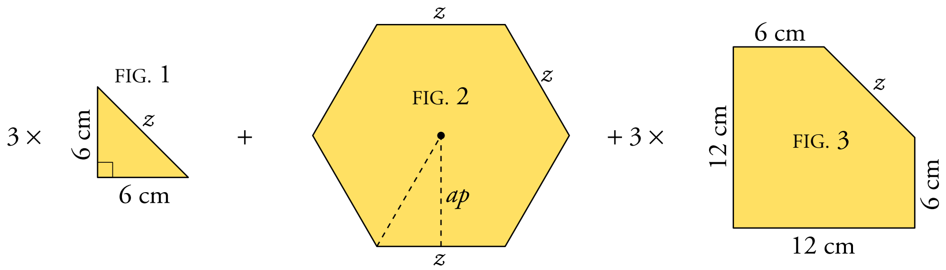


$x \approx 16{,}97$ cm (ver Ⓑ); $\text{h} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \approx 14{,}70$ cm

$A_{\text{FIG. 1}} = \dfrac{16{,}97 \cdot 14{,}70}{2} \approx 124{,}73 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{FIG. 2}} = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 72 \text{ cm}^2$ $\qquad A_{\text{TOTAL}} = 124{,}73 + 3 \cdot 144 + 3 \cdot 72 = 772{,}73 \text{ cm}^2$

Ⓓ Si hacemos el desarrollo de la figura, queda:



$z = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49$ cm

Apotema del hexágono regular: $ap = \sqrt{z^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{z\sqrt{3}}{2} \approx 7{,}35$ cm

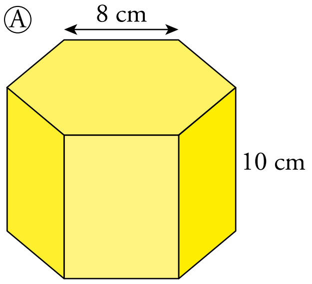
$A_{\text{FIG. 1}} = 18 \text{ cm}^2$

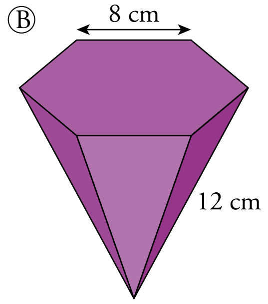
$A_{\text{FIG. 2}} = \dfrac{6 \cdot 8{,}49 \cdot 7{,}35}{2} = 187{,}20 \text{ cm}^2$

$A_{\text{FIG. 3}} = 12 \cdot 12 - A_{\text{FIG. 1}} = 144 - 7{,}35 = 136{,}65 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 3 \cdot 7{,}35 + 187{,}20 + 3 \cdot 136{,}65 = 619{,}2 \text{ cm}^2$

2 **Obtén la medida de la superficie del prisma y de la pirámide. La base de ambos es un hexágono regular.**



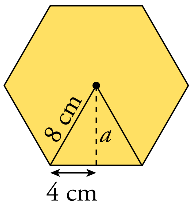


ARISTA BASE → **8 cm**

ALTURA PRISMA → **10 cm**

ARISTA BASE → **8 cm**

ARISTA LATERAL → **12 cm**

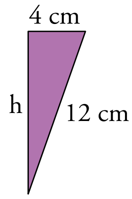


Ⓐ $a = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 = 166{,}32 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot 166{,}32 + 480 = 812{,}64 \text{ cm}^2$



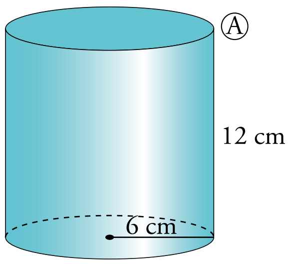
Ⓑ $A_{\text{BASE}} = 166{,}32 \text{ cm}^2$

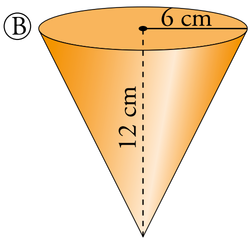
Apotema de la pirámide = h = $\sqrt{12^2 - 4^2} \approx 11{,}31$ cm

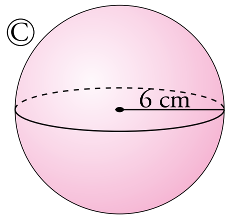
$A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{8 \cdot 11{,}31 \cdot 6}{2} = 271{,}44 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 166{,}32 + 271{,}44 = 437{,}76 \text{ cm}^2$

3 **Calcula el área de estos cuerpos:**







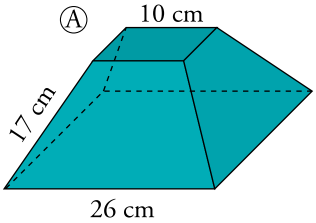
Ⓐ $A_{\text{TOTAL}} = 2\pi \cdot 6 \cdot 12 + 2\pi \cdot 6^2 \approx 678{,}58 \text{ cm}^2$

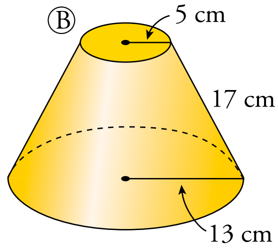
Ⓑ $g = \sqrt{12^2 + 6^2} \approx 13{,}42$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 6 \cdot 13{,}42 + \pi \cdot 6^2 \approx 366{,}06 \text{ cm}^2$

Ⓒ $A_{\text{TOTAL}} = 4\pi \cdot 6^2 \approx 452{,}39 \text{ cm}^2$

4 **Calcula el área de los siguientes cuerpos:**





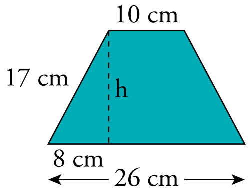
Ⓐ $A_{\text{BASE GRANDE}} = 26^2 = 676 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE PEQUEÑA}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$

$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ cm}$

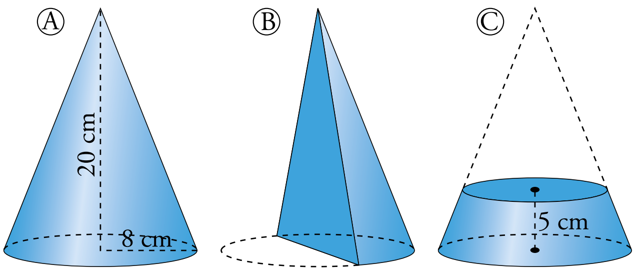
$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{26 + 10}{2} \cdot 15 = 1\,080 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 676 + 100 + 1\,080 = 1\,856 \text{ cm}^2$



Ⓑ $A = \pi \cdot 13^2 + \pi \cdot 5^2 + \pi(13 + 5) \cdot 17 = 530{,}93 + 78{,}54 + 961{,}33 = 1\,570{,}8 \text{ cm}^2$

5 **Calcula el área total del cono, del cuerpo que resulta de partirlo por la mitad y del tronco de cono obtenido al cortar por una sección paralela a la base, a 5 cm de la misma.**



Ⓐ $g = \sqrt{20^2 + 8^2} \approx 21{,}54 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot 8 \cdot 21{,}54 + \pi \cdot 8^2 = 742{,}42 \text{ cm}^2$

Ⓑ $A_{\text{BASE}} = \dfrac{\pi \cdot 8^2}{2} \approx 100{,}53 \text{ cm}^2$; $A_{1/2 \text{ LATERAL}} = \dfrac{\pi \cdot 8 \cdot 21{,}54}{2} \approx 270{,}68 \text{ cm}^2$

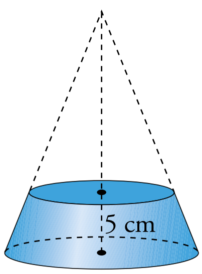
$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \dfrac{16 \cdot 20}{2} = 160 \text{ cm}^2$

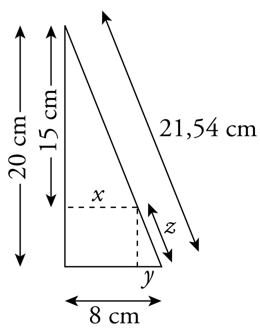
$A_{\text{TOTAL}} = 100{,}53 + 270{,}68 + 160 = 531{,}21 \text{ cm}^2$

Ⓒ $\dfrac{20}{8} = \dfrac{15}{x} \rightarrow x = 6 \text{ cm}$

$y = 8 - 6 = 2 \text{ cm}$

$z = \sqrt{5^2 + 2^2} \approx 5{,}39 \text{ cm}$



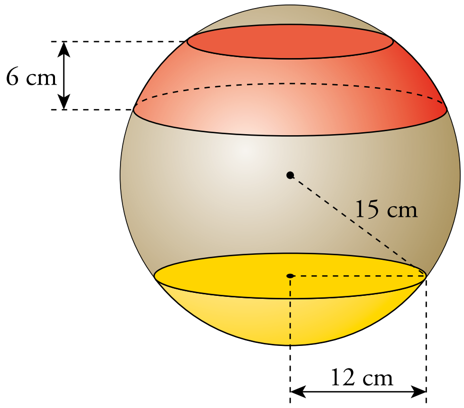


$A_{\text{TOTAL}} = \pi \cdot (8 + 6) \cdot 5{,}39 + \pi \cdot 8^2 + \pi \cdot 6^2 \approx 551{,}22 \text{ cm}^2$

6 **En una esfera de 30 cm de diámetro, calcula:**

a) El área de una zona esférica de 6 cm de altura.

b) El área de un casquete esférico cuya base tiene un radio de 12 cm.

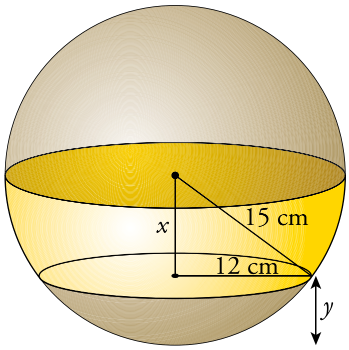


a) $A_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$

$x = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}$

$y = 15 - 9 = 6 \text{ cm}$

$A_{\text{CASQUETE ESFÉRICO}} = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 \approx 565{,}49 \text{ cm}^2$



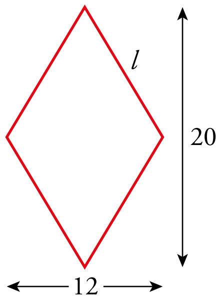
7 **Halla el área de:**

a) **Un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, sabiendo que su arista lateral mide 24 cm.**

b) **Una pirámide recta con la misma base y la misma arista lateral que el prisma anterior.**

c) **Un cuboctaedro de 10 cm de arista.**

d) **Un dodecaedro truncado de 10 cm de arista.**



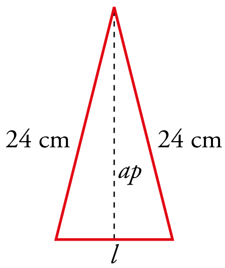
$l = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 11{,}66$ cm

$A_{\text{ROMBO}} = \dfrac{20 \cdot 12}{2} = 120 \text{ cm}^2$

$P_{\text{ROMBO}} = 46{,}65$ cm

a) $A_{\text{prisma}} = 2 \cdot A_{\text{rombo}} + P_{\text{rombo}} \cdot 24 = 1\,359{,}6 \text{ cm}^2$

b)



Cara lateral de la pirámide:

Apotema de la pirámide: $ap = \sqrt{24^2 + 34} = 4{,}97$

$A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot l \cdot ap/2 = 115{,}90 \text{ cm}^2$

$A_{\text{BASE}} = 120 \text{ cm}^2$

$A_{\text{PIRÁMIDE}} = 235{,}9 \text{ cm}^2$

c) 6 cuadrados $\rightarrow A_1 = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$

8 triángulos $\rightarrow A_2 = 8 \cdot (10 \cdot 10\sqrt{3}/2) : 2 = 346{,}41 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 946{,}41 \text{ cm}^2$

d) 12 pentágonos y 20 hexágonos.

Área de un pentágono de lado 10 cm:

$A_1 = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$

Área de un hexágono de lado 10 cm:

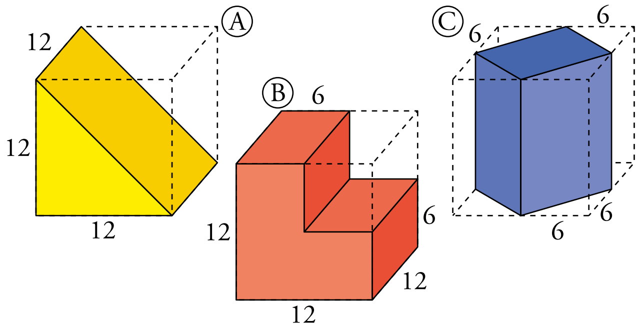
$A_2 = \dfrac{6 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 259{,}80 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 12 \cdot A_1 + 20 \cdot A_2 = 7\,260 \text{ cm}^2$

6 ▶ VOLUMEN DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

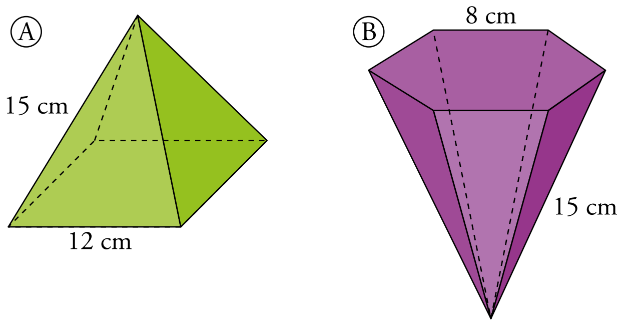
Página 227

1 **Calcula el volumen de estos prismas, obtenidos cortando un cubo de 12 cm de arista:**

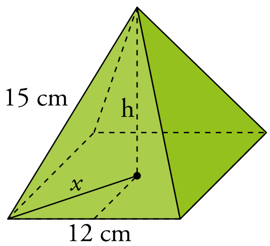


Ⓐ $V = \dfrac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$ Ⓑ $V = \dfrac{3}{4} \cdot 12^3 = 1\,296 \text{ cm}^3$ Ⓒ $V = \dfrac{12^3}{2} = 864 \text{ cm}^3$

2 **Calcula el volumen de estas pirámides cuyas bases son polígonos regulares:**



Ⓐ

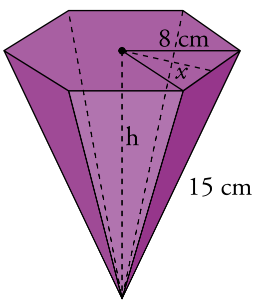


$x = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49 \text{ cm}$

$h = \sqrt{15^2 - 8,46^2} \approx 12{,}37 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12{,}37 \approx 593{,}76 \text{ cm}^3$

Ⓑ

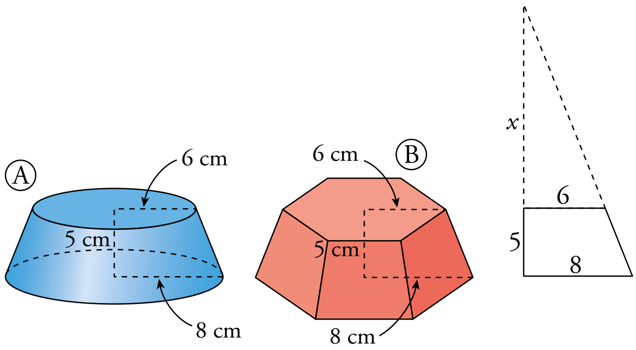


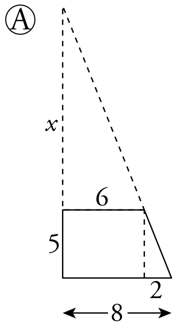
$h = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 12{,}69 \text{ cm}$

$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 12{,}69 \approx 703{,}53 \text{ cm}^3$

3 **Calcula el volumen del tronco de cono y el del tronco de pirámide.**



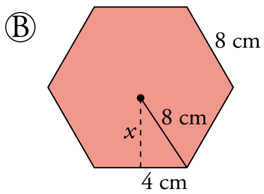


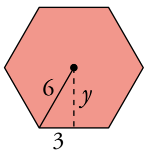
$$\frac{5}{2} = \frac{5+x}{8} \rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 20 = 1\,340{,}41 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 15 = 565{,}49 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = 1\,340{,}41 - 565{,}49 = 774{,}92 \text{ cm}^3$$





$$x = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93 \text{ cm}$$

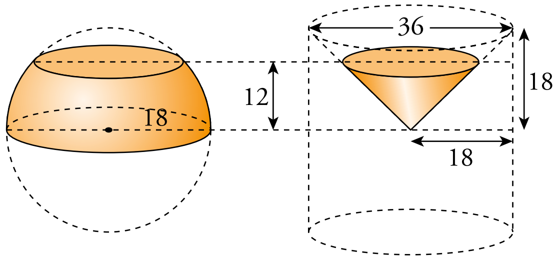
$$V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6 \cdot 20 = 1\,108{,}8 \text{ cm}^3$$

$$y = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2 \text{ cm}$$

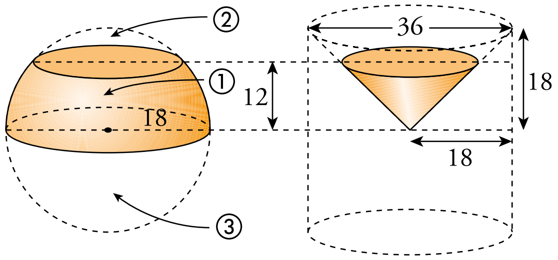
$$V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} \cdot 6 \cdot 15 = 468 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = 1\,108{,}8 - 468 = 640{,}8 \text{ cm}^3$$

4 **Se corta una esfera de 36 cm de diámetro por dos planos paralelos: uno pasa por el centro y el otro dista 12 cm del centro.**



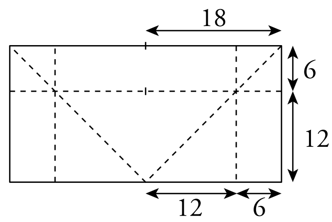
Calcula el volumen de cada una de las tres porciones en las que ha quedado dividida la esfera.



1) $V_{\text{PORCIÓN (1) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 12 = 3\,888\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO (1) CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 576\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (1) ESFERA}} = 3\,888\pi - 576\pi \approx 10\,404{,}95 \text{ cm}^3$



2) $V_{\text{PORCIÓN (2) CILINDRO}} = \pi \cdot 18^2 \cdot 6 = 1\,944\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 18^2 \cdot 18 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 = 1\,368\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN (2) ESFERA}} = 1\,944\pi - 1\,368\pi \approx 1\,809{,}56 \text{ cm}^3$

3) $V_{\text{PORCIÓN (3) ESFERA}} = \dfrac{\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 18^3}{2} = 12\,214{,}51 \text{ cm}^3$

7 COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Página 229

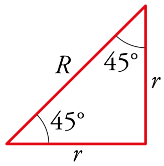
Hazlo tú

- **Halla, en kilómetros, la medida del paralelo 45°.**

  r = radio del paralelo 45°

  $r^2 + r^2 = R^2 \rightarrow 2r^2 = 6\,366{,}2^2 \rightarrow r = 4\,501{,}58$ km

  Perímetro = $2\pi \cdot 4\,501{,}58 = 28\,284{,}26$ km



1 **El metro, unidad de medida de longitud, se definía antiguamente como *la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.* Es decir, un meridiano terrestre tiene 40 000 000 de metros.**

Según esto:

a) Calcula el radio de la Tierra en kilómetros.

b) Su superficie en kilómetros cuadrados.

c) Su volumen en kilómetros cúbicos.

d) Calcula el área de un huso horario.

a) Meridiano = Perímetro = $2\pi \cdot R = 40\,000\,000$ m $= 40\,000$ km

$R \approx 6\,366{,}2$ km

b) Superficie = $4\pi \cdot (6\,366{,}2)^2 = 509\,296\,182{,}1$ km^2

c) Volumen = $\frac{4}{3}\pi \cdot (6\,366{,}2)^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3

d) Área huso horario = $\frac{509\,296\,182{,}1}{24} = 21\,220\,674{,}25$ km^2

2 **Un barco va de un punto *A*, situado en las costas de África a 30° latitud norte y 10° longitud oeste, a otro punto *B*, con la misma latitud y 80° de longitud oeste, siguiendo el paralelo común.**

a) ¿Qué distancia ha recorrido?

b) ¿Qué distancia recorrería si la diferencia de longitudes de los dos puntos fuera de 180°?

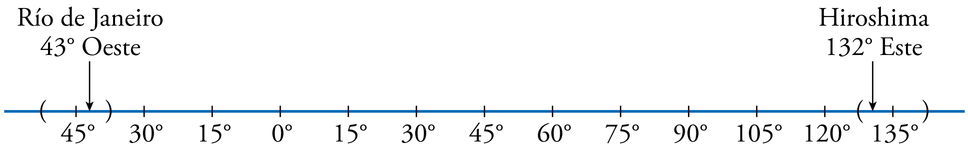
a) Entre A y B hay un arco de 80° – 10° = 70°

Como hemos visto en el problema resuelto de esta página, el perímetro del paralelo 30° es 34 641,1 km.

Por tanto, la distancia de A a B es $\frac{34\,641{,}1}{360°} \cdot 70° \approx 6\,735{,}77$ km.

b) $\frac{34\,641{,}1}{2} = 17\,320{,}55$ km.

3 **En Río de Janeiro (43° O) son las 7 de la mañana. ¿Qué hora es en Hiroshima (132° E)**



Hay 12 horas de diferencia. Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde.

Otra forma de hacerlo es:

$132° = 15° \cdot 8 + 12$

Hiroshima está en el huso horario número 9 al este.

$43° = 15° \cdot 2 + 13$

Río de Janeiro está en el huso horario número 3 al oeste.

Están, pues, a 12 husos horarios de diferencia.

Por tanto, en Hiroshima son las 7 de la tarde (19 h).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 230

1 Estación Espacial Internacional

Hazlo tú

- **Responde a las mismas preguntas con uno de los satélites Meteosat de segunda generación que se encuentra a una altura de 36 000 km.**

a) $d = \sqrt{(6371 + 36000)^2 - 6731^2} \approx 41833$ km

El punto más alejado de la Tierra que se puede ver desde uno de los satélites Meteosat de segunda generación está a 41 833 km de él.

b) $\dfrac{6371 + 36000}{6371} = \dfrac{6371}{x} \rightarrow x \approx 958$ km

La altura del cilindro circunscrito correspondiente es 6 371 – 958 = 5 413 km.

Por tanto: $A_{\text{CASQUETE}} = 2 \cdot \pi \cdot 6\,371 \cdot 5\,413 \approx 216\,683\,330 \text{ km}^2$

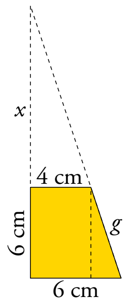
c) Ya sabemos que $A_{\text{TIERRA}} \approx 510\,000\,000 \text{ km}^2$

Porcentaje $= \dfrac{A_{\text{CASQUETE}}}{A_{\text{TIERRA}}} = \dfrac{216683330}{520000000} = 0{,}4249 \approx 42{,}5\ \%$

2 Área y volumen de un tronco de cono

Hazlo tú

- **Halla el área total y el volumen de un tronco de cono de 6 cm de altura cuyos radios miden 6 cm y 4 cm.**



$\dfrac{x}{4} = \dfrac{x+6}{6} \rightarrow 6x = 4x + 24 \rightarrow x = \dfrac{24}{2} = 12$

$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 18 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 12 \approx 477{,}52 \text{ cm}^3$

$g = \sqrt{6^2 + 2^2} \approx 6{,}32$ cm

$A_{\text{TOTAL}} = \pi(6 + 4) \cdot 6{,}32 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 42 \approx 361{,}91$ cm

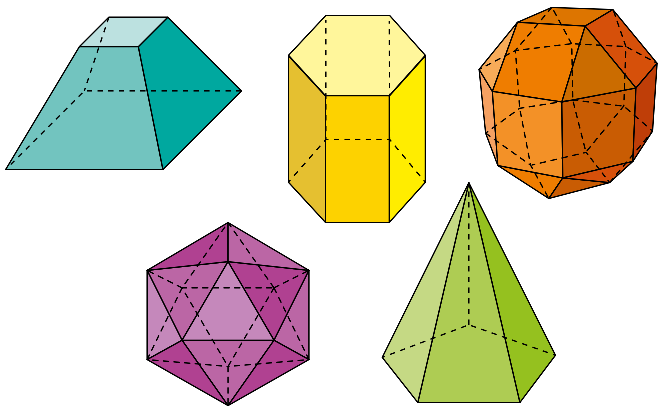
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 231

Practica

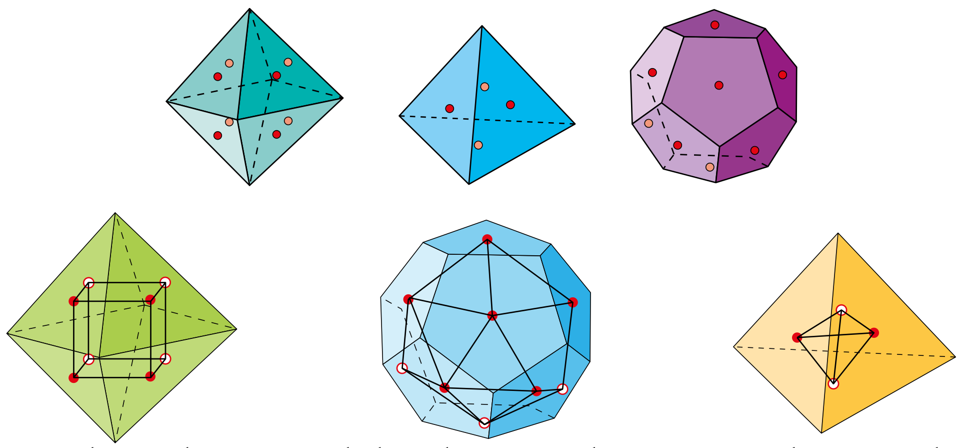
Poliedros regulares y semirregulares. Ejes y planos de simetría

1 **Indica cuáles de los siguientes poliedros son semirregulares y explica por qué no lo son los demás:**



- Son semirregulares los poliedros amarillo y naranja.
- Los poliedros azul y verde no son semirregulares porque sus aristas no son todas de igual longitud.
- El poliedro morado es un icosaedro, es decir, es regular.

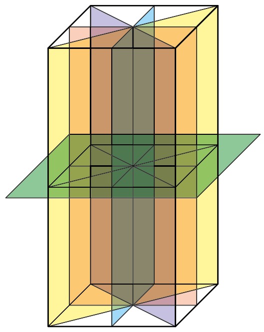
2 **Hemos señalado en rojo los centros de las caras «frontales» de estos poliedros, y en color más claro, los centros de algunas caras «ocultas». Uniéndolos convenientemente se obtienen los poliedros duales. Hazlo en tu cuaderno.**



octaedro – cubo   dodecaedro – icosaedro   tetraedro – tetraedro

3 **¿Cuáles son los planos de simetría de un ortoedro de base cuadrada? ¿Y los ejes de giro? ¿De qué orden es cada uno de ellos?**

Contesta a las mismas preguntas en el caso de un cubo.



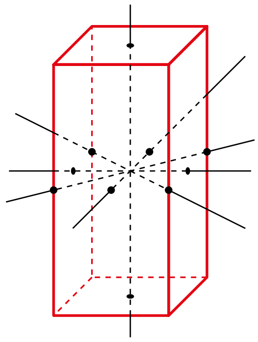
- Son 5 planos de simetría:

  Dos pasan por los puntos medios de las aristas de la base.

  Dos pasan por los vértices opuestos de las bases.

  (Estos cuatro planos corresponden a los ejes de simetría del cuadrado).

  Uno pasa por los puntos medios de las aristas laterales.



- Tiene 5 ejes de giro:

  Un eje de giro de orden cuatro: la recta perpendicular a las bases por su punto medio.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras paralelas.

  Dos ejes de giro de orden dos: las rectas que pasan por los puntos medios de dos aristas laterales opuestas.

El cubo tiene 9 planos de simetría, tres ejes de orden 4, cuatro de orden 3 y seis de orden 2. Se pueden encontrar gráficos en los epígrafes 3 y 4 de la unidad.

4 **Conociendo las características de un dodecaedro (caras, vértices), describe cómo será el dodecaedro truncado.**

Tiene 32 caras, 12 decágonos regulares y 20 triángulos equiláteros.

Tiene 60 vértices donde concurren dos decágonos y un triángulo.

Tiene 90 aristas.

5 **Conocidas las características de un icosaedro, describe cómo será el icosaedro truncado.**

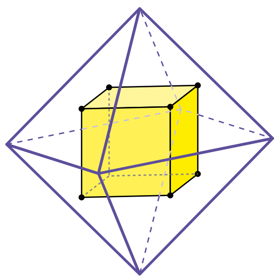
Tiene 32 caras, 20 hexágonos y 12 pentágonos.

Tiene 60 vértices donde concurren dos hexágonos y un pentágono.

Tiene 90 aristas que miden $\frac{1}{3}l$, siendo l la medida de la arista del icosaedro original.

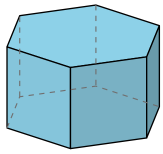
6 **Recuerda la relación de dualidad entre el cubo y el octaedro (caras-vértices).**

Basándote en los planos de simetría del cubo, describe todos los planos de simetría del octaedro.



Todos los planos de simetría del cubo inscrito en el octaedro son también planos de simetría del octaedro. Por tanto, el octaedro y el cubo tienen el mismo número de planos de simetría.

7 **Dibuja en tu cuaderno el poliedro dual del siguiente prisma hexagonal regular:**

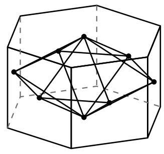


a) ¿Son el prisma o su dual poliedros semirregulares?

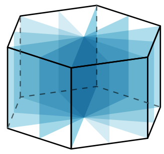
b) Indica los planos de simetría de cada uno.

c) Indica los ejes de giro de cada poliedro (el prisma y su dual) y di de qué orden es cada uno.

a) El prisma sí es semirregular pero su dual no lo es, ya que no concurren el mismo número de caras en todos sus vértices.



b) El prisma tiene siete planos de simetría: seis planos, uno por cada eje de simetría de sus bases y otro plano paralelo a las dos bases y a la misma distancia de cada una.

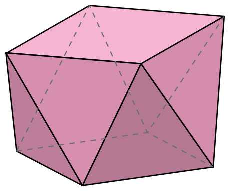


Su dual tiene los mismos.

c) El prisma tiene trece ejes de giro: uno de orden 6 que pasa por el centro de las dos bases; tres de orden 2, paralelos a las bases y que pasan por el punto medio de dos caras laterales opuestas; tres de orden 2, paralelos a las bases y que pasan por las aristas opuestas; y otros seis más de orden 2 que pasan por los vértices opuestos de las caras laterales.

Su dual tiene los mismos.

8 **Dibuja en tu cuaderno este antiprisma cuadrado:**



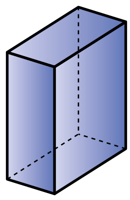
a) ¿Cuántos planos de simetría tiene?

b) Indica sus ejes de giro. ¿De qué orden son?

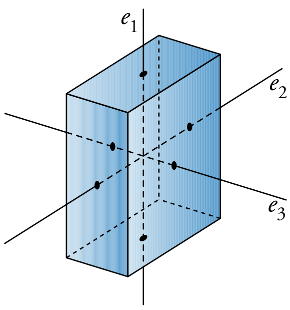
a) Cuatro planos de simetría, uno por cada eje de simetría de sus bases.

b) Un eje de giro de orden 4 que pasa por el centro de las dos bases.

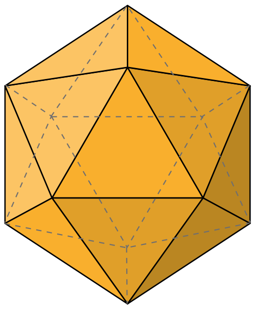
9 **¿Qué ejes de giro tiene un ortoedro con las tres dimensiones distintas? ¿De qué órdenes son?**



Hay tres ejes de giro de orden 2, e_1, e_2 y e_3.



10 **Sabemos que un icosaedro regular tiene varios planos de simetría. Por ejemplo, si te fijas en dos de sus caras opuestas, los tres planos que pasan por sus tres alturas serían planos de simetría del icosaedro.**



a) ¿También pasan planos de simetría por sus aristas opuestas? ¿Cuántos hay?

b) ¿Cuántos planos de simetría tiene en total?

c) Sabemos que el eje de giro que pasa por dos vértices opuestos del icosaedro tiene orden 5. ¿Qué orden tienen los que pasan por los centros de dos aristas opuestas? ¿Y los que pasan por los centros de dos caras opuestas?

a) Sí, son 15 planos.

b) Tiene 15 planos de simetría, ya que los que nombra el enunciado y los del apartado a) son los mismos.

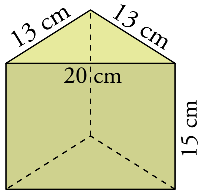
c) Los ejes de giro que pasan por los centros de dos aristas opuestas tienen orden 2, y los otros, orden 3.

Página 232

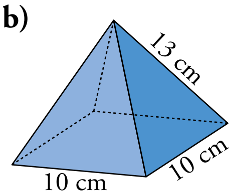
Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

11 Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a)



b)



a) Calculamos primero la altura de la base, h.

$h = \sqrt{13^2 - 10^2} \approx 8{,}31$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2 \cdot \dfrac{20 \cdot 8{,}31}{2} = 166{,}2 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 20 \cdot 15 + 2 \cdot 13 \cdot 15 = 300 + 2 \cdot 195 = 690 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 166 + 690 = 856 \text{ cm}^2$$

$V = 8{,}31 \cdot 15 = 1\,246{,}5 \text{ cm}^3$

b) Calculamos primero la apotema, m, y la altura, h, de la pirámide.

$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm; $h = \sqrt{12^2 - 5^2} \approx 10{,}91$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = 10^2 = 100 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 12}{2} = 240 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 100 + 240 = 340 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 100 \cdot 10{,}91 \approx 363{,}67 \text{ cm}^3$

12 Calcula el área y el volumen de los cuerpos geométricos siguientes:

a) Prisma de altura 20 cm y cuya base es un rombo de diagonales 18 cm y 12 cm.

b) Pirámide hexagonal regular de arista lateral 18 cm y arista básica 6 cm.

c) Octaedro regular de 10 cm de arista.

d) Cilindro de altura 27 cm y cuya circunferencia básica mide 44 cm de longitud.

e) Cono de radio 9 cm y generatriz 15 cm.

f) Semiesfera de 10 cm de radio.

g) Esfera inscrita en un cilindro de 1 m de altura.

h) Casquete esférico de 7 cm de altura de una esfera de radio 12 cm.

a) Calculamos primero el lado del rombo, l.

$l = \sqrt{6^2 + 9^2} \approx 10{,}82$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2 \cdot \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 216 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 4 \cdot 10{,}82 \cdot 20 = 865{,}6 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 216 + 865{,}6 = 1\,081{,}6 \text{ cm}^2$$

$V = 108 \cdot 20 = 2\,160 \text{ cm}^3$

b) Calculamos primero la apotema de la base, x, y la de la pirámide, m.

$x = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2$ cm; $m = \sqrt{18^2 - 6^2} \approx 17$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 17}{2} = 306 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 93{,}6 + 306 = 399{,}6 \text{ cm}^2$$

Calculamos la altura de la pirámide y el volumen:

$h = \sqrt{17^2 - 5{,}2^2} \approx 16{,}19 \text{ cm} \to V = \dfrac{1}{3} \cdot 93{,}6 \cdot 16{,}19 = 505{,}128 \text{ cm}^3$

c) Calculamos la altura de las caras, m, y el área:

$m = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}66 \text{ cm} \to A = 8 \cdot \dfrac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$

Para calcular el volumen del octaedro calcularemos el volumen de una pirámide de base cuadrada y lo multiplicaremos por dos.

$h = \sqrt{8{,}66^2 - 5^2} \approx 7{,}1 \text{ cm} \to V_{\text{PIRÁMIDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 7{,}1 \approx 236{,}7 \text{ cm}^3$

$V_{\text{OCTAEDRO}} = 2 \cdot 236{,}7 = 473{,}4 \text{ cm}^3$

d) Calculamos primero el radio de la base, r.

$r = \dfrac{44}{2\pi} \approx 7$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = 2\pi \cdot 7^2 \approx 307{,}88 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 44 \cdot 27 = 1\,188 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 307{,}88 + 1\,188 = 1\,495 \text{ cm}^2$$

$V = 153{,}94 \cdot 27 = 4\,156{,}38 \text{ cm}^3$

e) Calculamos primero la altura del cono, h.

$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 9^2 \approx 254{,}47 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 424{,}12 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 254{,}47 + 424{,}12 = 678{,}59 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 254{,}47 \cdot 12 = 1\,017{,}88 \text{ cm}^3$

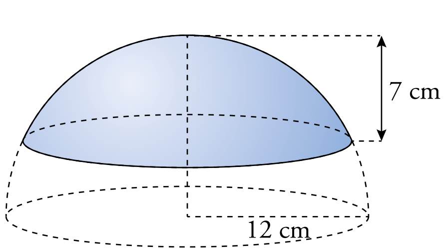
f) $A = \dfrac{4\pi \cdot 10^2}{2} \approx 628{,}32 \text{ cm}^2$

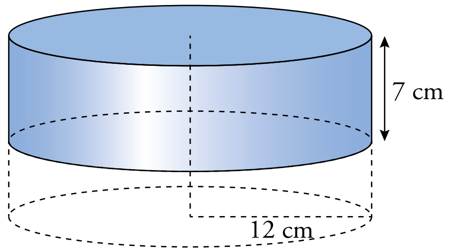
$V = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 10^3}{2} \approx 2\,094{,}4 \text{ cm}^3$

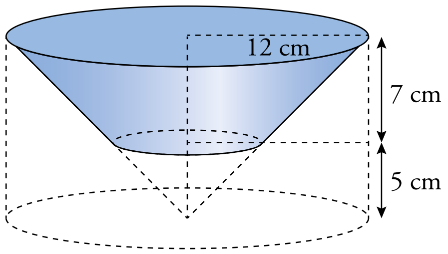
g) $A = 4\pi \cdot 50^2 \approx 31\,415{,}93 \text{ cm}^2$

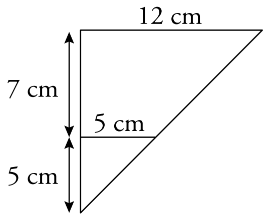
$V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 50^3 \approx 523\,598{,}78 \text{ cm}^3$

h) $A = 2\pi \cdot 12 \cdot 7 \approx 527{,}79 \text{ cm}^2$









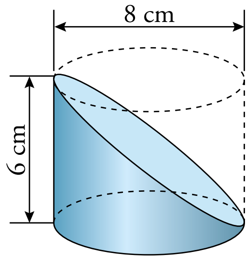
$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 12^2 \cdot 7 \approx 3\,166{,}73 \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 12 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 5 \approx 1\,678{,}66 \text{ cm}^3$

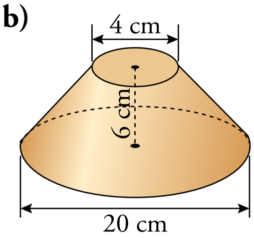
$V_{\text{CASQUETE}} = 3\,166{,}73 - 1\,678{,}66 = 1\,488{,}07 \text{ cm}^3$

13 Halla el área y el volumen de estos cuerpos geométricos:

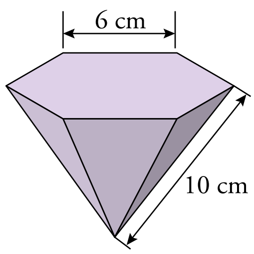
a)



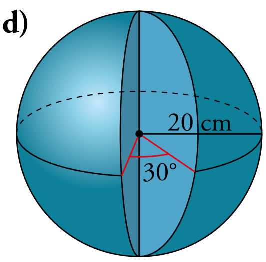
b)



c)



d)



a) Primero calculamos el radio de la base inclinada, r.

$d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm} \;\rightarrow\; r = 5 \text{ cm}$

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{BASES}} &= \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 5^2 \approx 128{,}81 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} &= \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 6}{2} = 75{,}4 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 128{,}81 + 75{,}4 = 204{,}21 \text{ cm}^2$$

$V = \dfrac{\pi \cdot 4^2 \cdot 6}{2} = 150{,}8 \text{ cm}^3$

b) Calculamos primero la generatriz, g.

$g = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \pi \cdot 10^2 + \pi \cdot 2^2 \approx 326,73 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \dfrac{2\pi \cdot 10 + 2\pi \cdot 2}{2} \cdot 10 \approx 376,99 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 326,73 + 376,99 = 703,72 \text{ cm}^2$$

Para calcular el volumen del tronco de cono restaremos el volumen del cono grande del volumen del cono pequeño. Para ello debemos conocer la altura del cono pequeño, x.

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{6 + x}{10} \to 10x = 12 + 2x \to x = 1,5$ cm

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 7,5 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 1,5 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 726 \approx 760,27 \text{ cm}^3$

c) Calculamos la apotema de la base, ap, la apotema de la pirámide, m, y la altura de la pirámide, h.

$ap = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5,2$ cm

$m = \sqrt{10^2 - 3^2} \approx 9,54$ cm

$h = \sqrt{9,54^2 - 5,2^2} \approx 8$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 9,54}{2} = 171,72 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 93,6 + 171,72 = 265,32 \text{ cm}^2$$

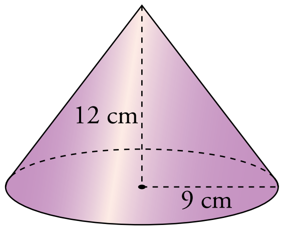
$V = \dfrac{1}{3} \cdot 93,6 \cdot 8 = 249,6 \text{ cm}^3$

d) Debemos observar que la porción de esfera que estamos eliminando es $\dfrac{30°}{360°} = \dfrac{1}{12}$ de la esfera completa, y que al calcular el área debemos añadir dos semicírculos de radio 20 cm.

$A = \dfrac{11}{12} \cdot 4\pi \cdot 20^2 + \pi \cdot 20^2 \approx 4\,607,67 + 1\,256,64 = 5\,864,31 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{11}{12} \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 20^3 \approx 30\,717,79 \text{ cm}^3$

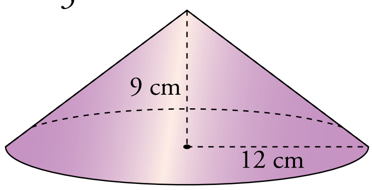
14 **Haciendo girar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Dibújalos y halla el área y el volumen de cada uno de ellos.**



$g = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 9^2 \approx 254,47 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 \approx 424,12 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 254{,}47 + 424{,}12 = 678{,}59 \text{ cm}^2$$

$V = \frac{1}{3} \cdot 254{,}57 \cdot 12 \approx 1\,017{,}88 \text{ cm}^3$



$g = 15$ cm

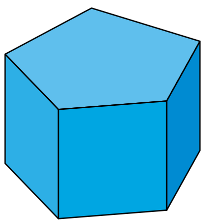
$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \pi \cdot 12^2 \approx 452,39 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = \pi \cdot 12 \cdot 15 \approx 565,49 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 452{,}39 + 565{,}49 = 1\,017{,}88 \text{ cm}^2$$

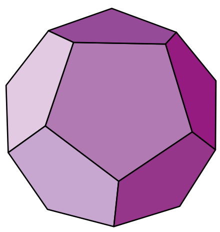
$V = \frac{1}{3} \cdot 452{,}39 \cdot 9 \approx 1\,357{,}17 \text{ cm}^3$

15 **Calcula la superficie de los cuerpos geométricos que se describen a continuación:**

a) Un prisma recto pentagonal regular cuyas aristas miden, todas, 10 cm.

b) Un dodecaedro regular de arista 10 cm.





Recuerda que la apotema de un pentágono regular de lado l *mide 0,6882* l.

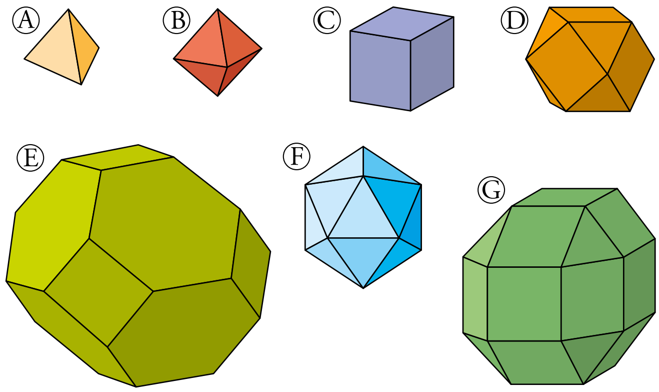
a) Apotema del pentágono = 6,88 cm

$S_{\text{BASE}} = \dfrac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}88}{2} = 172 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $S_{\text{LATERAL}} = 10 \cdot 10 \cdot 5 = 500 \text{ cm}^2$

$S_{\text{TOTAL}} = 172 \cdot 2 + 500 = 844 \text{ cm}^2$

b) $S_{\text{TOTAL}} = S_{\text{PENTÁGONO}} \cdot 12 = 172 \cdot 12 = 2\,064 \text{ cm}^2$

16 **Calcula el área total de los siguientes poliedros regulares y semirregulares. Toma, en todos los casos, 8 cm de arista:**



Sabemos que la suma de las áreas de las figuras A y F es igual al triple del área de la figura B. Decimos, entonces que:

A + F = 3B

Comprueba cuáles de estas afirmaciones son ciertas y cuáles no:

a) 2C + D = G **b) B + 3C = G**

c) B + C = D **d) 2F + B + C = E**

Para las figuras A y B, primero calculamos la altura de los triángulos de las caras, h.

$h = \sqrt{8^2 - 4^2} \approx 6{,}93$ cm

Figura A $\rightarrow$ $A_A = 4 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 4 \cdot 27{,}72 = 110{,}88 \text{ cm}^2$

Figura B $\rightarrow$ $A_B = 8 \cdot 27{,}72 = 221{,}76 \text{ cm}^2$

Figura C $\rightarrow$ $A_C = 6 \cdot 8^2 = 384 \text{ cm}^2$

Figura D $\rightarrow$ $A_D = 6 \cdot 8^2 + 8 \cdot 27{,}72 = 384 + 221{,}76 = 605{,}76 \text{ cm}^2$

Figura E $\rightarrow$ $ap_{\text{HEXÁGONO}} = h = 6{,}93$ cm

$A_E = 8 \cdot \dfrac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} + 6 \cdot 8^2 = 1\,330{,}56 + 384 = 1\,714{,}56 \text{ cm}^2$

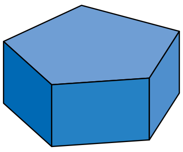
Figura F $\rightarrow$ $A_F = 20 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 554{,}4 \text{ cm}^2$

Figura G $\rightarrow$ $A_G = 18 \cdot 8^2 + 8 \cdot \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 1\,373{,}76 \text{ cm}^2$

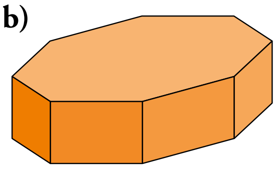
Todas las afirmaciones son ciertas.

17 **Halla las áreas y los volúmenes de estos prismas regulares:**

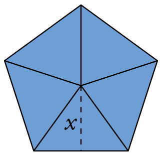
a)



b)



En ambos casos, la arista básica mide 10 cm, y la altura, 8 cm.



10 cm

$x^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \;\rightarrow\; x = 8{,}66$ cm

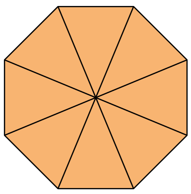
$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{10 \cdot 5 \cdot 8{,}66}{2} = 216{,}5 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 5 \cdot 10 \cdot 8 = 400 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 216{,}5 + 400 = 833 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 216{,}5 \cdot 8 = 1\,732 \text{ cm}^3$

En este caso el apotema de este prisma es el mismo que el anterior.



10 cm

$A_{\text{BASE}} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{8 \cdot 10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$

$A_{\text{LATERAL}} = P \cdot h = 8 \cdot 10 \cdot 8 = 640 \text{ cm}^2$

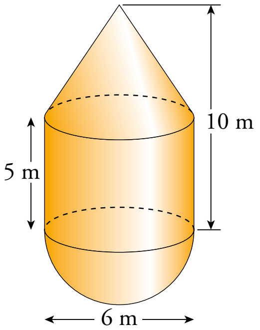
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot 346{,}4 + 640 = 1\,332{,}8 \text{ cm}^2$

$V = A_{\text{BASE}} \cdot h = 346{,}4 \cdot 8 = 2\,771{,}2 \text{ cm}^3$

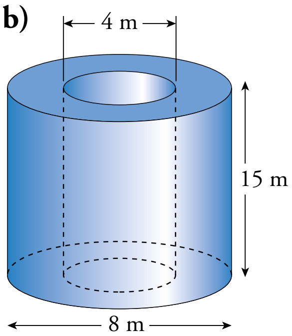
Página 233

18 **Calcula las áreas y los volúmenes de los siguientes cuerpos geométricos:**

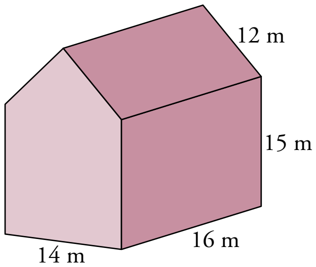
a)



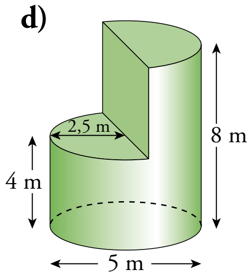
b)



c)



d)



a) Descomponemos el cuerpo en un cono, un cilindro y una semiesfera. Calculamos primero la generatriz del cono, g.

$$g = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83 \text{ cm}$$

$$A = \pi r g + 2\pi r h + \frac{4\pi r^2}{2} = \pi \cdot 3 \cdot 5{,}83 + 2\pi \cdot 3 \cdot 5 + \frac{4\pi 3^2}{2} \approx 205{,}74 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \pi r^2 h + \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{1}{3}\pi 3^2 5 + \pi 3^2 5 + \frac{\frac{4}{3}\pi 3^3}{2} \approx 207{,}35 \text{ cm}^3$$

b) Descomponemos el cuerpo en dos cilindros, uno dentro de otro.

$$A = 2(\pi R^2 - \pi r^2) + 2\pi R h + 2\pi r h = 2\pi(R^2 - r^2) + 2\pi h(R + r) =$$

$$= 2\pi(4^2 - 2^2) + 2\pi 15(4 + 2) \approx 640{,}88 \text{ cm}^2$$

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) = \pi 15(4^2 - 2^2) \approx 565{,}49 \text{ cm}^3$$

c) Descoponemos el cuerpo en un prisma y una pirámide triangular. Calculamos primero la altura de la base de la pirámide, h.

$$h = \sqrt{12^2 - 7^2} \approx 9{,}75 \text{ cm}$$

$$A = 14 \cdot 16 + 2 \cdot 16 \cdot 15 + 2 \cdot 16 \cdot 12 + 2 \cdot 14 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{14 \cdot 9{,}75}{2} = 1\,644{,}5 \text{ cm}^2$$

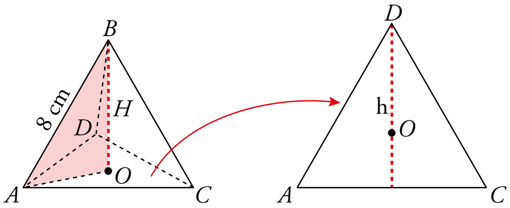
$$V = 14 \cdot 16 \cdot 15 + \frac{14 \cdot 9{,}75}{2} \cdot 16 = 4\,452 \text{ cm}^3$$

d) La figura resulta de quitarle al cilindro de radio 2,5 cm y altura 8 cm un cuarto del mismo.

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{BASES}} &= 2\pi \cdot 2{,}5^2 \approx 39{,}27 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} &= \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 8 + 5 \cdot 4 \approx 31{,}78 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_{\text{TOTAL}} = 39{,}27 + 31{,}78 = 71{,}05 \text{ cm}^2$$

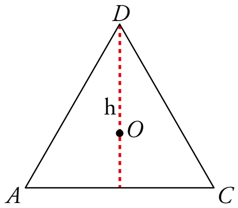
$$V = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 8 \approx 117{,}81 \text{ cm}^3$$

19 **Halla el área y el volumen del siguiente tetraedro regular:**



Para hallar la altura H, recuerda que $\overline{AO} = \frac{2}{3}h$, donde h es la altura de una cara.

Calculamos lo que mide la altura h:



$h^2 = 8^2 - 4^2 = 48 \rightarrow h = 6{,}93$ cm

$A_{BASE} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$

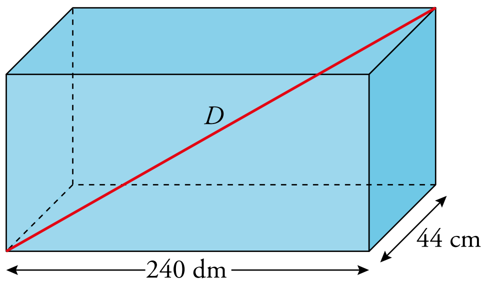
$A_{TOTAL} = 4 \cdot A_{BASE} = 110{,}88 \text{ cm}^2$

Calculamos lo que mide la altura H del tetraedro:

$$H^2 = 8^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 6{,}93\right)^2 = 42{,}66 \rightarrow H = 6{,}53 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{BASE} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27{,}72 \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$$

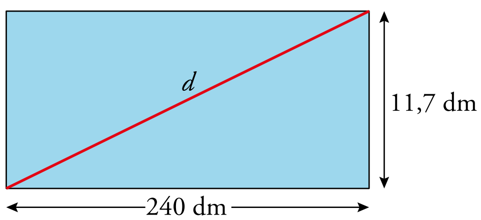
20 **La base de un ortoedro tiene dimensiones 240 cm × 44 cm. Su volumen es 1 235,52 dm³. Calcula las diagonales de sus caras y la diagonal principal.**



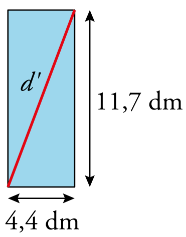
240 cm = 24 dm

44 cm = 4,4 dm

$V = A_{BASE} \cdot h \rightarrow 1\,235{,}52 = 24 \cdot 4{,}4 \cdot h \rightarrow h = 11{,}7$ dm



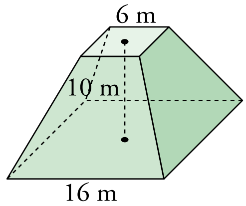
$d^2 = 11{,}7^2 + 24^2 \rightarrow d = 26{,}7$ dm



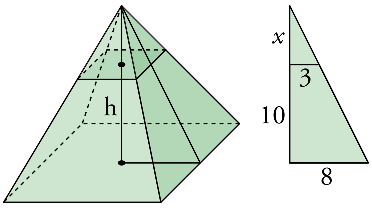
$d'^2 = 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow d' = 12{,}5$ dm

$D = 24^2 + 4{,}4^2 + 11{,}7^2 \rightarrow D = 27{,}06$ dm

21 **Calcula el volumen del siguiente tronco de pirámide de bases cuadradas:**



Calculamos las alturas de las pirámides que forman el tronco:



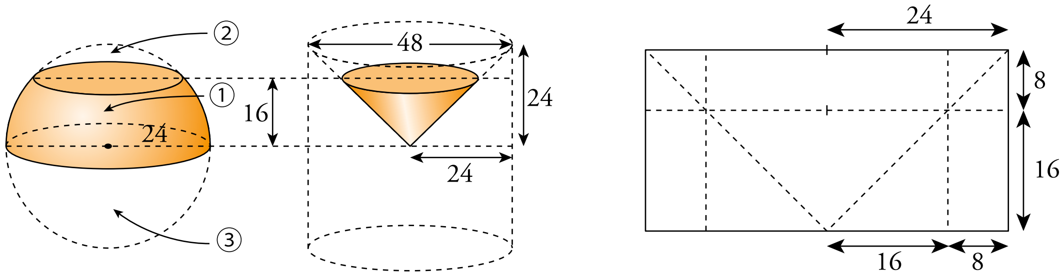
$$\frac{x}{3} = \frac{10 + x}{8}$$

$$8x = 30 + 3x$$

$$x = 6 \;\rightarrow\; \text{h} = 16$$

$$V_{\text{TRONCO}} = V_{\text{PIRÁMIDE MAYOR}} - V_{\text{PIRÁMIDE MENOR}} = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 6 = 1\,293{,}3 \text{ m}^3$$

22 **Cortamos una esfera de 24 cm de radio por dos planos paralelos: uno que pase por el centro y otro a 16 cm de este. Halla las superficies y los volúmenes de las tres porciones obtenidas.**



1) $A = 2\pi \cdot 24 \cdot 16 \approx 2\,412{,}74 \text{ cm}^2$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 24^2 \cdot 16 = 9\,216\pi \text{ cm}^3 \\ V_{\text{TRONCO CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 16^2 \cdot 16 \approx 1\,365{,}33\pi \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = 9\,216\pi - 1\,365{,}33\pi \approx 24\,663{,}61 \text{ cm}^3$$

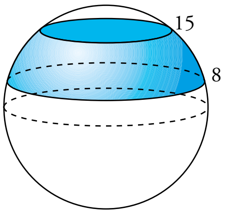
2) $A = 2\pi \cdot 24 \cdot 8 \approx 1\,206{,}37 \text{ cm}^2$

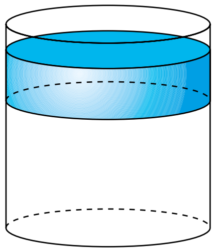
$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 24^2 \cdot 8 = 4\,608\pi \text{ cm}^3 \\ V_{\text{TRONCO CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 24^2 \cdot 24 - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 16^2 \cdot 16 \approx 3\,242{,}67\pi \text{ cm}^3 \end{array}\right\} \rightarrow$$

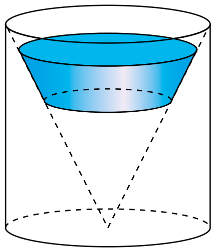
$$\rightarrow \; V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = 4\,608\pi - 3\,242{,}67\pi \approx 4\,289{,}31 \text{ cm}^3$$

3) $A = \dfrac{4\pi \cdot 24^2}{2} \approx 3\,619{,}11 \text{ cm}^2 \;;\; V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 24^3}{2} \approx 28\,952{,}92 \text{ cm}^3$

23 **Se corta una esfera de 50 cm de diámetro por dos planos paralelos a 8 cm y 15 cm del centro, respectivamente. Halla el volumen de la porción de esfera comprendida entre ambos planos.**







$V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} = \pi \cdot 50^2(15 - 8) = 17\,500\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{TRONCO DE CONO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 15 - \frac{1}{3}\pi \cdot 50^2 \cdot 8 = 5\,833{,}33\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{PORCIÓN ESFERA}} = V_{\text{PORCIÓN CILINDRO}} - V_{\text{TRONCO DE CONO}} =$

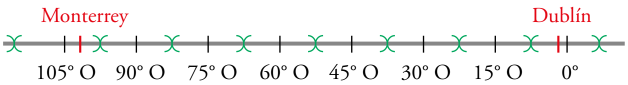
$= 17\,500\pi - 5\,833{,}33\pi = 11\,666{,}67\pi \text{ cm}^3 \approx 36\,651{,}9 \text{ cm}^3$

Coordenadas geográficas

24 **Si en el huso 0 son las 8 a. m., ¿qué hora le corresponde al tercer huso al este? ¿Y al quinto al oeste?**

- En el uso al este son 3 horas más, las 11 a.m.
- En el quinto al oeste son 5 horas menos, las 3 a.m.

25 **Sabemos que en Dublín (longitud 6° O) son las 9 de la mañana. Utilizando este esquema, indica qué hora teórica le corresponde a Monterrey (100° O).**



En Monterrey son 7 horas menos, las 2 de la mañana.

26 **Roma está en el primer huso al E y Nueva York, en el quinto al O. Si un avión sale de Roma a las 11 p. m., el vuelo dura 8 h y se siguieran las horas teóricas de sus correspondientes husos, ¿a qué hora local de Nueva York llegaría?**

En Nueva York hay 6 horas menos que en Roma. Por tanto, cuando el avión sale de Roma son las 11-6 = 5 p.m. en Nueva York. Si el vuelo dura 8 horas, el avión llega a la 1 a.m., hora de Nueva York, del día siguiente.

27 **Si en La Habana (82° O) son las 8 p. m., asigna la hora teórica (según los husos horarios) a cada ciudad.**

Maputo (Mozambique)	**2 p. m.**
Natal (Brasil)	**3 a. m.**
Astaná (Kazajistán)	**8 p. m.**
Temuco (Chile)	**0 a. m.**
Honolulú (Hawái)	**11 a. m.**
Dakar (Senegal)	**11 p. m.**
Katmandú (Nepal)	**6 a. m.**
Melbourne (Australia)	**7 a. m.**

Maputo (32° E) $\to$ 3 a.m.

Natal $\to$ 11 p.m.

Astaná (71° E) $\to$ 6 a.m.

Temuco (73° O) $\to$ 8 p.m.

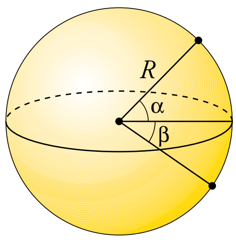
Honolulú (158° O) $\to$ 2 p.m.

Dakar (16° O) $\to$ 0 a.m.

Katmandú (85° E) $\to$ 7 a.m.

Melbourne (144° E) $\to$ 11 a.m.

28 **Dos ciudades tienen la misma longitud, 15° E, y sus latitudes son 37° 25' N y 22° 35' S. ¿Cuál es la distancia entre ellas?**



$\alpha = 37° \, 25'$

$\beta = 22° \, 35'$

Tenemos que hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de $\alpha + \beta = 37° \, 25' + 22° \, 35' = 60°$

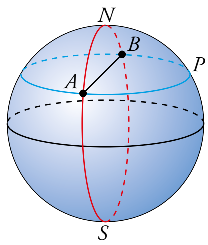
$$\text{Distancia} = \frac{2\pi R \cdot 60°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 6\,370 \cdot 60}{360} \approx 6\,670{,}65 \text{ km}$$

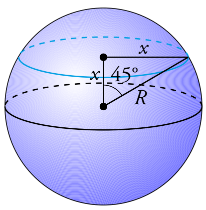
29 **La «milla marina» es la distancia entre dos puntos del ecuador cuya diferencia de longitud es 1'. Calcula la longitud de una milla marina.**

$1' = \frac{1}{60}$ grados; radio de la Tierra: $R \approx 6\,370$ km

$$\text{Milla marina} \to \frac{2\pi R \cdot \frac{1}{60}}{360} = \frac{2\pi R}{21\,600} \approx \frac{2\pi \cdot 6\,370}{21\,600} \approx 1{,}85 \text{ km}$$

30 **Un avión tiene que ir de A a B, dos lugares diametralmente opuestos en el paralelo 45°. Puede hacerlo siguiendo el paralelo (*APB*) o siguiendo la ruta polar (*ANB*). Calcula la distancia que se recorrería en cada trayecto.**





Hallamos el radio del paralelo 45°:

$$R^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \to x^2 = \frac{R^2}{2} \to x = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{6\,370}{\sqrt{2}} \approx 4\,504{,}27 \text{ km}$$

31 **Alejandría, Nueva Orleans y Houston tienen todas la misma latitud, 30° N. Sus longitudes son, respectivamente, 30° E, 90° O y 95° O. ¿Qué distancia recorrería un avión que va de Alejandría a Nueva Orleans por el paralelo 30° N? ¿Y de Alejandría a Houston?**

Utilizando el ejercicio resuelto de la página 229, sabemos que el paralelo 30° tiene una longitud de 34 646 km aproximadamente.

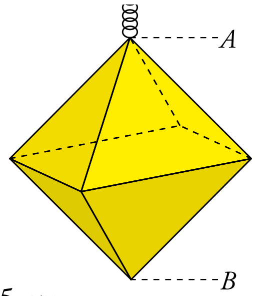
Entre Alejandría y Nueva Orleans hay un arco de 90° – 30° = 60°; por tanto, la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 60° \approx 5\,724{,}33$ km.

Entre Alejandría y Houston hay un arco de 95° – 30° = 65°, por lo que la distancia entre ellos es $\frac{34\,346}{360°} \cdot 65° \approx 6\,201{,}36$ km.

Página 234

Resuelve problemas

32 **Cortando y soldando una varilla de 3 m de longitud, se ha construido la estructura de un farol con forma de octaedro regular. ¿Cuál es la altura *AB* del farol?**

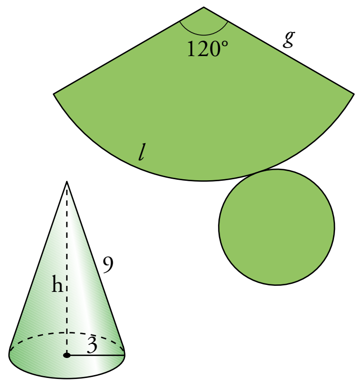


El octaedro tiene 12 aristas iguales. Cada una de ellas mide 300 : 12 = 25 cm.

La altura del octaedro coincide con la diagonal de un cuadrado de 25 cm de lado:

$\overline{AB} = \sqrt{25^2 + 25^2} \approx 35{,}36$ cm

33 **El desarrollo de la superficie lateral de un cono es un sector circular de 120° de amplitud y cuya área es 84,78 cm². Halla el volumen del cuerpo que se forma.**



- Generatriz del cono:

$$\frac{\pi g^2}{84{,}78} = \frac{360}{120} \to g^2 = \frac{3 \cdot 84{,}78}{\pi} \to g \approx 9 \text{ cm}$$

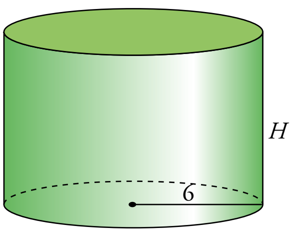
- Radio de la base: $2\pi r = l$

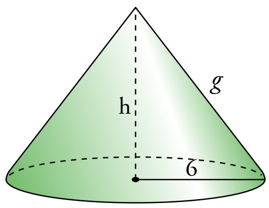
$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 9}{l} = \frac{360}{120} \to 18\pi = 3l \to l = 6\pi \text{ cm}$$

$$2\pi r = 6\pi \to r = 3 \text{ cm}$$

- Área base = $\pi \cdot 3^2 = 9\pi \approx 28{,}27$
- Altura del cono: $h^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \to h \approx 8{,}49$ cm
- Volumen cono = $\frac{1}{3}$(Área base) $\cdot$ h = $\frac{1}{3} 28{,}27 \cdot 8{,}49 \approx 80$ cm³

34 **Un cilindro y un cono tienen la misma superficie total, 96π cm², y el mismo radio, 6 cm. ¿Cuál de los dos tendrá mayor volumen?**





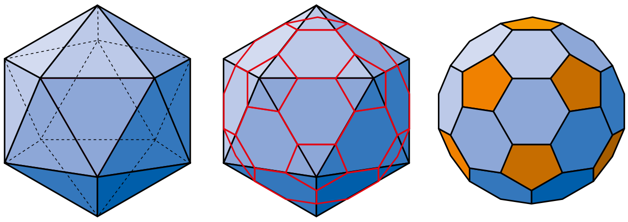
- Área total del cilindro = $2\pi \cdot 6h + 2\pi \cdot 6^2$

$84\pi H = 96\pi \to H = 1{,}14$ cm

- Volumen del cilindro = $\pi \cdot 6^2 \cdot 1{,}14 = 128{,}93$ cm³
- Área total del cono = $\pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6g \to 36\pi + 6\pi g = 96\pi \to 6\pi g = 60\pi \to g = 10$ cm
- Altura del cono: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \to h = 8$ cm
- Volumen del cono = $\frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 \approx 301{,}59$ cm³

Tiene mayor volumen el cono.

35 **Truncando un icosaedro regular de 30 cm de arista se obtiene este poliedro semirregular (troncoicosaedro):**



a) ¿Cuántos vértices y caras tiene el icosaedro?

b) ¿Cuántos pentágonos y cuántos hexágonos forman la superficie del poliedro obtenido tras el truncamiento?

c) Calcula la superficie de este último.

a) El icosaedro tiene 12 vértices y 20 caras.

b) 20 hexágonos y 12 pentágonos.

c) Las aristas del poliedro truncado miden 10 cm.

Apotema de una cara hexagonal = 8,66 cm

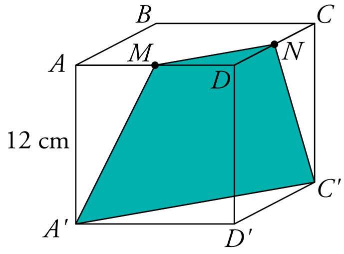
Apotema de una cara pentagonal = 6,88 cm

Superficie de una cara hexagonal = $\dfrac{10 \cdot 6 \cdot 8,66}{2} \approx 259,8 \text{ cm}^2$

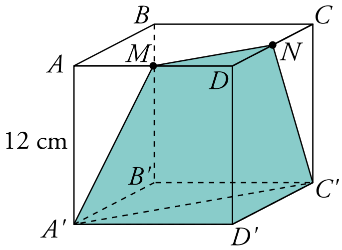
Superficie de una cara pentagonal = $\dfrac{10 \cdot 5 \cdot 6,88}{2} \approx 172 \text{ cm}^2$

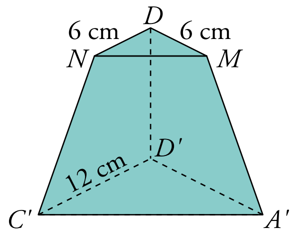
Superficie del poliedro = $20 \cdot 259,8 + 12 \cdot 172 = 7\,260 \text{ cm}^2$

36 Cortamos un cubo por un plano que pasa por los puntos *MNC'A'* (*M* y *N* son los puntos medios de las aristas *AD* y *DC,* respectivamente).



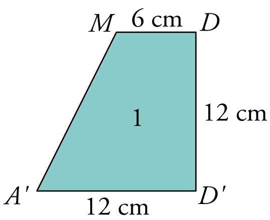
Calcula el área total y el volumen del menor de los poliedros que se forman.





- Triángulo MDN: $A = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$
- Triángulo $A'D'C'$: $A = \dfrac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2$

Caras laterales: trapecios.



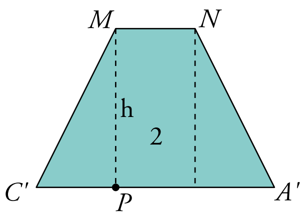
$$A_1 = \frac{(12+6) \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$$

$$\overline{MN}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \rightarrow \overline{MN} = \sqrt{72} \approx 8{,}49 \text{ cm}$$

$$\overline{A'C'}^2 = 12^2 + 12^2 = 288 \rightarrow \overline{A'C'} = \sqrt{288} \approx 16{,}97 \text{ cm}$$

$$\overline{A'P} = \frac{16{,}97 - 8{,}49}{2} = 4{,}24 \text{ cm}$$

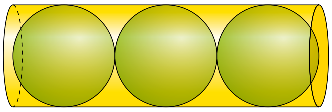
$$\overline{MA'}^2 = 12^2 + 6^2 = 180 \rightarrow \overline{MA'} = 13{,}42 \text{ cm}$$

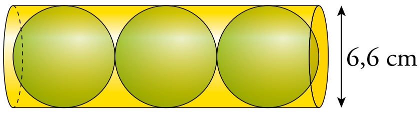


$h^2 = 13{,}42^2 - 4{,}24^2 \rightarrow h \approx 12{,}73$ cm $\qquad \text{Área}_2 = \dfrac{(8{,}49 + 16{,}97) \cdot 12{,}73}{2} \approx 162{,}05 \text{ cm}^2$

Área total del poliedro $= 18 + 72 + 2 \cdot 108 + 162{,}1 = 468{,}1 \text{ cm}^2$

37 **Tres pelotas de tenis se introducen en un tubo cilíndrico de 6,6 cm de diámetro en el que encajan hasta el borde. Halla el volumen de la parte vacía.**





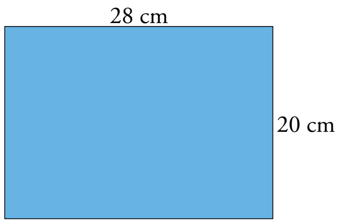
Altura del cilindro = 6,6 · 3 = 19,8 cm

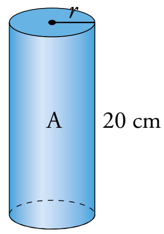
$V_{\text{CILINDRO}} = \pi \cdot 3{,}3^2 \cdot 19{,}8 \approx 677{,}4 \text{ cm}^3$

$V_{\text{ESFERAS}} = 3\left(\dfrac{4}{3}\pi \cdot 3{,}3^3\right) = 451{,}6 \text{ cm}^3$

$V_{\text{PARTE VACÍA}} = 677{,}4 - 451{,}6 = 225{,}8 \text{ cm}^3$

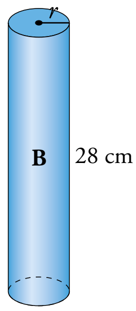
38 **Queremos construir un tubo cilíndrico soldando por los lados un rectángulo de 28 cm de largo y 20 cm de ancho. ¿Cómo se consigue mayor volumen, soldando por los lados de 28 cm o por los de 20 cm?**





A • Radio: $2\pi r = 28 \rightarrow r = \dfrac{14}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{14}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = 1\,247{,}77 \text{ cm}^3$



B • Radio: $2\pi r = 20 \rightarrow r = \dfrac{10}{\pi}$ cm

• Volumen: $\pi r^2 h = \pi\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 28 = 891{,}27 \text{ cm}^3$

Se consigue mayor volumen soldando por los lados de 20 cm.

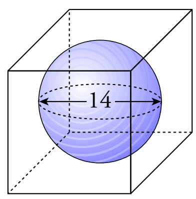
39 **Se introduce una bola de piedra de 14 cm de diámetro en un recipiente cúbico de 14 cm de arista lleno de agua y después se retira. Calcula:**

a) La cantidad de agua que se ha derramado.

b) La altura que alcanza el agua en el recipiente después de sacar la bola.

a) $V_{\text{CUBO}} = 14^3 = 2\,744 \text{ cm}^3$

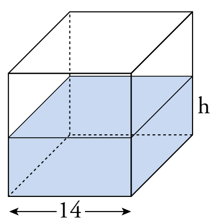
$V_{\text{AGUA DERRAMADA}} = V_{\text{ESFERA}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 7^3 \approx 1\,436{,}76 \text{ cm}^3$



b) $V_{\text{AGUA NO DERRAMABA}} = 2\,744 - 1\,436{,}76 = 1\,307{,}24 \text{ cm}^3$

Altura que alcanza el agua:

$1\,307{,}24 = 14^2 \cdot h \rightarrow h = 6{,}67$ cm

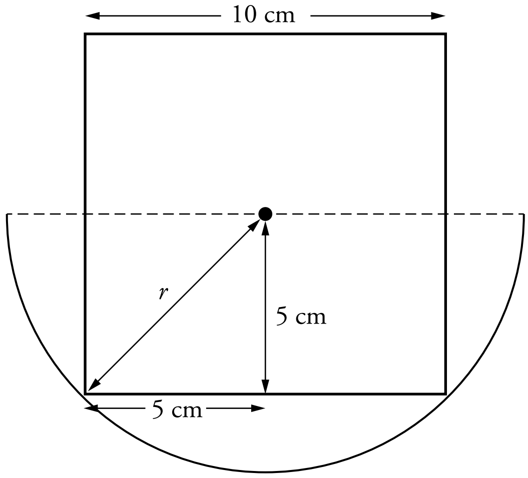


40 **Un cuenco con forma de semiesfera está lleno de agua. Al introducir un recipiente cúbico de 10 cm de arista, se derrama parte del agua y el cubo queda cubierto hasta la mitad. ¿Cuántos litros de agua quedan todavía?**

El radio de la esfera será: $r^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow r = 5\sqrt{2}$ cm

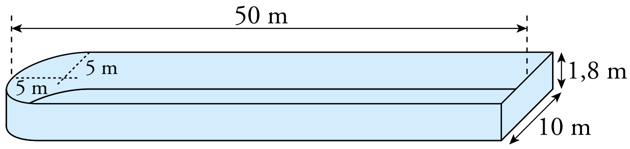
- La cantidad de agua que queda en el cuenco será el volumen de media esfera menos el volumen de medio cubo.

$$V = \frac{1}{2}(V_{\text{ESFERA}} - V_{\text{CUBO}}) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(5\sqrt{2})^3 - 10^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(1480,96 - 1000) = 240,48 \text{ cm}^3$$



Por tanto, todavía quedan 240,48 cm^3 = = 0,24048 l en el cuenco.

41 **Una finca se abastece de agua desde el pilón que ves en la figura, y que ahora está lleno. Para regar, se abre un desagüe que desaloja un caudal de 25 litros por segundo. ¿Se podrá mantener el riego durante diez horas sin reponer sus existencias?**

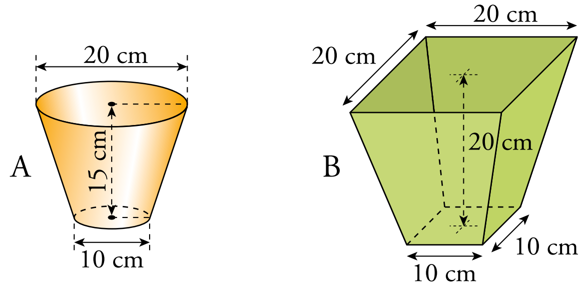


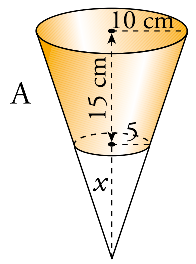
Capacidad del pilón = $10 \cdot 1,8 \cdot 45 + \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 1,8}{2} \approx 880,69$ m^3 = 880 690 litros

Gasto en diez horas = $25 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10$ = 900 000 litros

El gasto en diez horas es superior a la capacidad del pilón. Por tanto, no se puede regar durante diez horas sin reponer las existencias de agua.

42 **En un cine, las palomitas se vendían hasta ahora en recipientes del tipo A, por 1,50 €. El gerente está pensando en ofertar también otro formato, B, más grande. ¿Cuál crees que debería ser el precio del formato B? Redondea a las décimas de euro.**



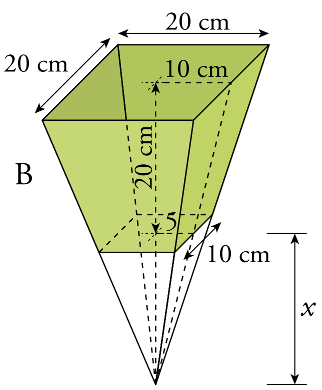


$$\frac{10}{5} = \frac{15+x}{x} \rightarrow 10x = 75 + 5x \rightarrow x = 15 \text{ cm}$$

$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 30 \approx 3\,141{,}6 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 15 \approx 392{,}7 \text{ cm}^3$$

$$V_A = V_{\text{CONO GRANDE}} - V_{\text{CONO PEQUEÑO}} \approx 2\,748{,}9 \text{ cm}^3$$



$$\frac{10}{5} = \frac{20+x}{x} \rightarrow 10x = 100 + 5x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \frac{1}{3}20^2 \cdot 40 \approx 5\,333{,}33 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \frac{1}{3}10^2 \cdot 20 \approx 666{,}67 \text{ cm}^3$$

$$V_B = V_{\text{P. GRANDE}} - V_{\text{P. PEQUEÑA}} \approx 4\,666{,}67 \text{ cm}^3$$

Precio del recipiente B $= \dfrac{4\,666{,}67 \cdot 1{,}5}{2\,748{,}9} \approx 2{,}546$

El recipiente B se venderá a 2,50 euros.

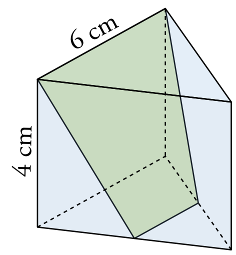
Página 235

Resuelve: un poco más difícil

43 **Cortamos un prisma triangular regular por un plano que pasa por el punto medio de dos aristas y por otra arista opuesta.**

Halla el volumen y la superficie total de cada una de las porciones.

Observa que uno de los dos trozos es un tronco de pirámide.

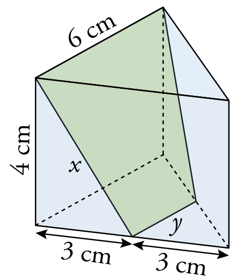


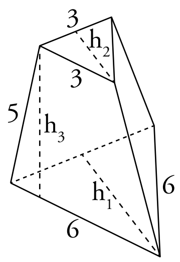
Lo primero que hacemos es hallar las longitudes de los cortes del plano.

$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm

$y = 3$ cm

Comenzamos calculando el área del tronco de pirámide, y para ello necesitamos averiguar algunas longitudes, como las alturas de las bases grande, h_1, y pequeña, h_2, y de las caras laterales, h_3.





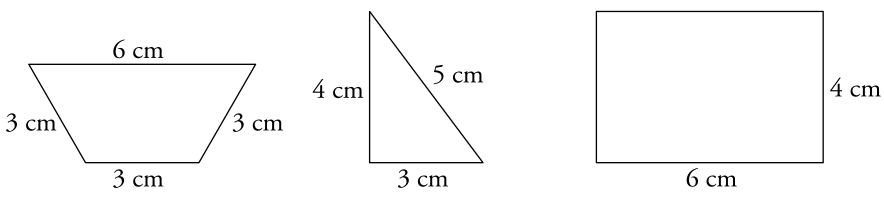
$h_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 5{,}2$ cm

$h_2 = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} \approx 2{,}6$ cm

$h_3 = \sqrt{5^2 - 1{,}5^2} \approx 4{,}8$ cm

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASES}} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} + \dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 19{,}5 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LATERAL}} = 3 \cdot \dfrac{6+3}{2} \cdot 4{,}8 = 64{,}8 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \to A_{\text{TOTAL}} = 19{,}5 + 64{,}8 = 84{,}3 \text{ cm}^2$$

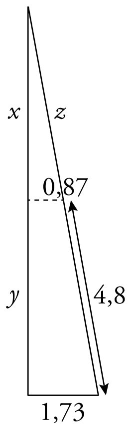
Calculamos ahora el área de la otra parte de la figura, veamos cómo son sus caras:



$A_1 = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} - \dfrac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 11{,}7 \text{ cm}^2$; $A_2 = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$; $A_3 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$

$A_{\text{TOTAL}} = 11{,}7 + 2 \cdot 6 + 24 = 47{,}7 \text{ cm}^2$

Para calcular el volumen del tronco de pirámide restamos al volumen de la pirámide grande la de la pirámide pequeña, y para eso tenemos que calcular sus alturas.



Resolvemos los siguientes triángulos semejantes que se forman entre las apotemas de las bases, las alturas de las caras laterales y las alturas de las pirámides. Recordamos que la longitud de la apotema de un triángulo equilátero es un tercio de la medida de su altura.

$$\frac{z}{0,87} = \frac{z + 4,8}{1,73} \rightarrow 1,73z = 0,87z + 4,18 \rightarrow z \approx 4,86 \text{ cm}$$

$$x = \sqrt{4,86^2 - 0,87^2} = 4,78 \text{ cm}$$

Observando que las medidas del triángulo pequeño son la mitad que las del grande, tenemos que $y = 4,78$ cm también.

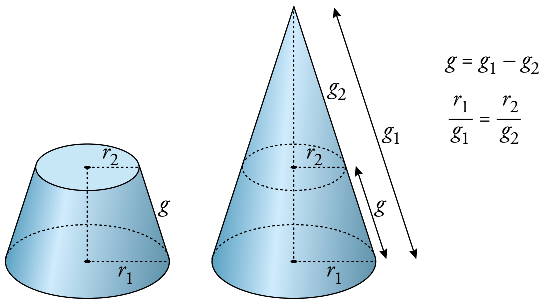
$$V_{\text{TRONCO DE PIRÁMIDE}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5,2}{2} \cdot (2 \cdot 4,78) - \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} \cdot 4,78 = 43,5 \text{ cm}^3$$

Para calcular el volumen del otro trozo restaremos los volúmenes del cuerpo completo y el tronco de pirámide.

$$V_{\text{PRISMA}} = \frac{6 \cdot 5,2}{2} \cdot 4 = 62,4 \text{ cm}^3 \rightarrow V = 62,4 - 43,5 = 18,8 \text{ cm}^3$$

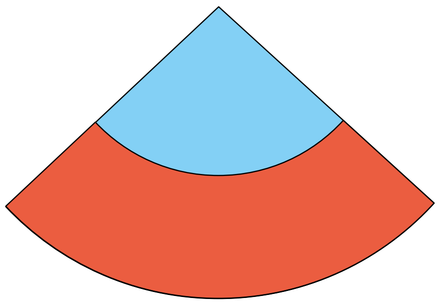
44 Obtención del área lateral de un tronco de cono:

a)



Explica qué son r_1, g_1, r_2, g_2 y g. Justifica las dos igualdades anteriores.

b)



Recordando que el área lateral de un cono es πrg, justifica que el área buscada (en rojo) es $A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2$.

c) Observa la siguiente cadena de igualdades:

$A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2 = \pi\, (r_1 g_1 - r_2 g_2) \overset{*}{=}$

$\overset{*}{=} \pi\, (r_1 g_1 \boxed{- r_1 g_2 + r_2 g_1} - r_2 g_2) =$

$= \pi\, [r_1(g_1 - g_2) + r_2(g_1 - g_2)] = \pi\, [r_1 g + r_2 g] =$

$= \pi\, (r_1 + r_2)\, g$

Repite la cadena de igualdades justificando cada paso. En la igualdad *, observa que $r_1 g_2 = r_2 g_1$. Explica por qué.

a) En la figura observamos que r_1 y g_1 son, respectivamente, el radio de la base y la generatriz del cono grande; r_2 y g_2 son, respectivamente, el radio de la base y la generatriz del cono pequeño; y g es la generatriz del tronco de cono.

También vemos que g_1 es igual a la suma de g y g_2, y de aquí obtenemos la primera igualdad.

Además, en la figura de la derecha aparecen dos triángulos rectángulos en posición de Tales, que justifican la segunda igualdad.

b) El área de la zona roja es el resultado de restar el área lateral del cono grande $(r_1$ y $g_1)$ menos el área lateral del cono pequeño $(r_2$ y $g_2)$. Así, la igualdad queda justificada.

c) $A = \pi r_1 g_1 - \pi r_2 g_2 \overset{(1)}{=} \pi\,(r_1 g_1 - r_2 g_2) \overset{(2)}{=} \pi\,(r_1 g_1 \boxed{- r_1 g_2 + r_2 g_1} - r_2 g_2) \overset{(3)}{=}$

$\overset{(3)}{=} \pi\,[r_1(g_1 - g_2) + r_2(g_1 - g_2)] \overset{(4)}{=} \pi\,[r_1 g + r_2 g] \overset{(5)}{=} \pi\,(r_1 + r_2)\,g$

(1). Sacamos factor común π.

(2). Sumamos y restamos la misma cantidad, por lo que la igualdad no varía.

$$\frac{r_1}{g_1} = \frac{r_2}{g_2} \;\rightarrow\; r_1 g_2 = r_2 g_1$$

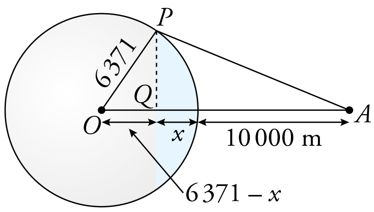
(3). Sacamos factor común r_1 y r_2.

(4). Utilizamos la igualdad $g = g_1 - g_2$ para sustituir los paréntesis por g.

(5). Sacamos factor común g.

45 **Si un avión vuela a 10 000 m de altura, ¿qué porción de superficie terrestre puede verse desde él?**

Consulta el ejercicio resuelto 1 de la página 230.



Observando el gráfico podemos deducir la longitud de PQ y que los triángulos POQ y PQA son semejantes. Por tanto:

$$\overline{PQ} = \sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}$$

$$\frac{\sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}}{6\,371 - x} = \frac{10 + x}{\sqrt{6\,371^2 - (6\,371 - x)^2}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 6\,371^2 - (6\,371 - x)^2 = (6\,371 - x)\cdot(10 + x) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 6\,371^2 - 6\,371^2 + 2\cdot 6\,371x - x^2 = 6\,371\cdot 10 + 6\,371x - 10x - x^2 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 6\,371x + 10x = 63\,710 \;\rightarrow\; x \approx 10 \text{ km}$$

Si el diámetro de la Tierra es 12 742 km, esta distancia será $\dfrac{10}{12\,472} \approx \dfrac{1}{1\,247}$

Reflexiona

46 **¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.**

a) Todos los meridianos tienen la misma longitud.

b) Todos los paralelos miden lo mismo.

c) Dos puntos que están en las antípodas tienen la misma latitud, una norte y otra sur.

d) Dos puntos que están en las antípodas tienen la misma longitud, una este y otra oeste.

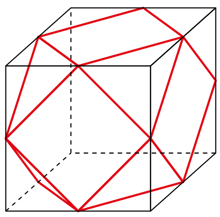
a) Verdadero. Los meridianos son círculos máximos que pasan por los polos.

b) Falso. Solo el ecuador es un círculo máximo. Los demás paralelos son más pequeños según se desplazan hacia el norte o el sur.

c) Verdadero. Necesariamente han de estar a la misma distancia del ecuador, uno al norte y el otro al sur.

d) Falso. Por ejemplo, un punto que esté en el meridiano 1° C no puede estar en las antípodas de ningún punto que esté en el meridiano 1° E.

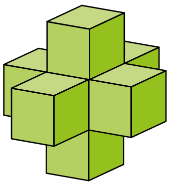
47 **Recuerda todos los planos de simetría y los ejes de giro de un cubo. ¿Qué planos de simetría tiene el cuboctaedro (poliedro que resulta de truncar el cubo)? Estudia, también, sus ejes de giro.**



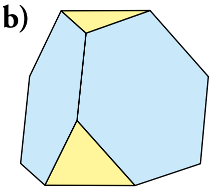
El cuboctaedro tiene los mismos planos de simetría y los mismos ejes de giro que el cubo.

48 **Explica por qué cada uno de los siguientes poliedros no es regular. ¿Son semirregulares? Comprueba si se verifica el teorema de Euler en cada uno:**

a)



b)



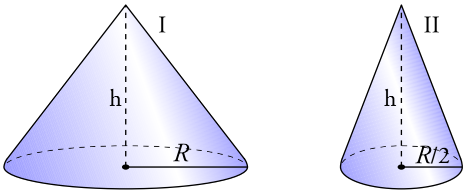
a) El poliedro no es semirregular y, por tanto, tampoco regular, ya que no en todos los vértices concurre el mismo número de caras.

Tiene 30 caras, 32 vértices y 60 aristas, por lo que sí cumple el teorema de Euler, $30 + 32 - 60 = 2$.

b) El poliedro no es regular porque todas sus caras no son iguales, pero sí es semirregular.

Tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas; sí cumple el teorema de Euler, $8 + 12 - 18 = 2$.

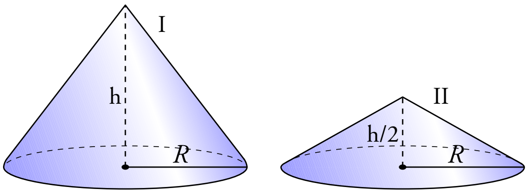
49 **Si en un cono reducimos a la mitad el radio de la base y mantenemos la misma altura, ¿el volumen se reduce a la mitad? ¿Y si mantenemos la misma base y reducimos la altura a la mitad?**



$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2 h}{4}$$

El volumen se reduce a una cuarta parte.



$$V_{\text{CONO I}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

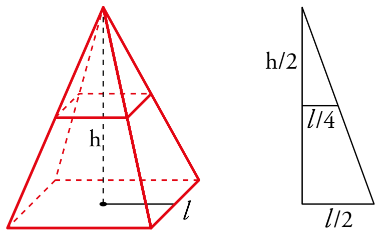
$$V_{\text{CONO II}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi R^2 h}{2}$$

Sí, el volumen se reduce a la mitad.

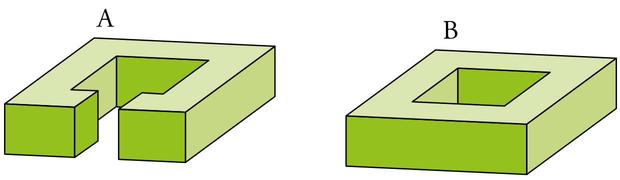
50 **Una pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base y que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuál será la relación entre los volúmenes de la pirámide grande y la pequeña?**

El lado de la nueva base es la mitad de la arista básica de la pirámide.

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{PIRÁMIDE GRANDE}} = \dfrac{1}{3} l^2 h \\[2ex] V' = V_{\text{PIRÁMIDE PEQUEÑA}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{2} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{l^2 \cdot h}{8} \end{array}\right\} \frac{V}{V'} = \frac{1}{8}$$



51 **Observa estos poliedros:**



a) Comprueba que en el poliedro A se cumple la fórmula de Euler.

b) ¿Cuántas caras, vértices y aristas se añaden o se quitan al pasar del A al B?

c) ¿Se cumple la fórmula de Euler en el poliedro B?

a) $c = 14$; $v = 24$; $a = 36 \rightarrow c + v - a = 14 + 24 - 36 = 2$.

Se cumple la fórmula de Euler.

b) Contamos las caras, vértices y aristas del cuerpo B:

$c = 10$; $v = 16$; $a = 24$.

c) El cuerpo B verifica la fórmula de Euler, pues $10 + 16 - 24 = 2$.

Aunque parezca que esto es una contradicción al ser un cuerpo con un agujero, no lo es, pues el cuerpo B no es un poliedro.

Los poliedros están limitados por caras que son polígonos, y el cuerpo B tiene dos caras, la superior y la inferior, que no son polígonos pues tienen agujeros.

Página 237

Entrénate resolviendo otros problemas

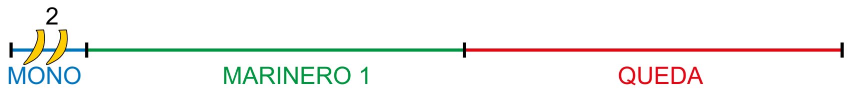
- **Al naufragar su barco, dos marineros y su mono llegan a una isla desierta. Como no tienen nada que comer, recogen plátanos y se van a dormir.**

  Por la noche, un marinero se despierta, da dos plátanos al mono y se come la mitad de los restantes. Después, se despierta el otro marinero, que también da dos plátanos al mono, hace tres partes con los que quedan y se come dos de esas partes.

  Por la mañana, se reparten, entre los tres, los plátanos que quedan.

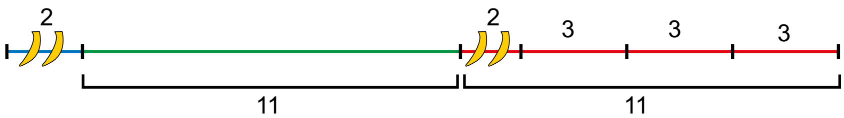
  En ningún momento ha sido necesario partir ningún plátano. ¿Cuál es el número mínimo de plátanos que podrían haber recogido? ¿Cuántos plátanos se ha comido cada uno?

  Se levanta el marinero 1:



  Se levanta el marinero 2:

  El número de plátanos que queda tiene que ser múltiplo de 3, ya que se los reparten entre los dos marineros y el mono. El más pequeño de esos múltiplos es 3. Ahora, vamos rellenando con números los gráficos hacia atrás:



  El número mínimo de plátanos es 11 + 11 + 2 = 24.

  El marinero que se despierta en primer lugar se ha comido 12 plátanos; el otro marinero, 7, y el mono, 5.

- **Tienes estas cinco monedas:**

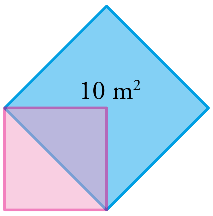
  ¿Cuántas cantidades distintas de dinero podrías formar?

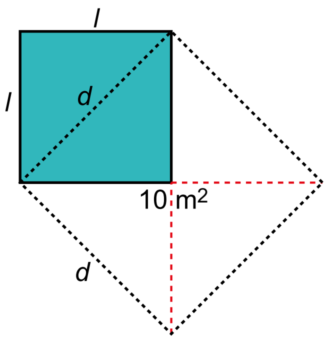
  La menor cantidad de dinero que se puede formar con estas monedas es 10 céntimos, y la mayor, 190 céntimos (10 cts + 10 cts + 20 cts + 50 cts + 1 €).

  Se pueden formar todos los múltiplos de 10 entre esas cantidades:

10 céntimos → moneda de 10 cts	20 céntimos → moneda de 20 cts
30 céntimos → 20 + 10	40 céntimos → 20 + 10 + 10
50 céntimos → moneda de 50 cts	60 céntimos → 50 + 10
70 céntimos → 50 + 20	80 céntimos → 50 + 20 + 10
90 céntimos → 50 + 20 + 10 + 10	100 céntimos → 1 €

- **Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal coincide con el lado de otro cuadrado de 10 m² de superficie.**





- El área del cuadrado de lado d es $A_1 = d^2 = 10$ m².
- El área del cuadrado de lado l es la mitad del área del cuadrado de lado d. Por tanto: $A_2 = l^2 = 10 : 2 = 5$ m².

El área del cuadrado de lado l es de 5 m².

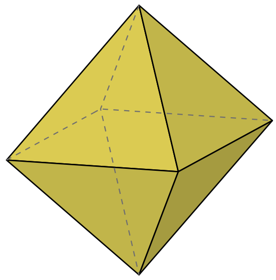
AUTOEVALUACIÓN

1 **Describe el poliedro que se obtiene truncando un octaedro regular mediante planos que cortan las aristas a un tercio de su longitud. ¿Se trata de un poliedro semirregular? Explica por qué.**

Se obtiene un cuerpo geométrico formado por 6 cuadrados, uno por cada vértice del octaedro y 8 hexágonos regulares, uno por cada cara del octaedro. En cada uno de sus vértices concurren un cuadrado y dos hexágonos.

El octaedro así truncado es un poliedro semirregular porque está compuesto por caras que son polígonos regulares de dos tipos, cuadrados y hexágonos, y en cada vértice concurren los mismos tipos de polígonos.

2 **Describe los planos de simetría del octaedro regular. Di también cuáles son los ejes de giro y de qué orden es cada uno.**



Planos de simetría. Tiene, en total, 9.

- De las 12 aristas del octaedro, cada cuatro están contenidas en un mismo plano.

  Cada uno de estos planos es un plano de simetría. De estos, hay 3.
- Cada par de aristas paralelas forman un plano. El plano perpendicular a cada uno de estos es un plano de simetría. De estos, hay 6.

Ejes de giro. Tiene, en total, 13.

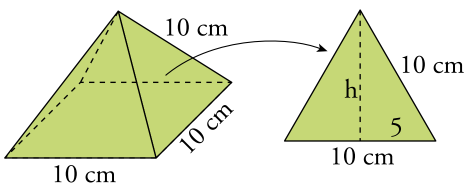
- Tres ejes de giro de orden cuatro, las rectas que unen vértices opuestos.
- Seis ejes de giro de orden dos, las rectas que unen los centros de aristas opuestas.
- Cuatro ejes de giro de orden tres, las rectas que unen los baricentros de caras opuestas.

3 **Calcula la superficie total de:**

a) Una pirámide de base cuadrada en la que la arista lateral y la arista de la base son iguales y miden 10 cm.

b) Un tronco de cono cuyas bases tienen radios de 9 m y 6 m, y la generatriz mide 5 m.

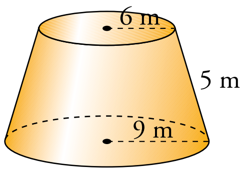
a)



$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} \approx 8{,}66 \text{ cm}$$

$$S_{\text{PIRÁMIDE}} = 10^2 + 4\left(\frac{10 \cdot 8{,}66}{2}\right) \approx 273{,}21 \text{ cm}^2$$

b)



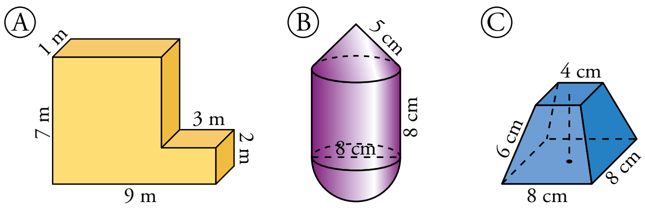
$$S_{\text{TRONCO DE CONO}} = \pi(6 + 9) \cdot 5 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 9^2 = 192\pi \approx 603{,}19 \text{ m}^2$$

4 **En una esfera de 8 cm de radio se dan dos cortes paralelos a distintos lados del centro, alejados de él 2 cm y 3 cm, respectivamente. Calcula la superficie de la zona esférica comprendida entre ambos cortes.**

La altura de la zona esférica es h = 5 cm.

$S_{\text{ZONA ESFÉRICA}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 80\pi \approx 251{,}33 \text{ cm}^2$

5 **Calcula el volumen de estos cuerpos:**

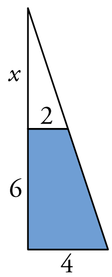


Ⓐ $V = 7 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \text{ m}^3$

Ⓑ Altura del cono: $h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ cm

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 + \pi \cdot 4^2 \cdot 8 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 \approx 50{,}27 + 402{,}12 + 134{,}04 = 586{,}43 \text{ cm}^3$$

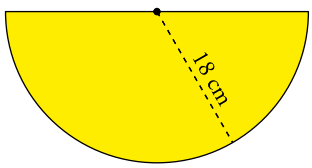
Ⓒ



$$\frac{4}{6+x} = \frac{2}{x} \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}8^2 \cdot 12 - \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 6 = 224 \text{ cm}^3$$

6 **Con este sector circular se construye un cono. Halla el radio de su base, su altura y su volumen.**



La longitud de la semicircunferencia es $L = \frac{2\pi \cdot 18}{2} \approx 56{,}55$ cm, y coincide con la de la circunferencia de la base del cono. Por tanto:

Su radio es $56{,}55 = 2\pi r \rightarrow r = 9$ cm.

La altura es $h = \sqrt{18^2 - 9^2} \approx 15{,}69$ cm.

El volumen es $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 15{,}69 \approx 1\,330{,}87 \text{ cm}^3$

7 **Dos ciudades están en el ecuador y sus longitudes se diferencian en 10°. ¿Cuál es la distancia entre ellas? (Radio de la Tierra: 6 371 km)**

$$\frac{360}{40\,000} = \frac{10}{x} \rightarrow x \approx 1\,111$$

La distancia entre las ciudades es, aproximadamente, de 1 111 km.

8 **Las coordenadas geográficas de San Petersburgo son 60° N 30° E, y de Oslo, 60° N y 11° E. Halla la longitud del arco del paralelo que va de la una a la otra.**

Utilizando lo visto en el ejercicio resuelto de la página 229, el paralelo 60° mide, aproximadamente, 20 015 km.

Entre ambas ciudades hay un arco de 30° – 11° = 19°. Por tanto, la distancia entre ellos es $\frac{20\,015}{360°} \cdot 19° \approx 1\,056{,}35$ km.

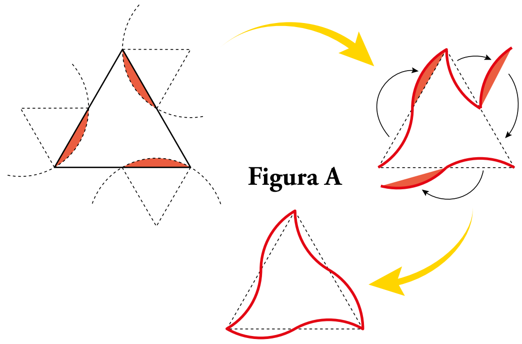
12 TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Página 231

Resuelve

1 **En el triángulo de la figura A de la página anterior, ¿qué ángulo gira cada una de las piezas recortadas para dar lugar a la pieza con forma de «pajarita»?**

Cada una de las piezas recortadas gira 180°.

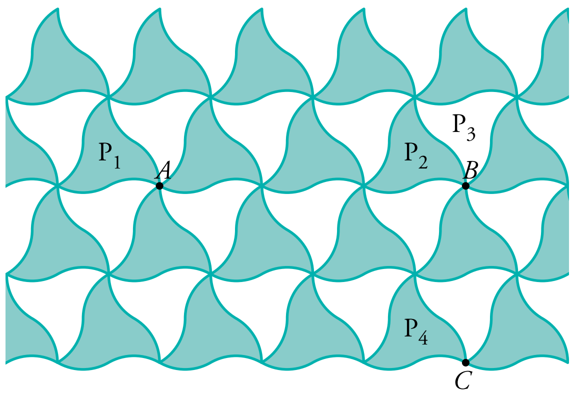


2 **Describe los movimientos que se mencionan arriba, para la transparencia que calca la figura B.**

Para que P_1 se superponga sobre P_2 hay que mover el papel a la derecha la distancia *AB*.

Para que P_2 se superponga sobre P_3 hay que girar 60°, en el sentido de las agujas del reloj, alrededor de *B*.

Para que P_3 se superponga sobre P_4 hay que mover el papel hacia abajo la distancia *BC* y girar 60°, en sentido contrario al de las agujas del reloj, alrededor de *C*.



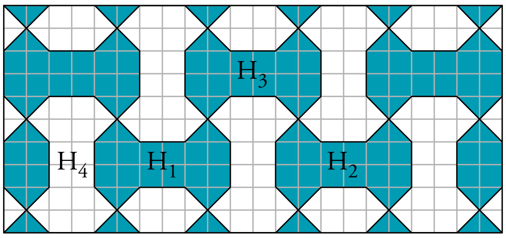
3 **Supón que la figura B se expande indefinidamente en todas direcciones. ¿En qué punto clavarías un alfiler para que, al girar la transparencia, desaparezca el color blanco?**

Pondríamos el alfiler en cualquiera de los vértices de cualquier pajarita.

3 TRASLACIONES

Página 242

1 **El mosaico de abajo se llama «multihueso». H_1, H_2, H_3 y H_4 son «huesos». Se pueden estudiar las transformaciones por las que se pasa de unos a otros.**

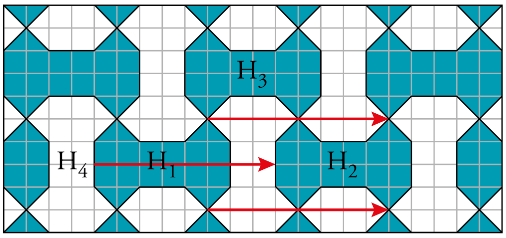


a) ¿Cuáles de estas transformaciones son traslaciones?

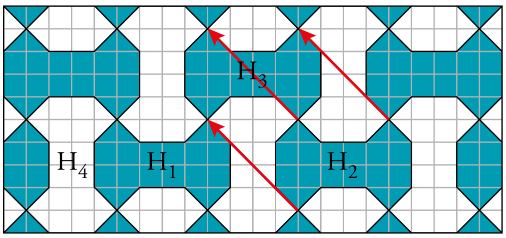
b) ¿Cuál es el vector que caracteriza la traslación que transforma H_1 en H_2? ¿Y el que transforma H_2 en H_3? ¿Y el que transforma H_3 en H_1?

a) Son traslaciones H_1, H_2 y H_3.

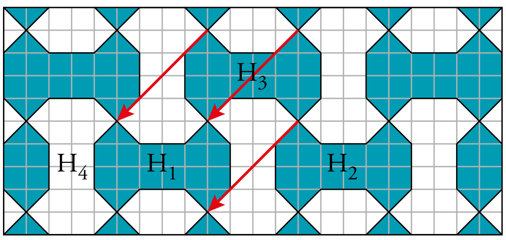
b) El vector que transforma H_1 en H_2 es (8, 0).



El vector que transforma H_2 en H_3 es (–4, 4).

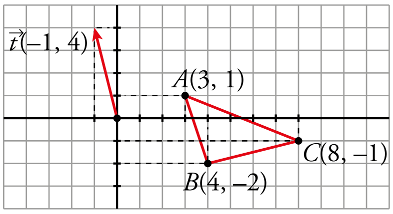


El vector que transforma H_3 en H_1 es (–4, –4).



Página 243

2 a) Traslada el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(4, -2)$ y $C(8, -1)$ según el vector $\vec{t}(-1, 4)$.

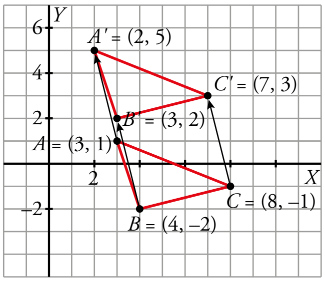


Comprueba que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales.

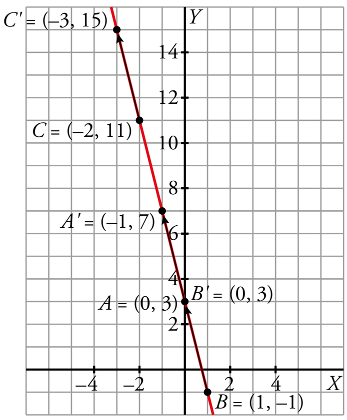
b) Comprueba que la recta $r: y = 3 - 4x$ se transforma en sí misma (es doble).

Para ello, toma varios puntos de r [por ejemplo, (0, 3), (1, –1), (–2, 11)] y comprueba que sus transformados están también en r.

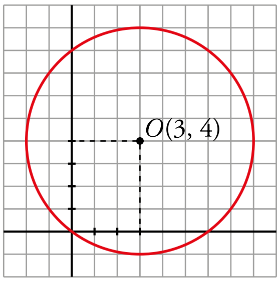
a) Los dos triángulos son iguales.



b)



3 **Dibuja unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado. Traza con compás la circunferencia C de centro $O(3, 4)$ y radio 5.**

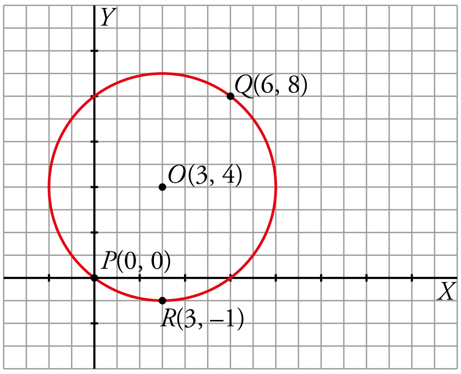


a) Comprueba que C pasa por $P(0, 0)$, $Q(6, 8)$ y $R(3, -1)$.

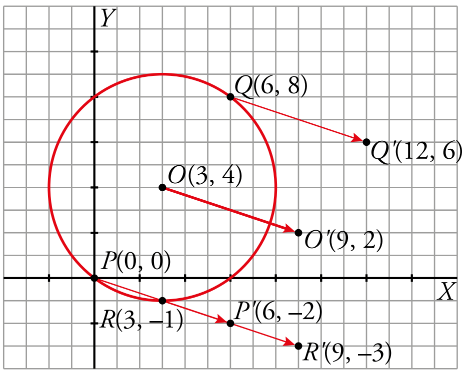
b) Traslada los puntos O, P, Q y R mediante la traslación T de vector $\vec{t}(6, -2)$.

c) Comprueba que la circunferencia cuyo centro es $O' = \text{T}(O)$ y radio 5 pasa por P', Q' y R'.

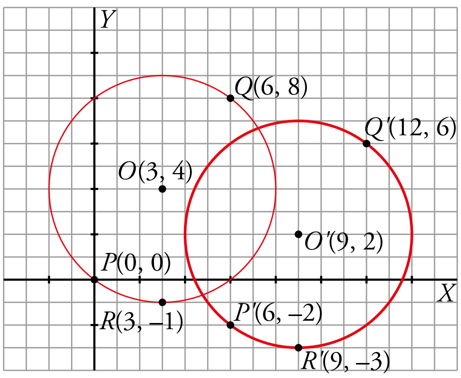
a) La circunferencia pasa por P, Q y R.



b) Los puntos trasladados son P', Q' y R'.



c) Al trasladar O, encontramos el centro $O'(9, 2)$. La circunferencia pasa por los trasladados de P, Q y R.



4 GIROS. FIGURAS CON CENTRO DE GIRO

Página 245

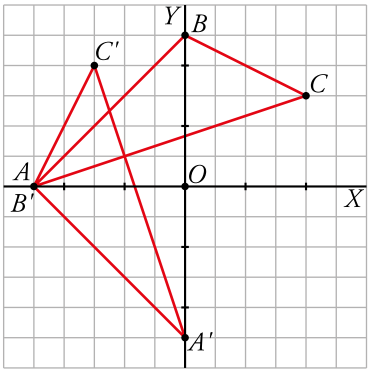
1 **Dibuja unos ejes coordenados en una hoja de papel cuadriculado. Considera el giro G de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = 90°$.**

a) Transforma mediante G los puntos $A(-5, 0)$, $B(0, 5)$, $C(4, 3)$ y señala el triángulo $A'B'C'$ transformado del triángulo ABC.

b) ¿En qué se transforma la recta que pasa por A y B?

c) ¿En qué se transforma la circunferencia de centro O y radio 7?

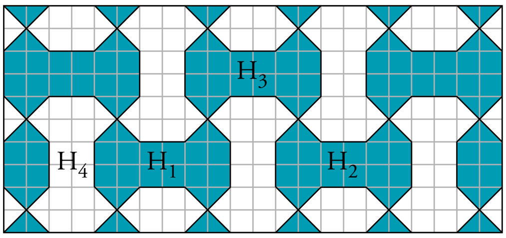
a)



b) Se transforma en otra recta perpendicular a la primera.

c) La circunferencia se transforma en ella misma.

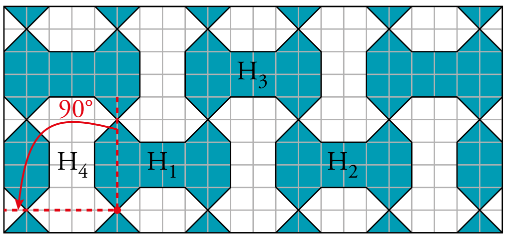
2 **Recuerda el mosaico «multihueso» que ya hemos visto en un ejercicio anterior.**



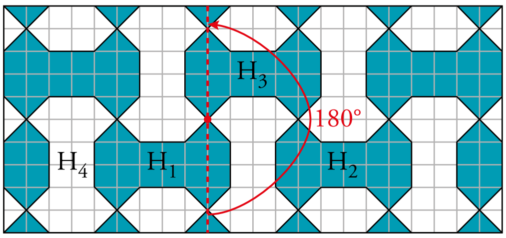
a) Describe un giro que transforme H_1 en H_4.

b) Describe un giro que transforme H_1 en H_3.

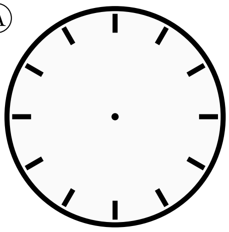
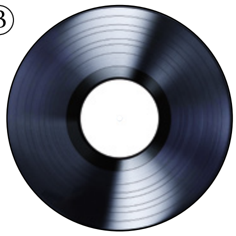
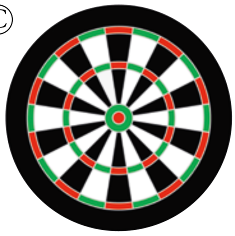
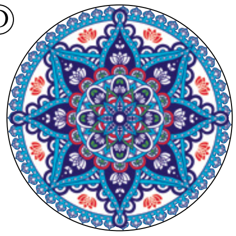
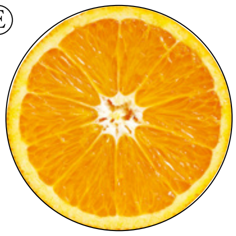
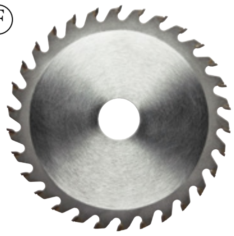
a) Es un giro de 90° con centro el punto marcado:



b) Es un giro de 180° y de centro el punto marcado:



3 **Las siguientes figuras, ¿tienen todas centro de giro? Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.**

Ⓐ

Ⓑ

Ⓒ

Ⓓ

Ⓔ

Ⓕ


Todas las figuras tienen centro de giro O porque al girarlas alrededor de O coinciden consigo mismas n/veces, contando con la posición inicial.

A Tiene orden $n = 12 \rightarrow 360°: 12 = 30°$.

B Tiene orden infinito Cualquier giro la hace coincidir consigo misma.

C Tiene orden $n = 10 \rightarrow 360°: 10 = 36°$.

D Tiene orden $n = 8 \rightarrow 360°: 8 = 45°$.

E Tiene orden $n = 10 \rightarrow 360°: 10 = 36°$.

F Tiene orden $n = 30 \rightarrow 360°: 30 = 12°$.

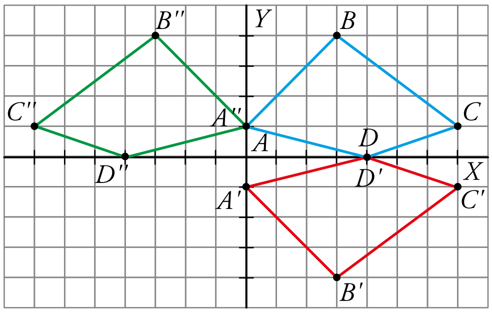
5 ▶ SIMETRÍAS AXIALES. FIGURAS CON EJES DE SIMETRÍA

Página 246

1 **¿Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y traza sobre ellos el cuadrilátero F cuyos vértices son, respectivamente, $A(0, 1)$, $B(3, 4)$, $C(7, 1)$ y $D(4, 0)$.**

a) Dibuja el cuadrilátero transformado de F mediante la simetría de eje X. ¿Qué coordenadas tienen sus vértices?

b) Dibuja el transformado de F mediante la simetría de eje Y. ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?



a) $A'(0, -1)$; $B'(3, -4)$; $C'(7, -1)$; $D'(4, 0)$.

b) $A''(0, 1)$; $B''(-3, 4)$; $C''(-7, 1)$; $D''(-4, 0)$.

2 **Consideramos la simetría S de eje la recta $y = x$. Dibuja los transformados mediante S de:**

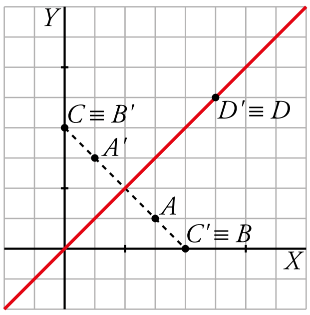
a) Los puntos $A(3, 1)$, $B(4, 0)$, $C(0, 4)$, $D(5, 5)$.

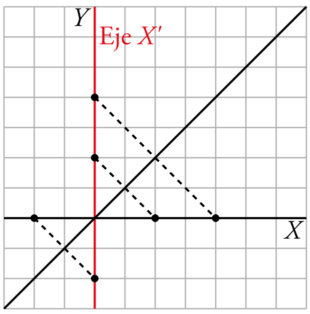
b) El eje X.

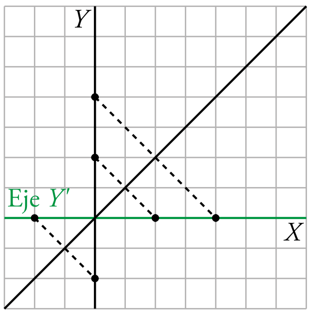
c) El eje Y.

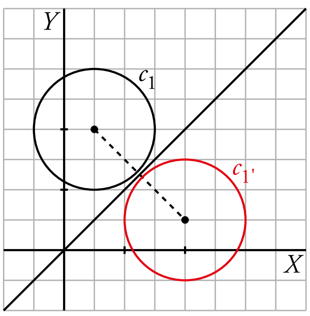
d) La circunferencia C_1 de centro (1, 4) y radio 2.

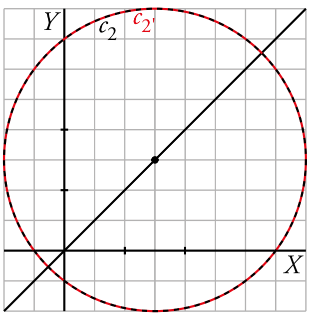
e) La circunferencia C_2 de centro (3, 3) y radio 5.

a)


b)


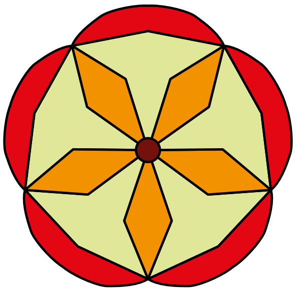
c)


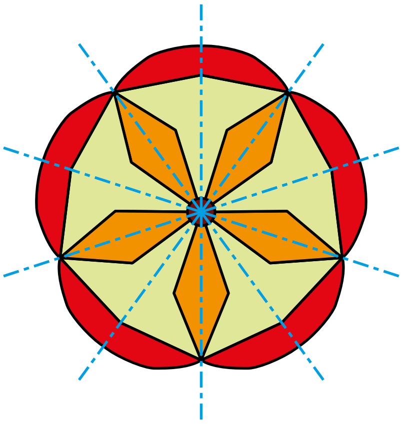
d)


e)


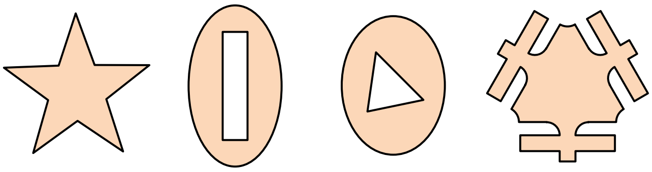
Página 247

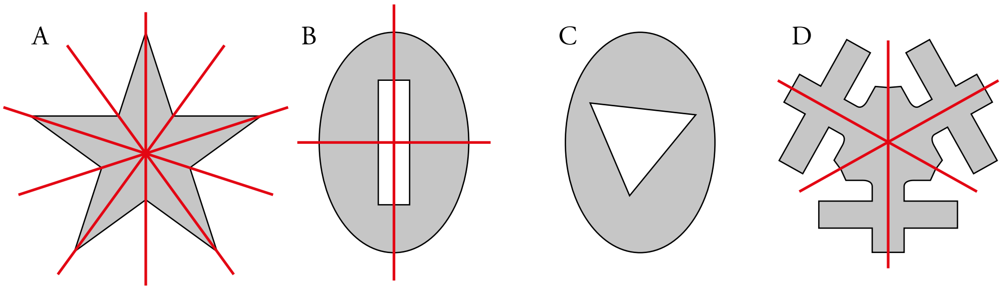
3 **Copia esta figura en tu cuaderno y señala en ella los ejes de simetría:**





4 **Encuentra los ejes de simetría de las siguientes figuras:**





No tiene

5 **Dibuja en tu cuaderno una figura con *n* ejes de simetría que no sea un polígono regular, donde:**

a) $n = 3$ **b)** $n = 4$

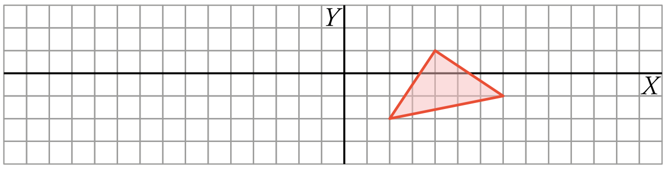
c) $n = 1$ **d)** $n = 0$

Respuesta abierta.

6 ▶ COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

Página 248

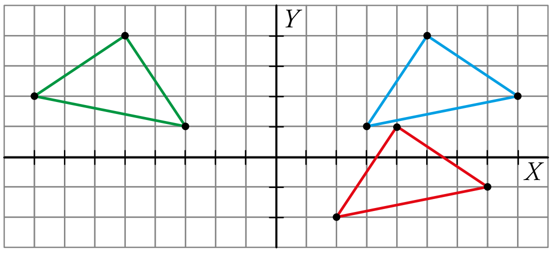
1 **Copia en tu cuaderno este dibujo:**



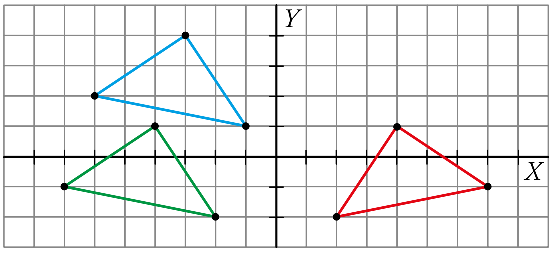
a) Traslada la figura mediante el vector $\vec{u}(1, 3)$ y aplica al resultado una simetría de eje *Y*.

b) Realiza la composición contraria al apartado anterior: primero la simetría y después la traslación. ¿Obtienes el mismo resultado?

a)

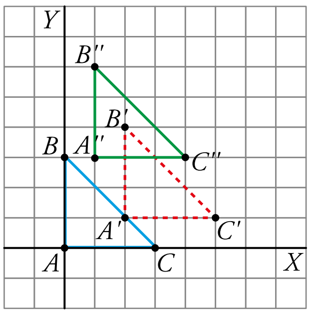


b)



No se obtiene el mismo resultado que en a).

2 **Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo Δ de vértices $A(0, 0)$, $B(0, 3)$ y $C(3, 0)$. Realiza sobre él una traslación T_1 de vector $\vec{u}(2, 1)$ y luego otra T_2 de vector $\vec{v}(-1, 2)$. ¿Podrías haber realizado solo una traslación? ¿Cuál sería su vector?**



Se podía haber realizado una sola traslación de vector $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (2, 1) + (-1, 2) = (1, 3)$

Página 249

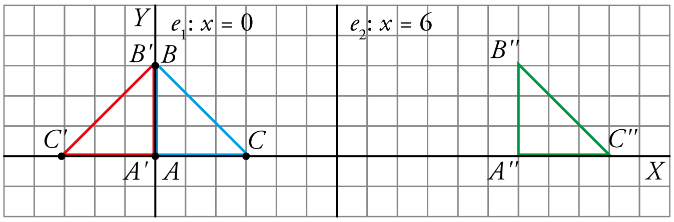
3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes $x = 0$ (el eje Y) y $x = 6$, respectivamente.**

a) Transforma el triángulo Δ del ejercicio 2 de la página anterior mediante S_1 compuesta con S_2.

b) Transforma Δ mediante S_1 compuesta con la simetría de eje X.

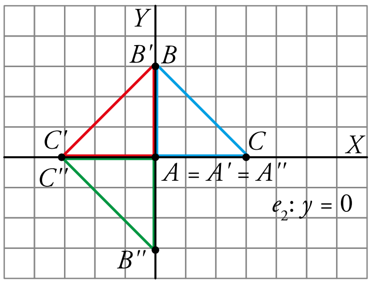
a) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(–3, 0)$.

$A''(12, 0)$; $B''(12, 3)$; $C''(15, 0)$.



b) $A'(0, 0)$; $B'(0, 3)$; $C'(–3, 0)$.

$A''(0, 0)$; $B''(0, –3)$; $C''(–3, 0)$.



4 **Dibuja en unos ejes coordenados un cuadrilátero de vértices $A(1, 3)$, $B(6, 5)$, $C(7, –1)$ y $D(–1, –2)$.**

a) Halla las coordenadas del cuadrilátero transformado mediante la composición de dos simetrías de ejes X e Y.

b) La composición de las dos simetrías corresponde a un giro cuyo centro es el origen de coordenadas. ¿Cuál es el ángulo de giro?

a) $A(1, 3) \rightarrow A'(–1, 3) \rightarrow A''(–1, –3)$

$B(6, 5) \rightarrow B'(–6, 5) \rightarrow B''(–6, –5)$

$C(7, –1) \rightarrow C'(–7, –1) \rightarrow C''(–7, 1)$

$D(–1, –2) \rightarrow D'(1, –2) \rightarrow D''(1, 2)$

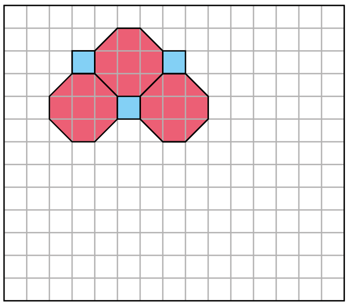
b) El ángulo de giro es 180°.

7 MOSAICOS, CENEFAS Y ROSETONES

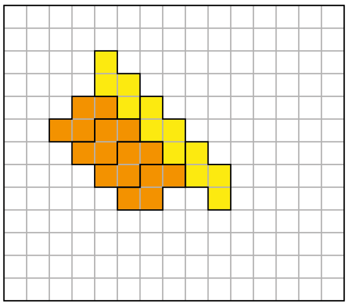
Página 250

1 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes mosaicos:**

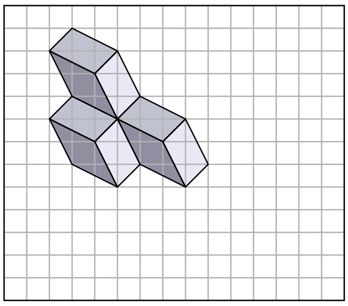
a)



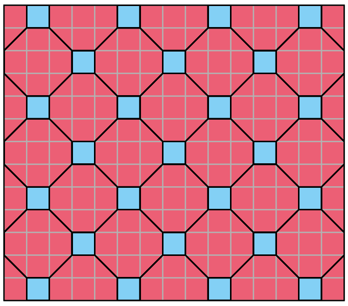
b)



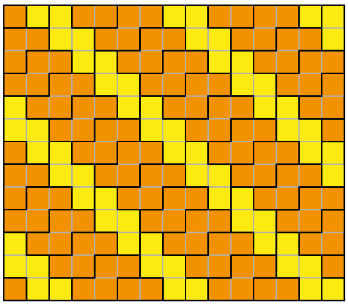
c)



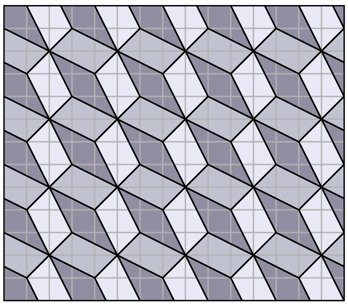
a)



b)

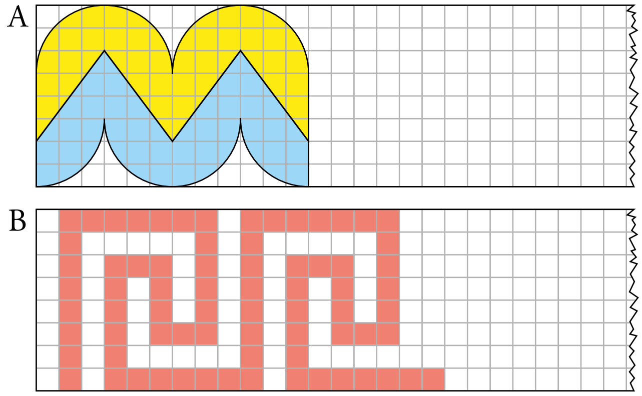


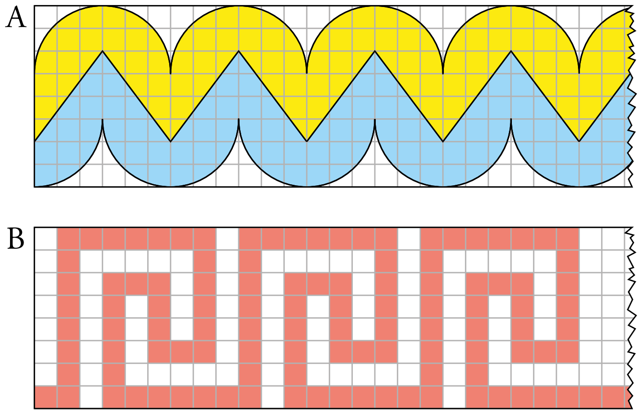
c)



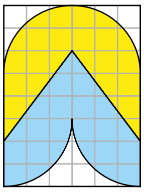
Página 251

2 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?**

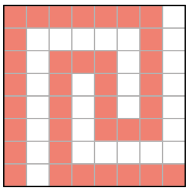




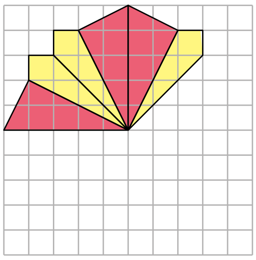
A Motivo mínimo:

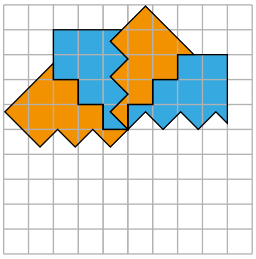


B Motivo mínimo:



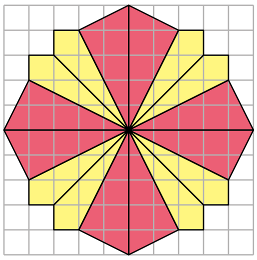
3 **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes rosetones. Después, contesta a las preguntas:**

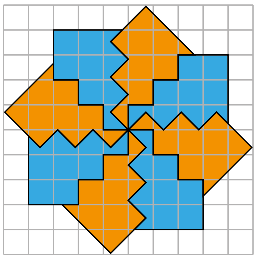
A


B


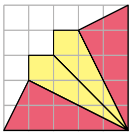
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

b) ¿Cuál es el menor trozo que se repite en cada uno?

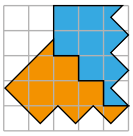
A


B


A. Este rosetón es de orden 4. El motivo mínimo es el siguiente:



B. Este rosetón es de orden 8. El motivo mínimo es el siguiente:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 252

2. Frisos

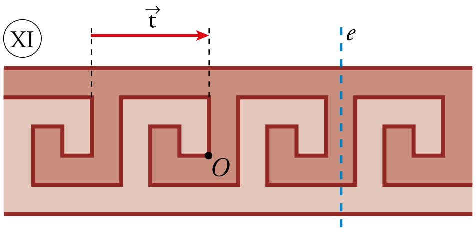
Hazlo tú

- **Encuentra movimientos que dejen invariante la cenefa XI de la página anterior.**

  a) Con color. **b) Sin color.**

  a) Dejan invariante la cenefa, respetando los colores, la traslación de vector $\vec{t}$ y la simetría de eje e.

  b) Si no tenemos en cuenta el color, también deja invariante la cenefa el giro de centro O y ángulo 180°.



3. Rosetones

Hazlo tú

- **¿Qué movimientos dejan invariante el rosetón XIII de la página anterior?**

  Llamamos O al centro del rosetón.

  El giro asociado al rosetón es de centro O y $\alpha = 360°: 16 = 22{,}5°$.

  Otros giros de centro O y ángulos 2α, 3α, … 15α también dejan invariante la figura. Es decir, O es un centro de orden 16.

  Además, tiene 16 ejes de simetría que pasan por O.

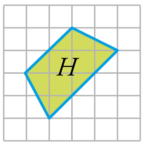
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 253

Practica

Trasluciones. Vectores

1 **a) Representa en papel cuadriculado la figura *H* y trasládala mediante el vector $\vec{t}_1(6, 1)$. Llamamos H_1 a la figura resultante.**

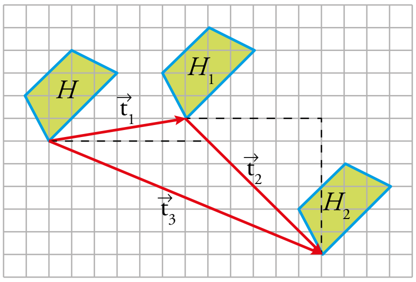


b) Dibuja la figura H_2 transformada de H_1 mediante la traslación $\vec{t}_2(3, -4)$.

c) Indica el vector de traslación que permite obtener H_2 a partir de H.

d) ¿Qué traslación habría que aplicar a H_2 para obtener H?

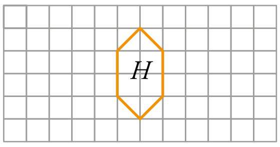
a) y b)



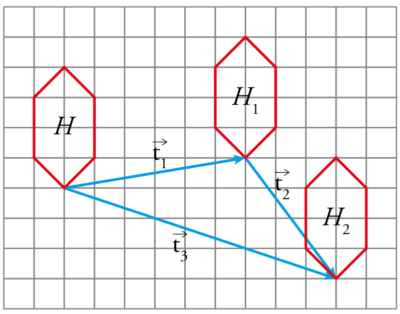
c) El vector es $\vec{t}_3 = (6, 1) + (3, -4) = (9, -3)$, respresentado en la imagen.

d) Es el vector $-\vec{t}_3 = (-9, 3)$.

2 **Responde a los apartados de la actividad anterior con esta otra figura:**



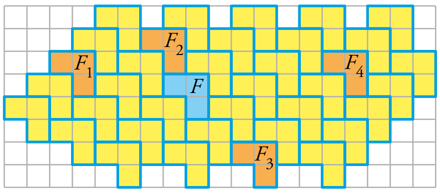
a) y b)



c) El vector es $\vec{t}_3 = (9, -3)$.

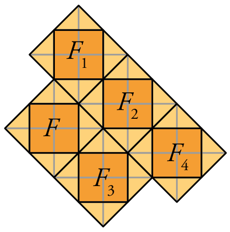
d) El vector $-\vec{t}_3 = (-9, 3)$.

3 **Halla los vectores $\vec{t_1}$, $\vec{t_2}$, $\vec{t_3}$ y $\vec{t_4}$ que nos permiten transformar *F* en cada una de las otras figuras.**



$\vec{t_1} = (-5, 1)$; $\vec{t_2} = (-1, 2)$; $\vec{t_3} = (3, -3)$; $\vec{t_4} = (7, 1)$

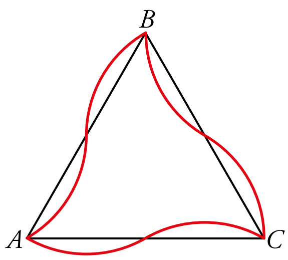
4 **Repite la actividad anterior con estas otras piezas:**

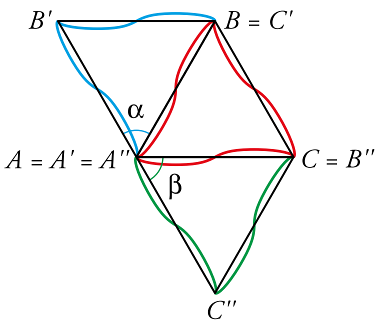


$\vec{t_1} = (1, 3)$; $\vec{t_2} = (3, 1)$; $\vec{t_3} = (2, -2)$; $\vec{t_4} = (5, -1)$

Giros

5 **Dibuja las transformadas de esta figura mediante un giro de centro *A* y ángulo $\alpha = 60°$, y otro del mismo centro y ángulo $\beta = -60°$.**





6 **Se ha realizado un giro de centro O que transforma A en D.**

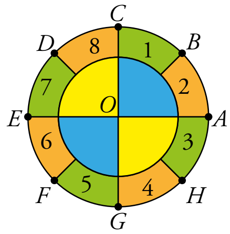
a) Indica en qué puntos se transforman los puntos E, G y H.

b) ¿En qué se convierten los trapecios circulares 1, 3, 6 y 7?

c) ¿Ha cambiado la disposición de colores de la figura original?

d) Define el giro realizado (centro y ángulo) en el caso de que sea positivo y en el que sea negativo.

e) Si nos fijamos en los colores, ¿cuál es el menor ángulo de giro que hace que la figura se quede igual?



a) El punto E se transforma en el H; el punto G, en el B; y el H, en el C.

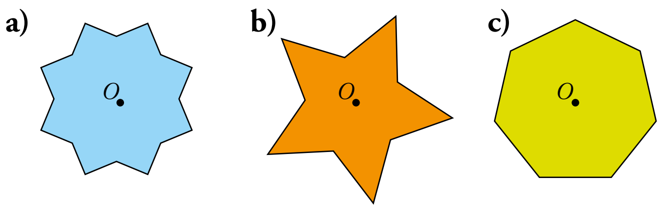
b) El trapecio circular 1 se convierte en el 6; el 3, en el 8; el 6, en el 3; y el 7 en el 4.

c) El color sí cambia.

d) Los giros realizados tienen centro O y ángulos 135° y –225°.

e) El menor ángulo de giro para que los colores de la figura no cambien es 90°.

7 **Indica el menor ángulo que se debe girar alrededor de O cada una de estas figuras para mantenerse idénticas y halla el orden del centro de giro de O.**



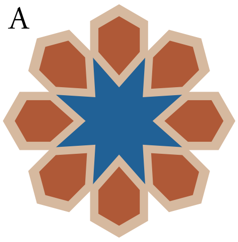
a) El menor ángulo es 45°. El centro es de orden 8.

b) El menor ángulo es 72°. El centro es de orden 5.

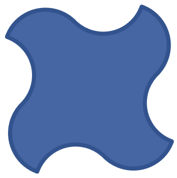
c) El menor ángulo es de, aproximadamente, 51,43°. El centro es de orden 7.

8 **a) Indica dónde tiene el centro de giro cada una de las siguientes figuras:**

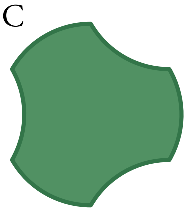
A



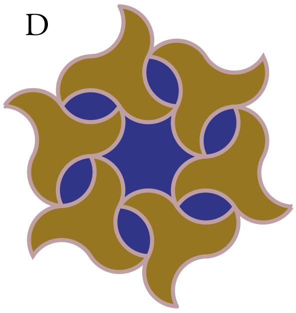
B



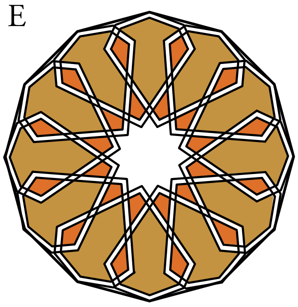
C



D



E



b) Halla el orden de cada uno de estos centros y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.

c) ¿Cuáles tienen, además, centro de simetría?

a) El centro de cada figura es su centro de giro.

b) Todas tienen centro de giro de orden n porque el punto central de cada una permite girar la figura y que coincida con ella misma n veces.

Los órdenes de giro de cada una y sus ángulos mínimos de coincidencia son:

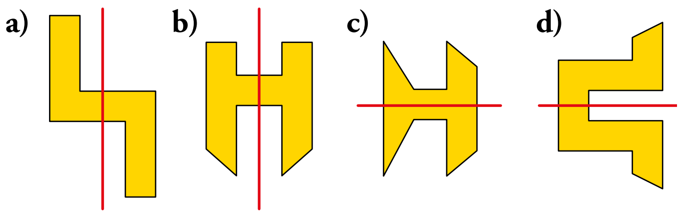
FIGURA	A	B	C	D	E
ORDEN DE GIRO	8	4	3	6	12
ÁNGULO MÍNIMO	45°	90°	120°	60°	30°

c) Todas las figuras tienen centro de simetría excepto la C.

Página 254

Simetrías

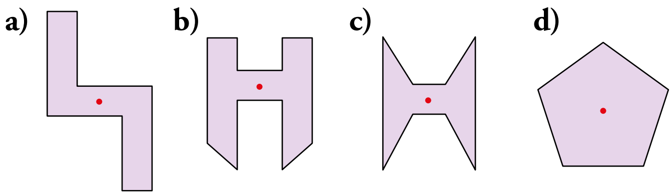
9 **Indica en cada caso si se trata o no de un eje de simetría:**



Son ejes de simetría los de las figuras b), c) y d).

En a) no hay eje de simetría.

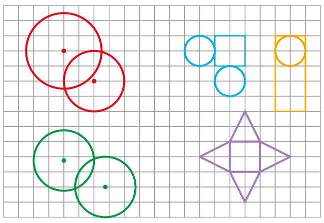
10 **Indica si cada uno de los puntos dibujados sobre las figuras es o no centro de simetría:**

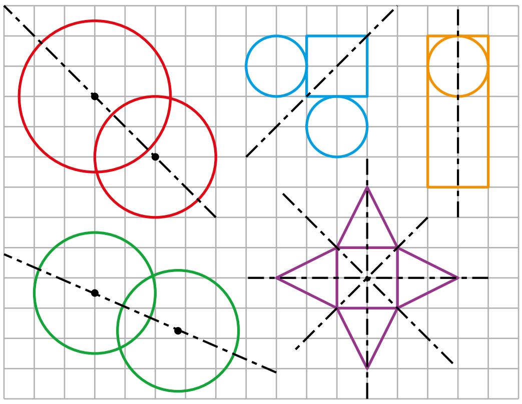


Revisa el margen de la página 244.

Son centros de simetría los de las figuras a) y c).

11 **Copia en tu cuaderno y señala los ejes de simetría de estas figuras:**

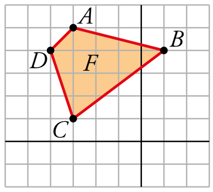




12 **Indica cuáles de las figuras de la actividad anterior tienen simetría central y señala su centro.**

Tienen simetría central las figuras d) y e). Sus centros están en el punto de corte de sus ejes de simetría, dibujados en el ejercicio anterior.

13 **Calcula las coordenadas de los vértices de la figura F transformada mediante:**



a) La simetría de eje X.

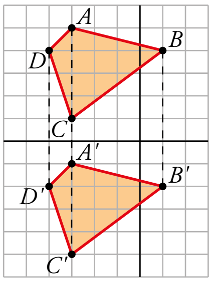
b) La simetría de eje Y.

c) La simetría central que tiene por centro el origen de coordenadas.

d) La simetría que tiene por eje la recta que pasa por C y B.

e) La simetría central que tiene por centro el vértice B.

f) ¿Qué puntos o segmentos son invariantes con respecto a las simetrías de los apartados d) y e)?

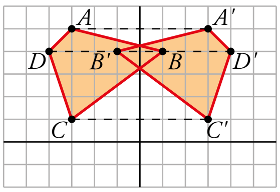
a) 

$A' = (-3, -5)$

$B' = (1, -4)$

$C' = (-3, -1)$

$D' = (-4, -4)$

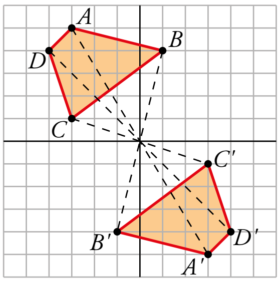
b) 

$A' = (3, 5)$

$B' = (-1, 4)$

$C' = (3, 1)$

$D' = (4, 4)$

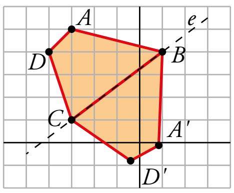
c) 

$A' = (3, -5)$

$B' = (-1, -4)$

$C' = (3, -1)$

$D' = (4, -4)$

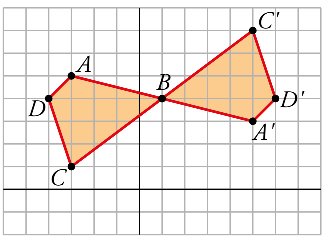
d) 

$A' = (0{,}84; -0{,}12)$

$B' = B = (1, 4)$

$C' = C = (-3, 1)$

$D' = (-0{,}4; -0{,}8)$

e) 

$A' = (5, 3)$

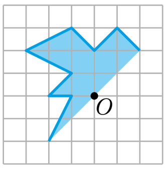
$B' = B = (1, 4)$

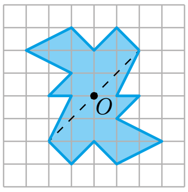
$C' = (5, 7)$

$D' = (6, 4)$

f) Con respecto a la simetría del apartado d), el segmento BC es invariante, y con respecto a la del apartado e), es invariante el punto B.

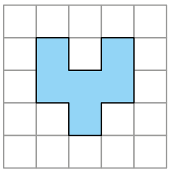
14 **Copia en tu cuaderno y completa la figura de la derecha para que el punto *O* sea el centro de una simetría central.**

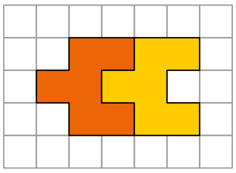


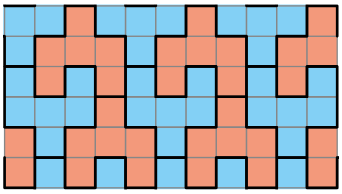


Mosaicos

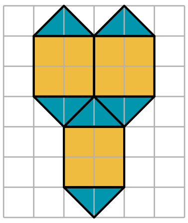
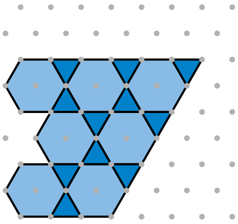
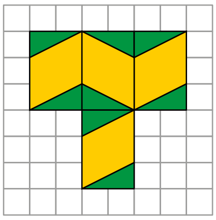
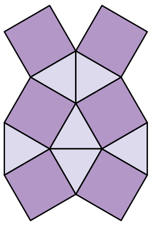
15 **Completa en tu cuaderno el siguiente mosaico a partir de la pieza azul. Busca una forma de engranarla distinta de la de la derecha.**



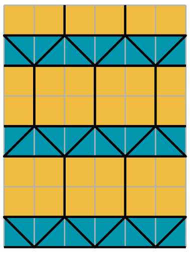
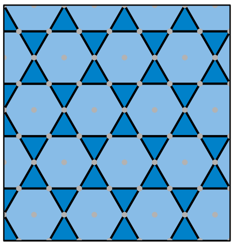
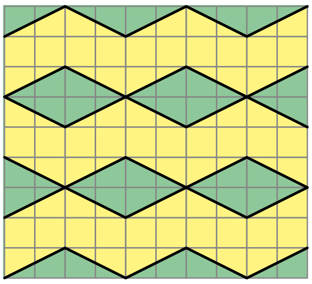
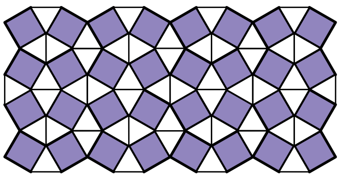




16 **a) Completa en tu cuaderno estos mosaicos:**

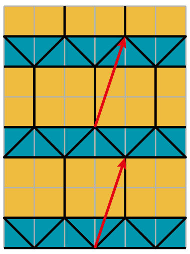
I

II

III

IV


b) Identifica, en cada uno de ellos, algunos movimientos que lo transformen en sí mismo.

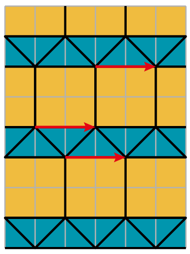
a) I

II

III

IV


b) • En la primera figura podemos encontrar diferentes traslaciones y giros:

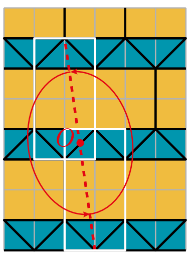
Traslación de vector $\vec{t} = (1, 3)$



Traslación de vector $\vec{t} = (2, 0)$

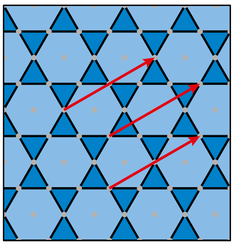


Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$

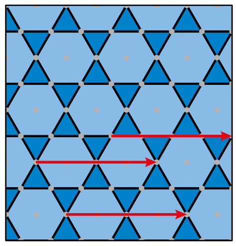


- En la segunda figura encontramos traslaciones y giros:

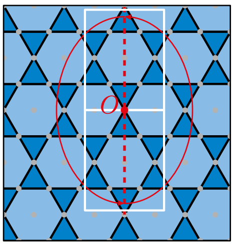
Traslación de vector $\vec{t} = (3, 2)$



Traslación de vector $\vec{t} = (4, 0)$



Giro de centro O y ángulo $\alpha = 180°$



- En la tercera figura hay traslaciones, giros y simetrías.

— Vectores de las traslaciones: $\vec{t_1} = (2, 3)$; $\vec{t_2} = (4, 0)$; …

— Giros con centro en el centro de los rombos verde oscuro y ángulo $\alpha = 180°$, por ejemplo.

— Ejes de simetría verticales y horizontales que se cortan en el centro de los rombos verde oscuro.

- En la cuarta figura hay traslaciones, simetrías y giros.

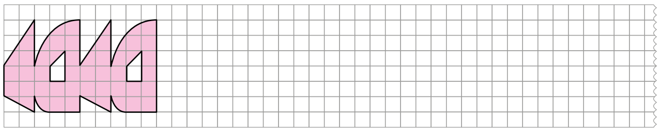
— Traslaciones que llevan, por ejemplo, del vértice inferior de un cuadrado al vértice inferior de otro cuadrado que está en una posición más arriba y desplazado a la derecha.

— Giros de 45° con centro en el centro de los cuadrados.

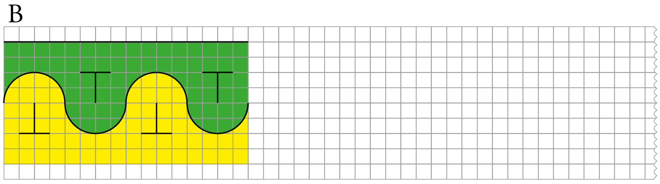
— Ejes de simetría verticales y horizontales que coinciden con los lados de los triángulos.

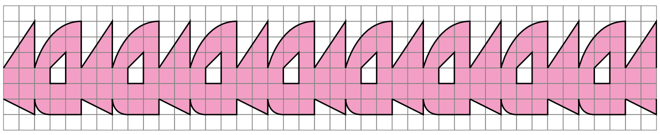
17 **Completa en tu cuaderno los siguientes frisos. ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?**

A



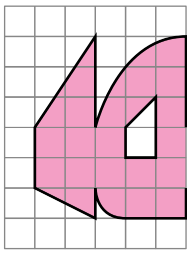
B

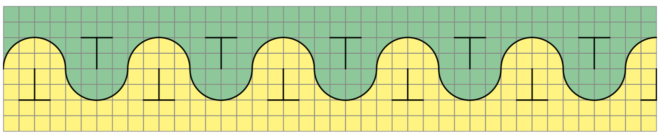




Motivo mínimo

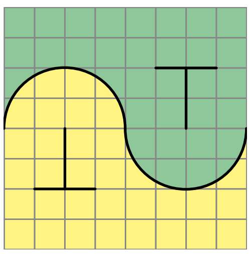
A



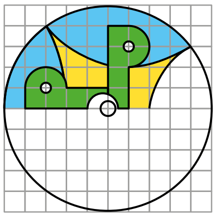


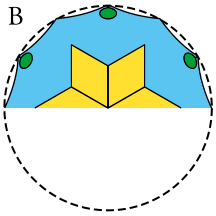
Motivo mínimo

B



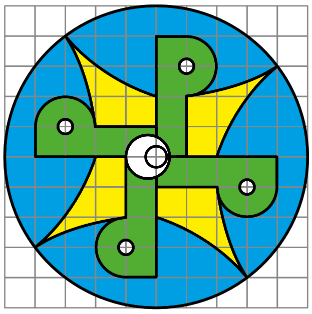
18 Completa en tu cuaderno estos rosetones:

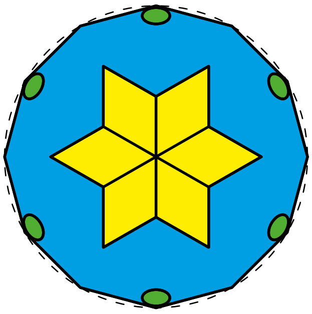
A


B


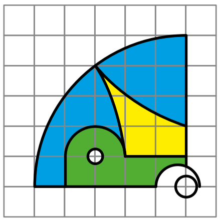
a) ¿De qué orden de giro es cada uno de ellos?

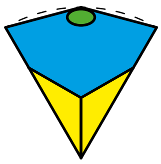
b) ¿Cuál es el motivo mínimo en cada uno de ellos?





a) A → giro de orden 4. B → giro de orden 6.

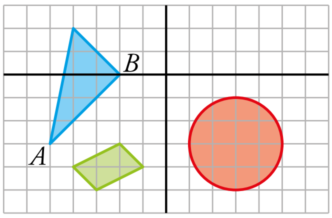
b) A


B


Página 255

Resuelve problemas

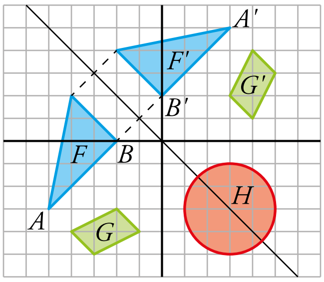
19 **a) Representa, en tu cuaderno, las transformadas de estas figuras mediante la simetría cuyo eje es la recta $y = -x$:**



b) ¿Cuál es la ecuación de la transformada de la recta que pasa por A y B?

c) ¿Alguna de las figuras es invariante?

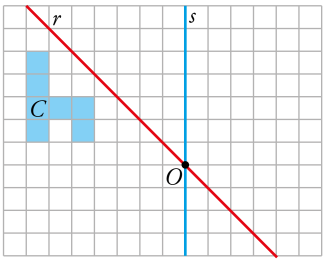
a)



b) La transformada de la recta que pasa por A y B es la misma recta, ya que es perpendicular al eje de simetría. Su ecuación es $y = x + 2$.

c) Sí, es invariante el círculo.

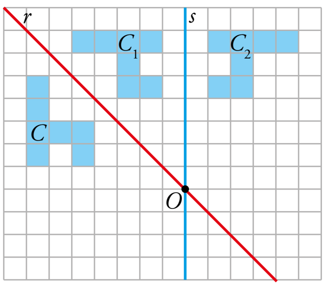
20 **a) Dibuja en tu cuaderno la imagen C_1 trans**formada de C mediante la simetría de eje r.



b) Dibuja C_2, transformada de C_1 mediante la simetría de eje s.

c) Define el giro equivalente a la composición de las dos simetrías que transforman C en C_2.

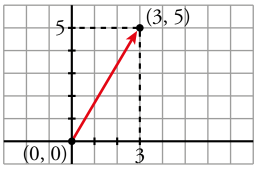
a) y b)



c) El giro equivalente a la composición de las dos simetrías es de centro O y ángulo –90°.

21 **En unos ejes coordenados, considera el vector $\vec{t}$ de origen (0, 0) y extremo (3, 5).**

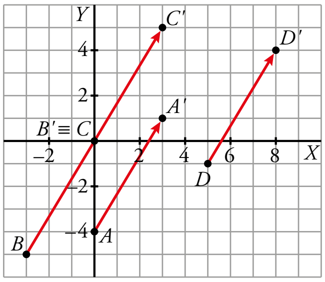
Lo designaremos, simplemente, $\vec{t}(3, 5)$.



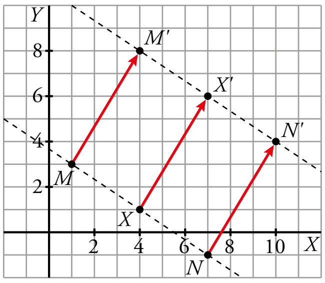
a) Traslada los puntos *A*(0, –4), *B*(–3, –5), *C*(0, 0) y *D*(5, –1) mediante este vector.

b) Comprueba que los puntos *M*(1, 3), *N*(7, –1) y *X*(4, 1) están alineados. Trasládalos mediante el vector $\vec{t}$ y comprueba que sus correspondientes también están alineados.

a) Trasladamos cada punto por el vector $\vec{t}$ = (3,5).

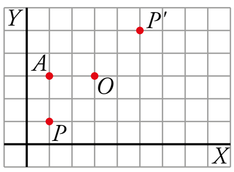


b)



22 **Observa la cuadrícula.**

Un giro de 180° alrededor de *O*(3, 3) transforma el punto *P*(1, 1) en *P'*(5, 5).



a) Identifica otros tres movimientos que transformen *P* en *P'*.

b) ¿Cuál es la imagen de *A*(1, 3) en cada uno?

a) Otros movimientos que convierten *P* en *P'* son:

– La simetría central de centro *O* (mismo movimiento que el giro descrito en el enunciado).

– El giro de centro *O* y ángulo –180°.

– La traslación de vector $\vec{t}$ = (4, 4).

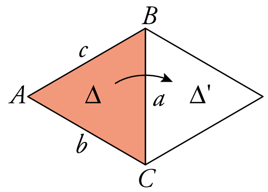
– La simetría axial de eje la recta que pasa por *O* y es perpendicular a *PP'*.

b) En la simetría central y los giros, *A'* = (5, 3).

En la traslación, *A'* = (5, 7).

En la simetría axial, *A'* = (3, 5).

23 **Determina cada uno de los tres movimientos que transforma Δ en Δ' y designa en cada caso los vértices y los lados de Δ' teniendo en cuenta de qué vértices de Δ provienen. Por ejemplo:**

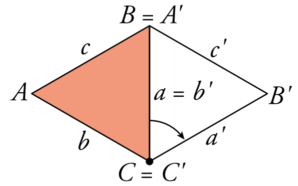


Un giro de centro C y ángulo $-60°$ transforma:

$\boldsymbol{A \to B = A'}$

$\boldsymbol{B \to B'}$

$\boldsymbol{C \to C = C'}$

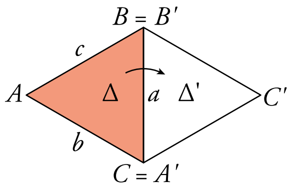


Movimiento 1: giro de centro B y ángulo 60°.

$A \to A' = C$

$B \to B = B'$

$C \to C'$

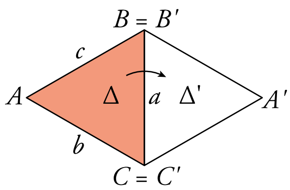


Movimiento 2: simetría axial de eje la recta que contiene al lado a.

$A \to A'$

$B \to B = B'$

$C \to C = C'$

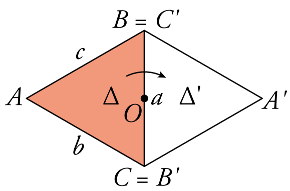


Movimiento 3: simetría central de centro el punto medio del lado a.

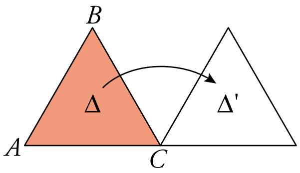
$A \to A'$

$B \to C = B'$

$C \to B = C'$



24 Encuentra una traslación, un giro y una simetría que transformen Δ en Δ'. Nombra, en cada caso, los vértices de Δ'.

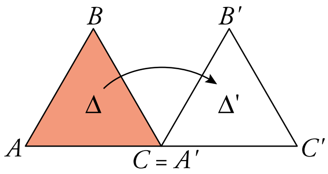


- Traslación de vector $\vec{t} = AC$.

  $A \to C = A'$

  $B \to B'$

  $C \to C'$

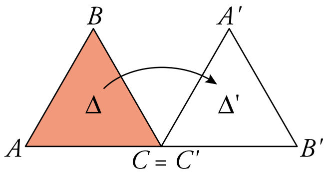


- Giro de centro C y ángulo –120°.

  $A \to A'$

  $B \to B'$

  $C \to C = C'$

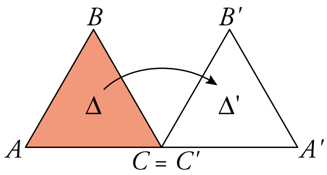


- Simetría de eje la recta que pasa por C y es perpendicular a AC.

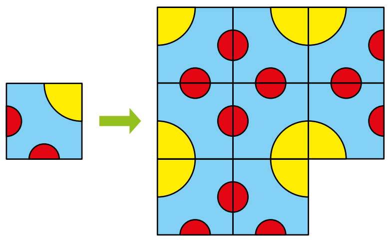
  $A \to A'$

  $B \to B'$

  $C \to C = C'$



25 Queremos alicatar una pared de 4,6 m × 3 m con azulejos cuadrados de 20 cm de lado como este:

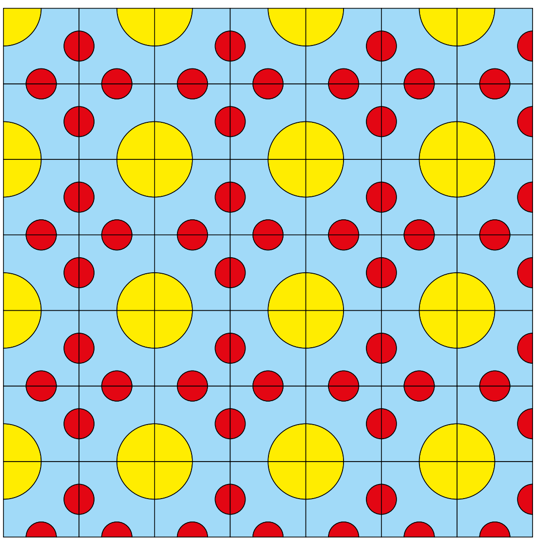


a) Completa, en tu cuaderno, un mosaico de 7 × 7 azulejos.

b) Averigua cuántos círculos grandes y cuántos pequeños (completos) habrá en la pared alicatada.

c) ¿Qué proporción de cada color (superficie) habrá en la pared? Radio del círculo grande: 10 cm; radio del círculo pequeño: 4 cm.

a)

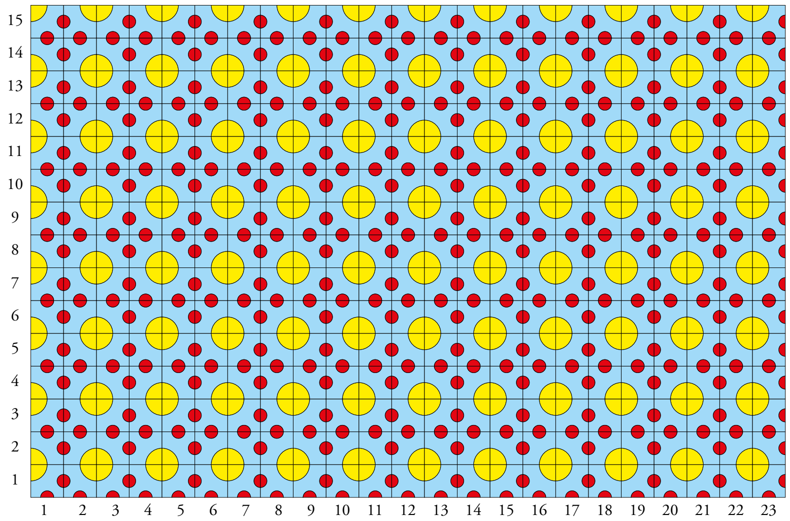


b) La pared es de 460 cm × 300 cm; por tanto, caben 23 columnas × 15 filas de azulejos.

Como cada 2 × 2 azulejos hacen un círculo grande completo, y no debemos contar los que se quedan "medios", es como si tuviéramos 22 columnas × 14 filas de azulejos.

Habrá entonces 11 columnas × 7 filas de círculos; es decir, 11 · 7 = 77 círculos grandes.

Observa la figura:



Contamos los círculos pequeños por columnas: comenzamos con la primera y vamos añadiendo columnas.

El número de círculos pequeños (completos) depende de que la columna sea par o impar. Veámoslo:

1.ª columna: 7 círculos pequeños completos.

2.ª columna: se suman 3 · 7 + 1 = 22 círculos pequeños completos.

3.ª columna: se suman 7 círculos pequeños completos.

4.ª columna: se suman 3 · 7 + 1 = 22 círculos pequeños completos.

…

Así, en las columnas pares se añaden 22 círculos completos y en las impares, solo 7. Del 1 al 23 hay 11 columnas pares y 12 impares.

Por tanto, habrá 11 · 22 + 12 · 7 = 242 + 84 = 326 círculos pequeños completos.

c) La proporción de cada color en la pared es igual a la proporción de cada color en un solo azulejo, ya que todos son iguales.

El cuadrado tiene 20 · 20 = 400 cm^2 de superficie.

El color rojo está en las dos mitades del círculo pequeño; es decir, un círculo pequeño completo (con $\frac{20}{6}$ cm de radio).

Por tanto, el color rojo ocupa una superficie de $\pi \cdot \frac{20}{6} \approx 34{,}91$ cm^2.

El color amarillo ocupa un cuarto de círculo grande (con 10 cm de radio):

$\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 10^2 \approx 78{,}54$ cm^2

Con estos datos, ya podemos hallar las proporciones de los colores que hay en cada azulejo y, por tanto, en toda la pared:

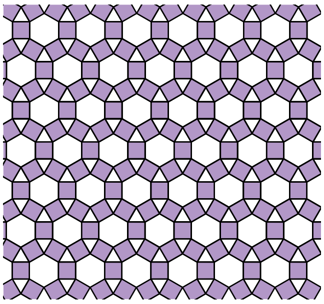
ROJO: $\dfrac{34{,}91}{400} \approx 0{,}0872 = 8{,}72\,\%$

AMARILLO: $\dfrac{78{,}54}{400} \approx 0{,}1963 = 19{,}63\,\%$

AZUL: $100 - (8{,}72 + 19{,}63) = 71{,}65\,\%$

26 **Encuentra algunos movimientos que dejen invariante este mosaico.**

¿Es regular este mosaico?
¿Es semirregular?



- Respuesta abierta: Por ejemplo:
  - — Todas las traslaciones que van de un centro de un hexágono a otro centro de otro hexáono.
  - — Giros con centro en el centro de algún hexágono y ángulos de 60°, 120° y 180° …
  - — Simetrías con ejees que pasan por los vértices opuestos de cualquiera de los hexágonos.
- Se trata de un mosaico semirregular, pues está formado por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Página 256

27 **Las figuras siguientes tienen centro de giro. Explica por qué, halla el orden de cada uno y calcula el ángulo mínimo de coincidencia mediante giro.**

a)  **b)** 

c)  **d)** 

Todas tienen centro de giro porque al girarlas alrededor de su centro coinciden consigo mismas un número entero de veces.

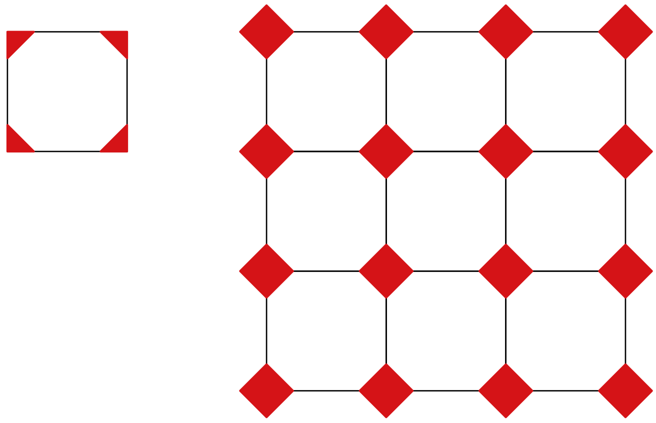
a) Orden de giro $\to$ 8. Ángulo mínimo $\to$ 360°: 8 = 45°

b) Orden de giro $\to$ 6. Ángulo mínimo $\to$ 360°: 6 = 60°

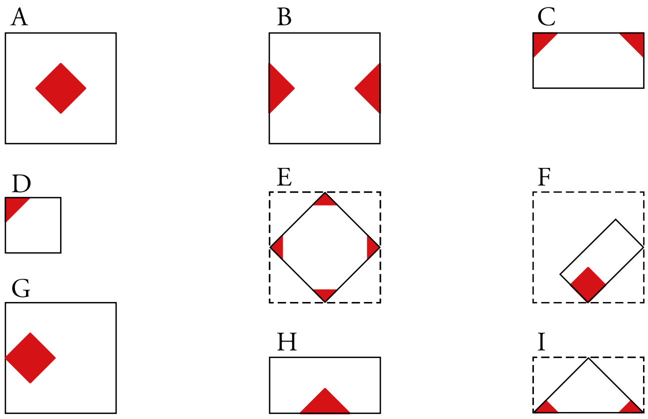
c) Orden de giro $\to$ 16. Ángulo mínimo $\to$ 360°: 16 = 22,5°

d) Orden de giro $\to$ 4. Ángulo mínimo $\to$ 360°: 4 = 90°

28 **Con la baldosa de la izquierda, se puede hacer un suelo como el de la derecha.**

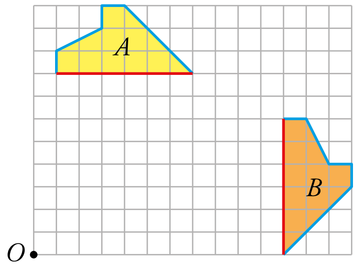


¿Con cuáles de estas otras se puede construir el mismo suelo si lo único que importa es la disposición de los cuadrados rojos, no las líneas entre baldosas?



Se puede construir el mismo suelo con las baldosas A, B, C, D, G, H e I.

29 **Las figuras *A* y *B* son iguales (compruébalo).**



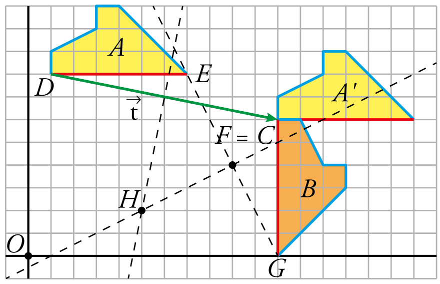
a) Lleva la figura *A* hasta la *B* mediante una traslación seguida de un giro.

b) ¿Cómo encontrarías el centro de un giro mediante el cual se transformara directamente *A* en *B*?

Busca el giro que transforma la base de A (segmento rojo) en la de B.

c) Describe las transformaciones anteriores utilizando unos ejes de coordenadas con centro en *O*.

a) Trasladamos la figura *A* hasta *A'* mediante el vector $\vec{t}(10, -2)$, después giramos *A'* centrando en *C* con un ángulo de –90°.

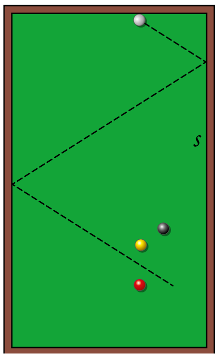


b) Trazamos el segmento *DF* y su mediatriz y el segmento *EG* y su mediatriz. El punto donde se cortan ambas mediatrices, *H*, será el centro del único giro, de ángulo –90°, que convierte la figura *A* en la *B*.

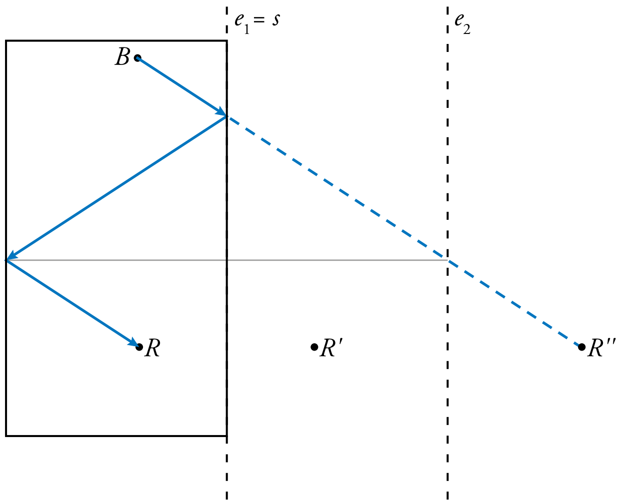
c) La traslación es de vector $\vec{t} = (10, -2)$. El giro es de centro $C = (11, 6)$. El último giro tiene centro en el punto $H = (5, 2)$.

31 **Para golpear la bola roja con la blanca después de un doble rebote, se ha hecho un intento fallido (línea punteada).**

Dibuja en tu cuaderno el punto de la banda *s* de la mesa de billar donde debe golpear la bola blanca para que esta rebote a dos bandas y toque la bola roja.



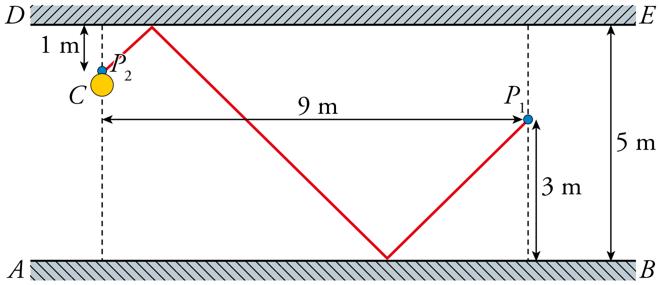
- *B* representa a la bola blanca.
- *R* representa a la bola roja.
- La distancia entre los ejes de simetría $e_1 = S$ y e_2 es la misma que la anchura de la mesa de billar.
- R' y R'' son el resultado de aplicar a R la simetría de eje $e_1 = S$ y, después, al resultado R', la simetría de eje e_2.



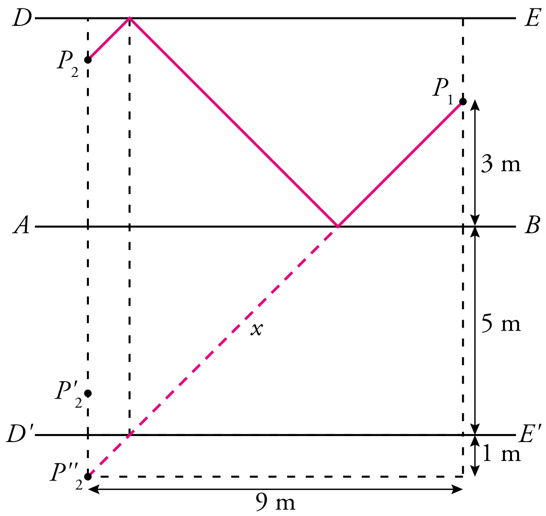
Página 257

Resuelve: un poco más difícil

32 **Dos personas, P_1 y P_2, se encuentran en un pasillo de espejos.**



Teniendo en cuenta la columna C, halla la distancia a la que P_1 cree ver a P_2 cuando P_1 mira hacia el espejo AB.



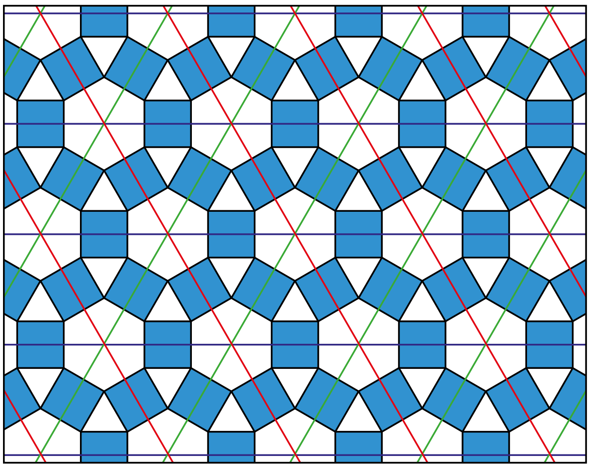
Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 9^2 + (3 + 5 + 1)^2 \rightarrow x^2 = 2 \cdot 81 \text{ m}^2 \rightarrow x = 9 \cdot \sqrt{2} \approx 12{,}73$ m.

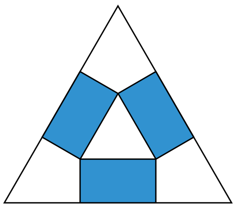
P_1 cree ver a P_2 a unos 12,73 m.

33 **Se llama motivo mínimo de un mosaico a una pieza teórica, lo más pequeña posible, repitiendo la cual se puede reproducir todo el mosaico. Los bordes de esta pieza «no se notan» salvo que los hayamos pintado expresamente.**

Por ejemplo, si en el siguiente mosaico trazamos ejes de simetría con ángulos de 60°:



descubrimos la pieza de aquí abajo como candidata a «motivo mínimo».

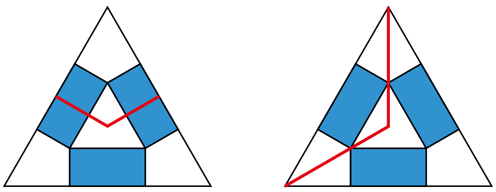


a) Redúcela a la tercera parte de dos formas distintas.

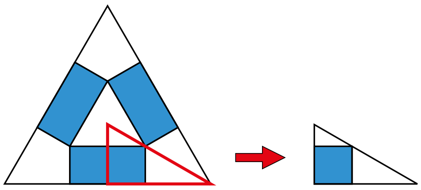
b) ¿Puedes hacerla aún más pequeña?

c) Descubre otro «motivo mínimo» trazando ejes de simetría perpendiculares.

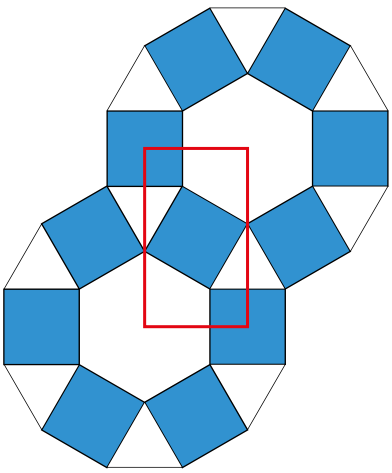
a)



b)



c)



Reflexiona

34 **Si consideramos una transformación que *deja todo como estaba y donde estaba*, a dicha transformación la llamaremos identidad (I).**

a) Define un giro que sea equivalente a la transformación identidad.

b) ¿Cuántos giros de esta amplitud son equivalentes a una identidad?

a) Un giro de 360° y cualquier centro es equivalente a una identidad.

b) Tantos como queramos, siempre que sean completos: $2 \cdot 360° = 720°$, $3 \cdot 360 = 1\,080°$ …

35 **Recuerda que dos transformaciones, T y T^{-1}, son recíprocas si al componerlas de las dos formas posibles se obtiene en ambos casos la transformación identidad (I).**

Encuentra la transformación recíproca en cada uno de los siguientes movimientos:

a) Una traslación de vector $\vec{t}(-5, 2)$.

b) Un giro de centro $O(0, 0)$ y ángulo $\alpha = -45°$.

c) Una simetría de eje la recta $y = x$.

a) Una traslación de vector $\vec{t}(5, -2)$.

b) Un giro de centro O y ángulo $\alpha = 45°$.

c) Es recíproca de sí misma: una simetría de eje la recta $y = x$.

36 **La composición de movimientos no cumple la propiedad conmutativa, es decir, que, en general, el orden en el que se aplican dos movimientos influye en el resultado final. Sin embargo, si las transformaciones son de ciertos tipos, sí se cumple la propiedad conmutativa.**

Justifica en cuáles de los siguientes casos es así y en cuáles no:

a) Composición de dos traslaciones.

b) Composición de dos giros del mismo centro.

c) Composición de dos simetrías axiales.

d) Composición de una traslación y un giro.

a) Sí, es conmutativa. El resultado es otra traslación de vector igual al vector suma de los correspondientes a las dos traslaciones.

b) Sí es conmutativa. El resultado es otro giro del mismo centro y ángulo igual a la suma de los ángulos correspondientes a los dos giros.

c) No es conmutativa.

d) No es conmutativa.

37 **Se dice que una transformación es idempotente (o involutiva) si compuesta consigo misma da lugar a la identidad (es decir, si la aplicamos dos veces, todo queda como estaba).**

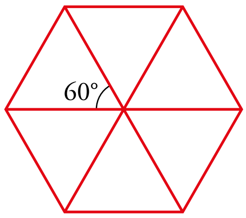
Encuentra dos movimientos que sean idempotentes.

Por ejemplo:

Un giro de centro cualquiera y ángulo 180°, ya que al componerlo dos veces es equivalente a la identidad.

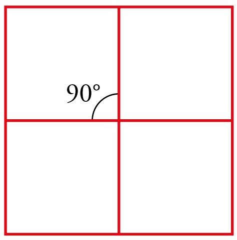
38 **Justifica que solo se puede hacer un mosaico regular con triángulos, cuadrados o hexágonos. Para ello, ten en cuenta cuánto deben sumar los ángulos de los polígonos que concurren en un vértice de un mosaico. Y cuánto vale el ángulo de cada uno de los polígonos regulares.**

- Seis triángulos equiláteros encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



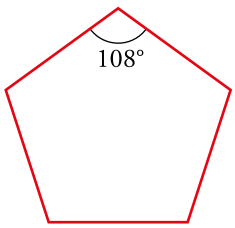
$60° \cdot 6 = 360°$

- Cuatro cuadrados encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$90° \cdot 4 = 360°$

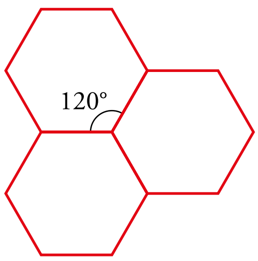
- No podemos encajar los pentágonos regulares:



$180° \cdot 3 = 324°$ $\rightarrow$ Con tres pentágonos no llega a 360°.

$180° \cdot 4 = 432°$ $\rightarrow$ Con cuatro pentágonos pasamos de 360°.

- Tres hexágonos regulares encajan en el plano, pues sus ángulos suman 360°:



$120° \cdot 3 = 360°$

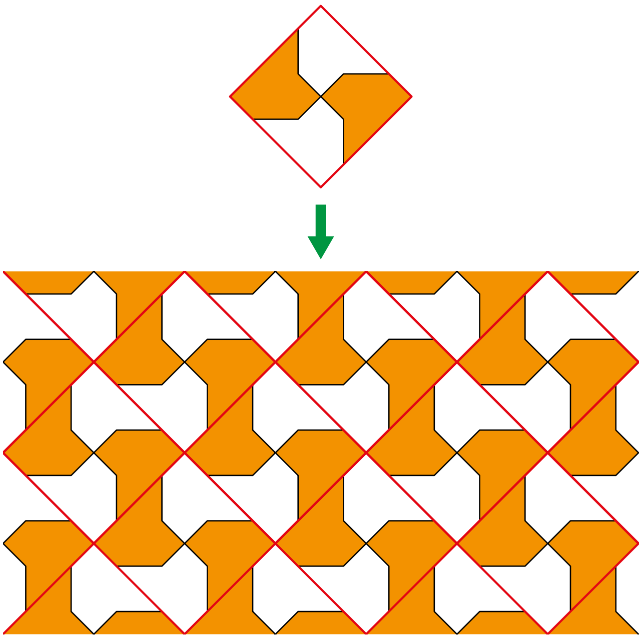
- Al considerar tres polígonos de más de 6 lados, la suma de los tres ángulos correspondientes es mayor de 360°; luego no se pueden encajar en el plano.

Página 258

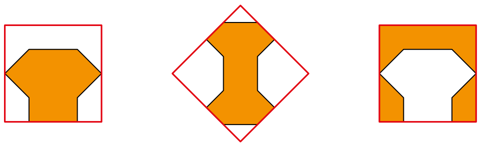
Investiga

Fabricación actual

La industria actual copia los diseños de los mosaicos nazaríes pero en vez de construirlos pieza a pieza, que sería mucho más costosos en dinero y tiempo, los consigue mediante baldosas cuadradas e iguales, con cuya composición se obtiene el dibujo deseado. Observa las ilustraciones de abajo:



- **¿Sabrías decir cuáles de estas baldosas sirven para reproducir el «multihueso»?**



- **¿Te atreves a descubrir alguna por tu cuenta?**

Todas las baldosas sirven para reproducir el mosaico multihueso.

Página 259

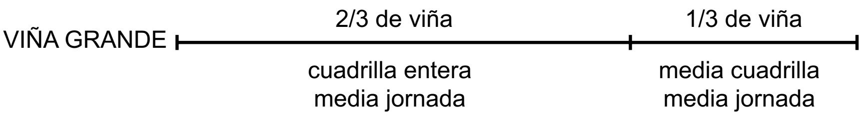
Entrénate resolviendo otros problemas

- **Una cuadrilla de vendimiadores y vendimiadoras trabaja media jornada en una viña. Por la tarde, la mitad pasa a otra viña, que es la mitad de grande que la anterior, y ambos grupos trabajan hasta el final de la jornada.**

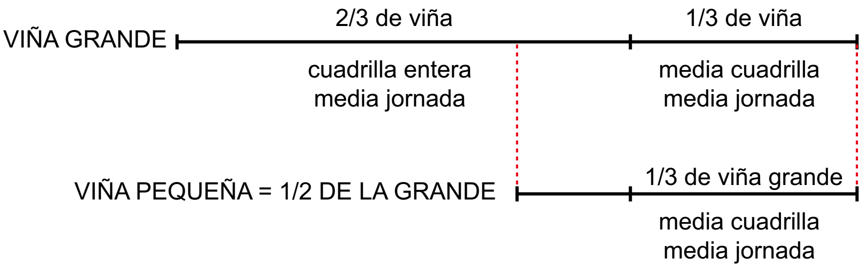
  De esta forma, han terminado de vendimiar la viña grande y queda un trozo de la pequeña, que acaba una sola persona en una jornada completa.

¿Cuántas personas componen la cuadrilla?

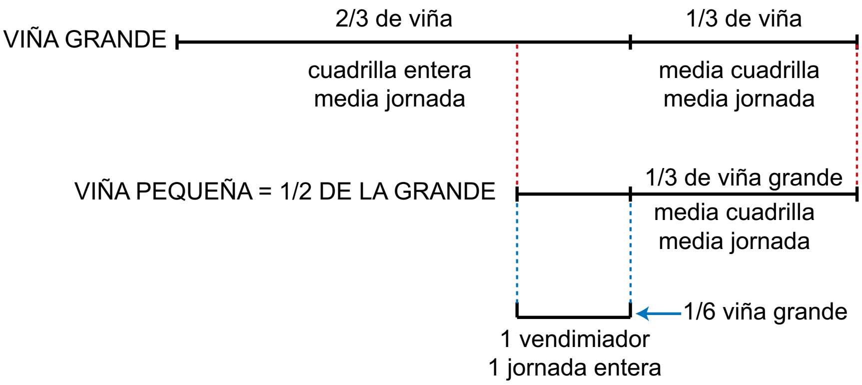
La viña grande se vendimia por la cuadrilla entera durante media jornada y por media cuadrilla otra media jornada. Es decir, por la mañana vendimian dos tercios de la viña grande y, por la tarde, el tercio que queda.



La media cuadrilla que pasa a la pequeña, vendimia en media jornada lo que la otra mitad de la cuadrilla; es decir, lo equivalente a 1/3 de la viña grande. Y la viña pequeña es la mitad de la grande.



Lo que queda, que es equivalente a 1/6 de la grande, lo acaba un jornalero en 8 horas al día siguiente.



Se concluye que cada sexta parte de la grande necesita un vendimiador un día entero. Es decir, 6 vendimiadores para la viña grande.

Lo que vendimian por la tarde de la pequeña es lo equivalente a 1/3 de la grande. Es decir, otros dos vendimiadores.

Por tanto, la cuadrilla está compuesta por 8 personas.

- **a) Tienes cuatro pesas de 1 kg, 2 kg, 4 kg y 8 kg y una báscula de dos platillos. Comprueba que con ellas puedes realizar cualquier pesada de un número entero de kilos entre 1 kg y 15 kg.**

  b) Si añades una pesa de 16 kg, ¿hasta qué pesada puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 21 kg? ¿Y para pesar 29 kg?

  c) ¿Qué pesas más deberías tener para poder pesar, al menos, 120 kg? Con esas pesas, ¿cuál es la mayor pesada que puedes realizar? ¿Qué pesas debes poner para pesar 113 kg?

a) Marcamos en esta tabla las pesas que se pueden poner en uno de los platillos para conseguir las distintas pesadas, desde 1 kg hasta 15 kg.

PESO	1 kg	2 kg	4 kg	8 kg
1 kg	×			
2 kg		×		
3 kg	×	×		
4 kg			×	
5 kg	×		×	
6 kg		×	×	
7 kg	×	×	×	
8 kg				×
9 kg	×			×
10 kg		×		×
11 kg	×	×		×
12 kg			×	×
13 kg	×		×	×
14 kg		×	×	×
15 kg	×	×	×	×

b) Añadiendo una pesa de 16 kg se pueden pesar desde 1 kg hasta 15 + 16 = 31 kg.

Para pesar 21 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 4 y 1 kilos:

16 + 4 + 1 = 21.

Para pesar 29 kg, se pueden poner, en uno de los platillos, las pesas de 16, 8, 4 y 1 kilos:

16 + 8 + 4 + 1 = 29.

c) Después de 16, la siguiente potencia de 2 es 32, y como 31 + 32 = 63, no llegamos a los 120.

La siguiente potencia de 2 es 64, y como 63 + 64 = 127, con esta ya se consigue llegar a los 120.

Habría que añadir, por tanto, las pesas de 32 kg y de 64 kg.

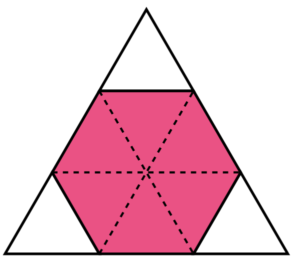
Tenemos, pues, las pesas 1, 2, 4, 8, 16, 32 y 64, con las que podríamos pesar hasta 127 kg.

Para pesar 113 kg, habría que poner: 113 = 64 + 32 + 16 + 1

96 (faltan 17)

112 (falta 1)

- **Cortando las esquinas de un triángulo equilátero se puede obtener un hexágono regular. ¿Cuál será el área de ese hexágono si la del triángulo original era de 90 m^2?**

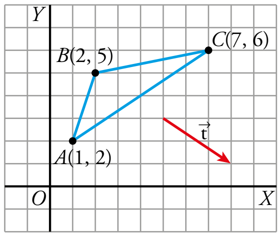


El hexágono ocupa $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ del área del triángulo.

Por tanto, su área es $A = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$ m^2.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Averigua las coordenadas de los vértices del triángulo transformado del *ABC* mediante cada uno de los siguientes movimientos:**



a) La traslación de vector $\vec{t}$.

b) La simetría de eje *X*.

c) La simetría de eje *Y*.

d) El giro de centro *O* y ángulo –90°.

e) ¿En alguno de los movimientos anteriores el punto *P*(0, 4) es doble?

f) ¿En alguno de los movimientos anteriores el eje *Y* es una recta doble?

a) $A'(4, 0)$; $B'(5, 3)$; $C'(10, 4)$

b) $A'(1, -2)$; $B'(2, -5)$; $C'(7, -6)$

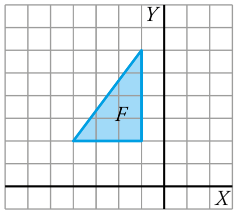
c) $A'(-1, 2)$; $B'(-2, 5)$; $C'(-7, 6)$

d) $A'(2, -1)$; $B'(5, -2)$; $C'(6, -7)$

e) En la simetría de eje *Y* el punto *P*(0, 4) es doble.

f) En las simetrías de eje *X* y de eje *Y*, el eje *Y* es doble

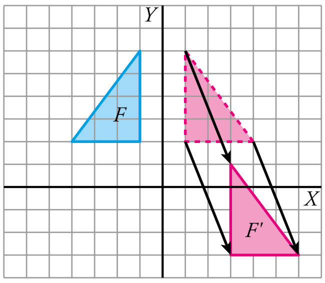
2 **Llamamos S a la simetría de eje *Y*, y T, a la traslación de vector $\vec{t}(2, -5)$.**



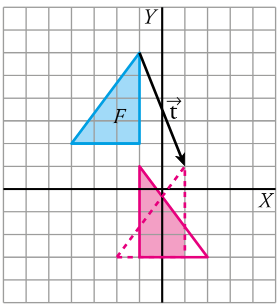
a) Obtén la transformada de la figura *F* mediante la composición de S con T.

b) Obtén la transformada de *F* mediante la composición de T con S.

a)

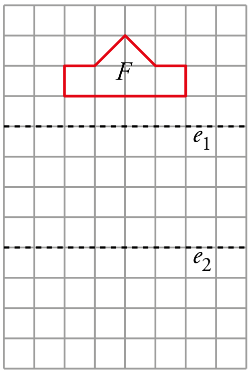


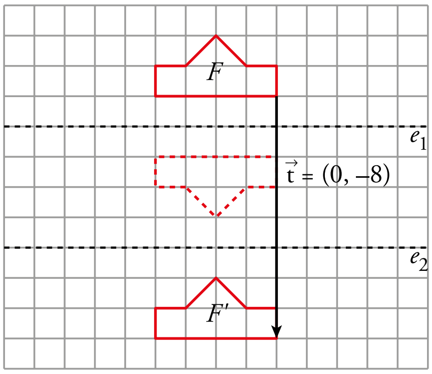
b) La figura coloreada es el resultado de la composición de movimientos.



3 **Considera las simetrías S_1 y S_2 de ejes e_1 y e_2, respectivamente. Dibuja la figura F' transformada de F mediante S_1 compuesta con S_2.**

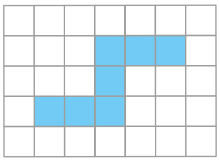
¿Qué otro movimiento nos permite obtener F' a partir de F?





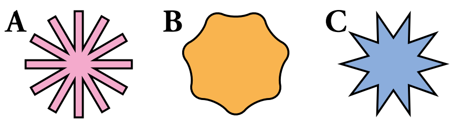
Con una traslación de vector $\vec{t}\,(0, -8)$ se obtiene F' a partir de F.

4 **Dibuja en papel cuadriculado un mosaico a partir de esta pieza:**



Respuesta abierta.

5 **Dibuja en tu cuaderno los ejes de simetría y los centros de giro de estas figuras.**



Indica el orden del centro de giro de cada una. ¿Cuál es el ángulo mínimo de coincidencia?

A → Tiene 12 ejes de simetría. Todos pasan por el centro de la figura. 6 de ellos pasan por el medio de dos brazos opuestos. Los otros 6 pasan por los vértices donde se unen dos brazos.

El orden del centro de giro es 12, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 12 = 30°.

B → Tiene 7 ejes de simetría. Cada uno de ellos pasa por el centro de la figura y por el punto medio de uno de sus salientes.

El orden del centro de giro es 7, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 7 ≈ 51,43°.

C → Tiene 10 ejes de simetría. 5 de ellos pasan por uno de los puntos de la estrella y por el centro de la figura. Los otros 5 pasan por uno de los vértices donde se juntan 2 brazos de la estrella y por el centro.

El orden del centro de giro es 10, y el ángulo mínimo de coincidencia es 360° : 10 ≈ 36°.

13 TABLAS Y GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Página 263

Resuelve

1 Meta 5.2. **Uno de los propósitos prioritarios es reducir el elevado número de víctimas mortales por violencia machista. Observa los datos recogidos en la pagina anterior. ¿Cuántas víctimas hubo en 2017? ¿Entre qué franjas de edades se concentra la mayoría de las víctimas? ¿Cómo explicas este hecho?**

- Número de víctimas en 2017: $7 + 5 + 14 + 21 + 19 + 11 + 9 + 8 + 2 + 3 = 99$
- La mayoría de las víctimas tienen entre 30 y 50 años.
- Respuesta abierta.

2 **Fíjate en el estudio del NÚMERO DE HIJOS E HIJAS DE 150 FAMILIAS.**

a) En la tabla, ¿qué significa el 44 que está a la derecha del 3?

b) Sin hacer el cálculo, ¿cuánto suman los nueve números de la columna derecha de la tabla?

a) El 44 significa que hay 44 familias que tienen 3 hijos.

b) Deben sumar 150, ya que el estudio se hace sobre 150 familias.

3 **Observa la información sobre el REPARTO, SEGÚN EL TIPO DE TRABAJO, DE 600 000 PERSONAS que aparece a la izquierda.**

a) ¿Sobre cuántas personas se han recopilado datos?

b) ¿Qué color del diagrama corresponde a cada sector?

c) Calcula el porcentaje de personas que corresponde a cada sector y comprueba que los sectores están razonablemente construidos.

a) Se han recopilado datos sobre 600 000 trabajadores.

b) Amarillo $\rightarrow$ Servicios   Azul $\rightarrow$ Industria   Verde $\rightarrow$ Agricultura

c) Agricultura: $\dfrac{50\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 8{,}33\,\% \rightarrow \dfrac{50\,000}{600\,000} \cdot 360° = 30°$

Industria: $\dfrac{175\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 29{,}17\,\% \rightarrow \dfrac{175\,000}{600\,000} \cdot 360° = 105°$

Servicios: $\dfrac{375\,000}{600\,000} \cdot 100 \approx 62{,}5\,\% \rightarrow \dfrac{375\,000}{600\,000} \cdot 360° = 225°$

1 EL PROCESO QUE SE SIGUE EN ESTADÍSTICA

Página 264

1 Se quiere realizar una encuesta para estudiar las aficiones musicales. Para cada una de las preguntas siguientes, di justificadamente si te parecen o no razonables:

a) ¿Cuáles son tus grupos musicales preferidos?

b) De los siguientes estilos musicales, señala aquellos que has escuchado más este mes:

• Rock	**• Pop**	**• Rap**	**• Elect.**
• Hip-Hop	**• Reggae**	**• Salsa**	**• Punk**
• Metal	**• Grunge**	**• Jazz**	**• Clásico**

c) ¿Oyes la radio? Si es así, ¿qué cadena?

d) ¿Cuáles de estas cadenas de radio escuchas más de 2 horas a la semana?

• Cadena 100	**• Los 40 principales**
• Rock FM	**• Kiss FM**
• Radio Clásica	**• Europa FM**
• EDM	**• M80 Radio**
• Radio 3	**• Cadena Dial**

e) ¿Cuál es el último concierto al que has ido?

a) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

b) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *el estilo musical* y cuáles son sus posibles valores.

c) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

d) Es razonable porque es una pregunta clara con las alternativas señaladas. Es evidente que la variable es *la cadena musical que escuchas* y cuáles son sus posibles valores.

e) No es razonable porque puede que se obtengan muchas respuestas distintas que sean difíciles de organizar.

2 VARIABLES ESTADÍSTICAS

Página 265

1 Indica si cada una de estas variables es cuantitativa discreta, cuantitativa continua o cualitativa:

a) En los cines de un pueblo se anota el tipo de película que proyectan (comedia, acción…), cuánto dura la película y el número de espectadores.

b) En los mercados de una ciudad se observa la superficie, el número de puertas de acceso y el tipo de mercado (alimentación, ropa, complementos…).

c) Nos hemos fijado en algunas características de los teléfonos móviles que tiene el alumnado de un centro escolar: la marca, el número de compañías que lo ofertan y el precio.

d) Una científica estudia, en los volcanes del Pacífico, la altura, el número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años y el tipo de volcán (hawaiano, estromboliano, vulcaniano, peleano).

a) Tipo de película: cualitativa.

Duración de la película: cuantitativa continua.

Número de espectadores: cuantitativa discreta.

b) Superficie: cuantitativa continua.

Número de puertas de acceso: cuantitativa discreta.

Tipo de mercado: cualitativa.

c) Marca: cualitativa.

Número de compañías que lo ofertan: cuantitativa discreta.

Precio: cuantitativa continua.

d) Altura: cuantitativa continua.

Número de veces que han entrado en erupción en los últimos 100 años: cuantitativa discreta.

Tipo de volcán: cualitativa.

3 ▸ POBLACIÓN Y MUESTRA

Página 266

1 Indica la población, la muestra y los individuos en cada uno de los siguientes ejemplos:

a) Se seleccionan 50 edificios de una ciudad para hacer un estudio sobre el número de plantas, la altura y la utilización de los locales bajos (para viviendas, oficinas, tiendas, bares…).

b) Se analizan 100 libros de una biblioteca: número de páginas, ubicación en la estantería y contenido (como novela, ensayo, manual…).

c) Se ha encuestado a 23 de los alumnos y las alumnas que van al centro en bici sobre el número de desarrollos de la bicicleta, el peso y la marca.

a) Población: edificios de la ciudad.

Muestra: 50 edificios.

Individuos: cada uno de los edificios.

b) Población: libros de la biblioteca.

Muestra: 100 libros de la biblioteca.

Individuos: cada uno de los libros.

c) Población: estudiantes de un instituto.

Muestra: 23 alumnos del centro que van en bici.

Individuos: cada uno de los estudiantes.

4 CONFECCIÓN DE UNA TABLA DE FRECUENCIAS

Página 268

1 **El profesor ha apuntado las faltas de asistencia que ha tenido cada uno de sus alumnos y alumnas a lo largo del trimestre:**

2, 3, 0, 1, 1	**2, 2, 4, 3, 1**	**3, 0, 2, 0, 1**
2, 2, 1, 2, 1	**0, 3, 4, 2, 1**	**3, 5, 1, 1, 2**

a) Confecciona una tabla de frecuencias.

b) Si se quisiera hacer una estadística con el número de ejercicios bien resueltos por cada alumno y alumna a lo largo del año, ¿la tabla de frecuencias debería ser con datos aislados o agrupados en intervalos?

a)

FALTAS (x_i)	RECUENTO	f_i
0	||||	4
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ||||	9
3	~~||||~~	5
4	||	2
5	|	1

b) La tabla de frecuencias debería ser con datos agrupados en intervalos porque tomaría muchos valores distintos.

2 **Se ha tomado el tiempo en los 100 m lisos a las personas que forman un club de atletismo. Estos son los resultados:**

11,62	**12,03**	**12,15**	**11,54**	**10,95**
11,56	**11,08**	**11,38**	**12,08**	**11,73**
12,11	**11,52**	**11,72**	**11,23**	**11,66**
10,87	**11,32**	**11,58**	**12,01**	**11,06**

Haz una tabla de frecuencias con estos intervalos:

10,805 - 11,075 - 11,345 - 11,615 - 11,885 - 12,155

INTERVALO	RECUENTO	f_i
10,805-11,075	|||	3
11,075-11,345	|||	3
11,345-11,615	~~||||~~	5
11,615-11,885	||||	4
11,885-12,155	~~||||~~	5

Página 269

3 **La siguiente tabla muestra el deporte que prefieren practicar 40 estudiantes.**

DEPORTE	FRECUENCIA
Baloncesto	10
Voleibol	1
Fútbol	20
Tenis	5
Ajedrez	4

a) Calcula las frecuencias relativas y porcentuales de esta distribución y explica por qué carece de sentido hallar las frecuencias acumuladas.

b) Que la frecuencia relativa de *Baloncesto* sea 10/40 quiere decir que uno de cada cuatro estudiantes juega al baloncesto. Explica con las mismas palabras las frecuencias relativas de *Fútbol* y *Tenis* y las frecuencias porcentuales de *Ajedrez* y *Baloncesto*.

a) Carece de sentido porque no es una variable cuantitativa y, siendo cualitativa, no tiene un orden ni puede estar ordenada.

DEPORTE (x_i)	f_i	$f_{relativa}$	%
Baloncesto	10	$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0{,}25$	25 %
Balonvolea	1	$\frac{1}{40}=0{,}025$	2,5 %
Fútbol	20	$\frac{20}{40}=\frac{1}{2}=0{,}5$	50 %
Tenis	5	$\frac{5}{40}=\frac{1}{8}=0{,}125$	12,5 %
Ajedrez	4	$\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0{,}1$	10 %
	40	1	100 %

b) Que la frecuencia relativa de *Fútbol* sea 20/40 = 1/2 quiere decir que uno de cada dos estudiantes juega al fútbol.

Que la frecuencia relativa de *Tenis* sea 5/40 = 1/8 quiere decir que uno de cada ocho estudiantes juega al tenis.

Que la frecuencia porcentual de *Ajedrez* sea 10 % quiere decir que diez de cada cien estudiantes juega al ajedrez.

Que la frecuencia porcentual de *Baloncesto* sea 25 % quiere decir que veinticinco de cada cien estudiantes juega a baloncesto.

4 **Halla las frecuencias acumuladas de esta distribución y di qué significan $f_{acumulada}$ (3) y $f_{acumulada}$ (5).**

N.° DE SUSPENSOS	0	1	2	3	4	5	6	7
FRECUENCIA	6	12	8	5	3	1	1	0

x_i	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
0	6	6
1	12	6 + 12 = 18
2	8	6 + 12 + 8 = 26
3	5	6 + 12 + 8 + 5 = 31
4	3	6 + 12 + 8 + 5 + 3 = 34
5	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 = 35
6	1	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 = 36
7	0	6 + 12 + 8 + 5 + 3 + 1 + 1 + 0 = 36

$f_{acumulada}$ (3) = 31. Significa que 31 estudiantes han tenido 3 suspensos o menos.

$f_{acumulada}$ (5) = 35. Significa que 35 estudiantes han tenido 5 suspensos o menos.

5 **Esta tabla recoge los meses que cumplen años las 100 personas que componen un grupo de montaña.**

MES	E	F	M	Ab	My	Jn	Jl	Ag	S	O	N	D
FREC.	7	9	10	6	8	8	7	9	8	9	9	10

a) Halla las frecuencias acumuladas.

b) ¿Cuántas personas nacieron antes de junio? ¿Y después de agosto?

a)

MES (x_i)	f_i	FRECUENCIA ACUMULADA
E	7	7
F	9	16
M	10	26
Ab	6	32
My	8	40
Jn	8	48
Jl	7	55
Ag	9	64
S	8	72
O	9	81
N	9	90
D	10	100

b) Antes de junio nacieron 40 personas.

Después de agosto nacieron 100 – 64 = 36 personas.

5 ▶ GRÁFICO ADECUADO AL TIPO DE INFORMACIÓN

Página 270

1 **Representa mediante el gráfico adecuado.**

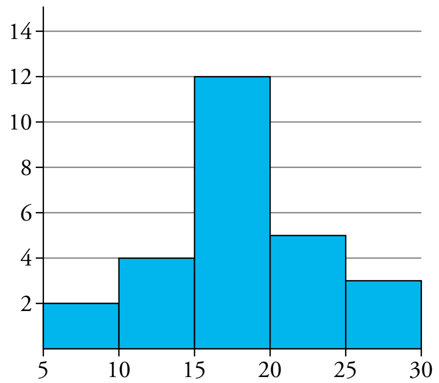
a) Temperaturas máximas medidas cada 15 días a lo largo de un año en una localidad.

TEMPERATURA (°C)	N.° DE DÍAS
5-10	2
10-15	4
15-20	12
20-25	5
25-30	3

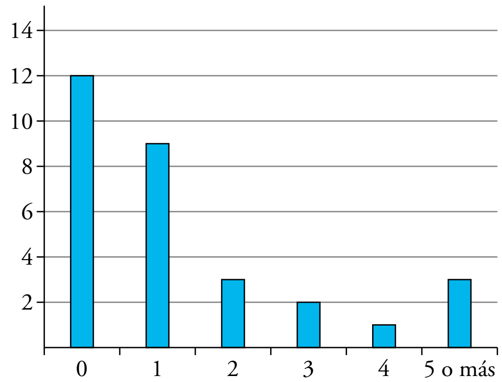
b) Número de asignaturas suspensas que tienen los alumnos y las alumnas de una clase.

N.° DE ASIGNATURAS SUSPENSAS	N.° DE ALUMNOS Y ALUMNAS
0	12
1	9
2	3
3	2
4	1
5 o más	3

a) Mediante un histograma:



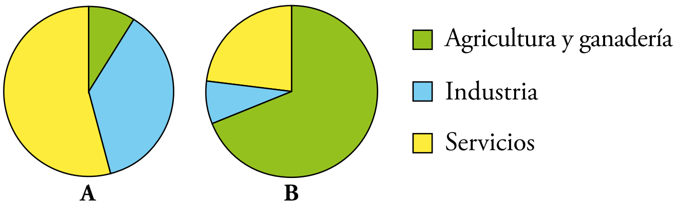
b) Mediante un diagrama de barras:



Página 271

2 **Los diagramas de sectores se utilizan a menudo para comparar la misma distribución en distintos países o regiones.**

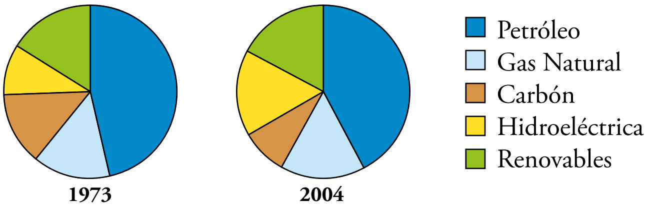
Observa los sectores que muestran cómo se divide la población trabajadora de dos países: Austria y Mauritania. ¿A cuál pertenece cada uno? Explica por qué.



A → Austria por ser mayor los sectores de servicios e industria y menor el de la agricultura y ganadería.

B → Mauritania, por que es mayor el sector de la agricultura y ganadería.

3 **Observa la evolución del consumo mundial de energías primarias por fuentes energéticas:**



a) Explica qué energías han aumentado su consumo y cuáles han disminuido.

b) Busca en Internet el diagrama correspondiente al año actual.

a) Del año 1973 al 2004 ha aumentado el consumo del gas natural y de energías hidroeléctricas y, ha disminuido el consumo de petróleo y de carbón.

Se mantiene el consumo de energías renovables.

b) El alumnado buscará el diagrama de sectores del año correspondiente.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

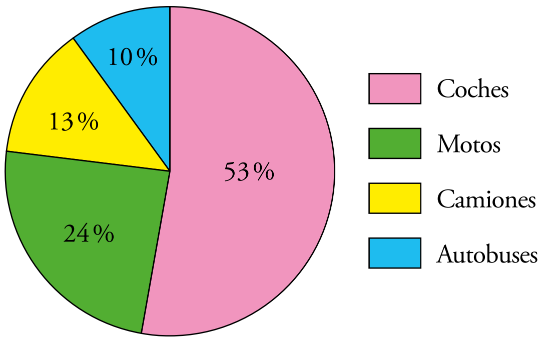
Página 272

2 Elaboración de un diagrama de sectores

Hazlo tú

- **Un ferri transporta distintos tipos de vehículos. Elabora el diagrama de sectores según estos datos: Coches: 53 %; Motos: 24 %; Camiones: 13 %; Autobuses: 10 %.**

TIPOS DE VEHÍCULOS	PORCENTAJE	f_r	ÁNGULO
Coches	53 %	0,53	0,53 · 360° = 190,8°
Motos	24 %	0,24	0,24 · 360° = 86,4°
Camiones	13 %	0,13	0,13 · 360° = 46,8°
Autobuses	10 %	0,10	0,10 · 360° = 360°



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 273

Practica

Población y muestra. Variables

1 **Indica, para cada caso propuesto:**

— Cuál es la población, y cuáles, los individuos.

— Cuál es la variable y qué tipo de variable es.

a) El peso de los recién nacidos en la Comunidad Valenciana a lo largo del año pasado.

b) Cantidad de lluvia recogida en un cierto observatorio meteorológico en cada año del presente siglo.

c) Número de mascotas en los hogares españoles.

d) Tipos de coches (marca y modelo) que tiene cada vecino de mi urbanización.

e) Número de tarjetas amarillas mostradas en cada partido de fútbol de 1.ª división esta temporada.

a) Población: los recién nacidos en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Individuos: cada bebe recién nacido en la Comunidad Valenciana el año pasado.

Variable: peso.

Es una variable cuantitativa continua.

b) Población: los años del presente siglo.

Individuos: cada año del siglo.

Variable: cantidad de lluvia recogida.

Es una variable cuantitativa continua.

c) Población: hogares españoles.

Individuos: cada hogar español.

Variable: número de mascotas.

Es una variable cuantitativa discreta.

d) Población: vecinos de mi urbanización.

Individuos: cada vecino de mi urbanización.

Variable: tipo de coche.

Es una variable cualitativa.

e) Población: partidos de fútbol de 1ª división de la temporada pasada.

Individuos: cada partido de fútbol de la temporada.

Variable: número de tarjetas amarillas mostradas.

Es una variable cuantitativa discreta.

2 **Se quieren realizar los siguientes estudios:**

I. El sexo (niño o niña) de cada bebé nacido en un hospital a lo largo de un año.

II. Qué periódico lee cada habitante de una ciudad.

III. Las alturas y los pesos de todos los alumnos y las alumnas de la clase.

IV. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

V. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población, y cuáles, los individuos.

b) Indica en cada uno cuál es la variable que se estudia y de qué tipo es.

c) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

a) I. Población: los bebés nacidos en un hospital a lo largo de un año.

Individuos: cada uno de los bebés nacidos en el hospital ese año.

II. Población: los habitantes de una ciudad.

Individuos: cada uno de los habitantes de la ciudad.

III. Población: los alumnos y alumnas de la clase.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas de la clase.

IV. Población: las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

Individuos: cada una de las personas que han visto la obra en la ciudad.

V. Población: los alumnos y alumnas de un centro escolar.

Individuos: cada uno de los alumnos y alumnas del centro escolar.

b) I. La variable es el sexo. Es una variable cualitativa.

II. La variable es el periódico. Es una variable cualitativa.

III. Las variables son la altura y el peso. Son variables cuantitativas continuas.

IV. La variable es la edad. Es una variable cuantitativa continua.

V. La variable es los estudios que se elegirán al terminar la ESO. Es una variable cualitativa.

c) Es necesario recurrir a una muestra en los casos II y IV porque pueden ser poblaciones muy numerosas e incluso difíciles de controlar.

En los demás casos no sería necesario ya que en el hospital se lleva un registro continuo y obligatorio de los nacimientos, y en la clase y el centro escolar no hay tantos alumnos y son fáciles de controlar y preguntar.

3 **Di cuáles de las siguientes muestras están «razonablemente» bien tomadas:**

a) En una frutería, para ver cómo están de duros los aguacates, tocamos cinco piezas.

b) Hablo con diez de mis amistades sobre política para saber quién ganará este año las elecciones.

c) Ojeamos diez páginas de un libro para ver si nos gustan sus ilustraciones.

d) Tomo café en cuatro bares de mi barrio para ver cuánto cuesta un café en España.

a) La muestra tiene pocas piezas.

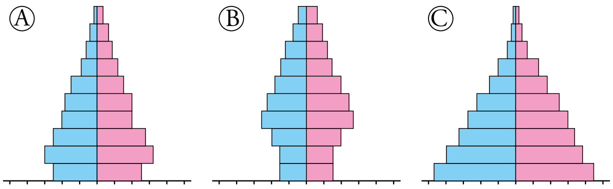
b) Los individuos no están elegidos al azar.

c) Bien tomada.

d) Los individuos no están elegidos al azar.

Interpretación de gráficos

4 **Estas pirámides de población muestran la distribución por edades (de 10 en 10 años) y sexo (hombres a la izquierda y mujeres a la derecha) de tres países:**



Teniendo en cuenta el problema resuelto 1 de la página anterior, asocia, justificadamente, una gráfica a cada uno de estos países:

I. País del tercer mundo.

II. País en vías de desarrollo.

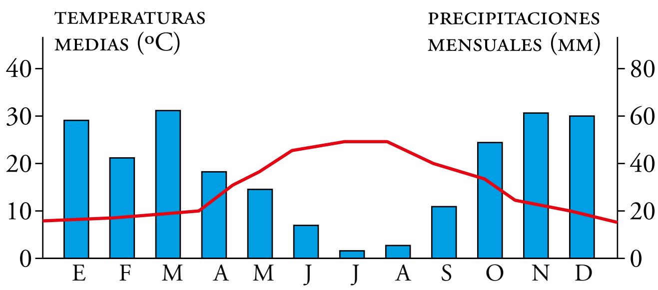
III. País desarrollado con un sistema estable.

La pirámide *C* es la de un país del tercer mundo, ya que hay muchos nacimientos y muy pocas personas llegan a ser ancianas.

La pirámide *B* corresponde a un país desarrollado con un sistema estable. Su base es más estrecha debido al descendo de la natalidad y es en la que hay mayor esperanza de vida.

La pirámide *A* representa un país en vías de desarrollo. Tiene una forma intermedia entre las otras dos.

5 **Es frecuente que en un mismo gráfico se representen dos series de datos relativos a una misma variable. En este se muestran datos sobre la climatología de Badajoz, durante un año.**



a) ¿Qué representan las barras?

b) ¿Qué representa la línea continua?

c) ¿Cuáles son las variables? ¿De qué tipo son?

d) Describe la relación entre las dos variables y razona por qué ocurre así.

a) La cantidad de lluvia caída en cada mes.

b) La temperatura media a lo largo del año.

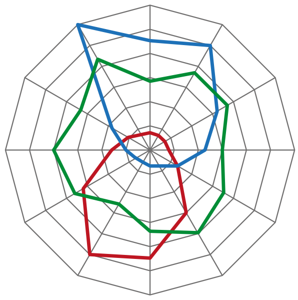
c) Temperaturas medias: cuantitativa continua.

Precipitaciones mensuales: cuantitativa continua.

d) En general cuando una de las variables sube la otra baja. Es lógico que suceda así pues en Badajoz los meses que menos llueve son los de verano, que es cuando más calor hace. Y viceversa, cuando más frío hace es cuando hay más precipitaciones

6 **Observa el gráfico de la derecha relativo a las ventas de algunos artículos en un pequeño comercio.**

a) ¿Qué color le corresponde a los bañadores? ¿Y a las toallas? ¿Y a los guantes?



b) ¿En qué estación del año se han vendido más bañadores? ¿Y menos? ¿Por qué?

c) ¿Cuándo se han vendido más cantidad de guantes?

d) Explica cómo se comporta la gráfica de las toallas.

a) Bañadores → Rojo. Toallas → Verde. Guantes → Azul.

b) Se han vendido más bañadores en agosto, y menos, en febrero.

En verano, lógicamente, se venden muchos más bañadores que en invierno.

c) En diciembre.

d) La venta de toallas sufre pocas variaciones a lo largo del año, puesto que las toallas se usan indistintamente en verano y en invierno, ya sea dentro de los hogares o fuera.

Página 274

Elaboración de tablas y gráficas

7 **Al preguntar al alumnado de un grupo de tercero de ESO por el número de libros que han leído en el último mes, hemos obtenido los datos siguientes:**

2	**1**	**3**	**1**	**1**	**5**	**1**	**2**	**4**	**3**
1	**0**	**2**	**4**	**1**	**0**	**2**	**1**	**2**	**1**
3	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**0**	**2**

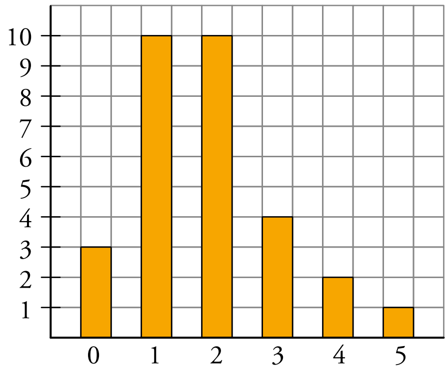
a) Haz la tabla de frecuencias absolutas.

b) Realiza el diagrama de barras que corresponde a estos datos.

a)

x_i	f_i
0	3
1	10
2	10
3	4
4	2
5	1

b)



8 **Estos son los mejores tiempos tomados en carreras de 10 km a los deportistas de un club de atletismo:**

42:20	**40:08**	**47:32**	**49:50**	**43:24**	**48:31**	**51:42**
45:53	**47:17**	**50:37**	**49:07**	**51:37**	**43:28**	**45:18**
44:36	**46:15**	**50:48**	**47:59**	**51:21**	**43:37**	**42:14**

a) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas con los siguientes intervalos:

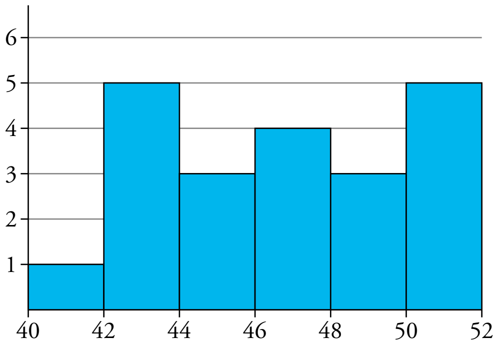
40 - 42 - 44 - 46 - 48 - 50 - 52

b) Traza el histograma correspondiente.

a)

Intervalo	Recuento	f_i
40-42	I	1
42-44	卌	5
44-46	III	3
46-48	IIII	4
48-50	III	3
50-52	卌	5

b)

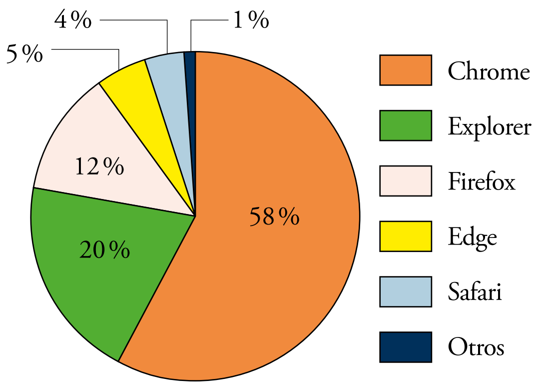


9 **Elabora, con los siguientes datos, un diagrama de sectores con el porcentaje de los navegadores web más utilizados en el mundo:**

Chrome: 58 % **Internet Explorer: 20 %** **Firefox: 12 %**

Microsoft Edge: 5 % **Safari: 4 %** **Otros: 1 %**

TIPOS DE VEHÍCULOS	PORCENTAJE	f_r	ÁNGULO
Chrome	58 %	0,58	0,58 · 360° = 208,8°
Explorer	20 %	0,20	0,20 · 360° = 72°
Firefox	12 %	0,12	0,12 · 360° = 43,2°
Edge	5 %	0,05	0,05 · 360° = 18°
Safari	4 %	0,04	0,04 · 360° = 14,4°
Otros	1 %	0,01	0,01 · 360° = 3,6°



10 **Se ha realizado un estudio sobre la utilidad que le dan al *Smartphone* los menores de 26 años y los de 26 a 50 años. Los resultados vienen dados en la siguiente tabla:**

UTILIDAD	MENORES DE 26	DE 26 A 50
Juegos y entretenimiento	35 %	12 %
Redes sociales	33 %	26 %
Noticias	5 %	37 %
Llamadas y mensajes	27 %	25 %

a) Elabora los correspondientes diagramas de sectores.

b) Describe los parecidos y las diferencias de ambos grupos.

c) Inventa un diagrama de sectores para los mayores de 50 años.

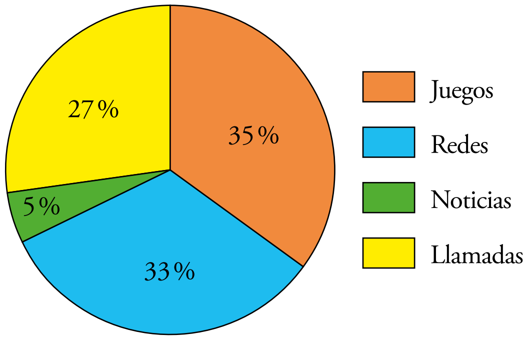
a) • Menores de 26:

Juegos → 35 % → 0,35 · 360° = 126°

Redes → 33 % → 0,33 · 360° = 118,8°

Noticias → 5 % → 0,05 · 360° = 18°

Llamadas → 27 % → 0,27 · 360° = 97,2°



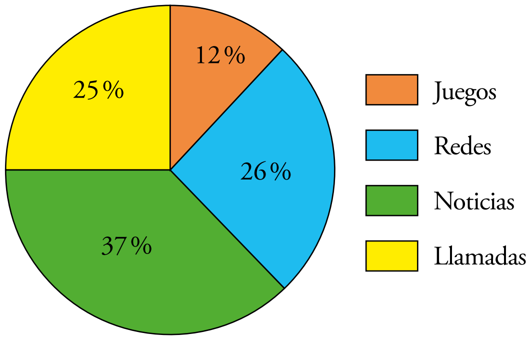
• Mayores de 26:

Juegos → 12 % → 0,12 · 360° = 43,2

Redes → 26 % → 0,26 · 360° = 93,6°

Noticias → 37 % → 0,37 · 360° = 133,2°

Llamadas → 25 % → 0,25 · 360° = 90°



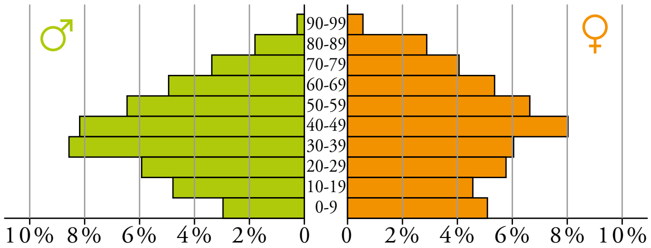
b) El uso para llamadas es muy parecido en ambos grupos. Los jóvenes lo usan más para jugar, y los adultos, para consultar información.

c) Respuesta abierta.

Resuelve problemas

11 **Esta tabla describe la población de un país.**

Abajo está su pirámide de población, en la cual, en lugar de frecuencias, se han puesto porcentajes. ¡Atención! Hay una barra incorrecta en la parte de los hombres y otra en la de las mujeres.



GRUPO DE EDAD	N.º DE HOMBRES (MILLONES)	N.º DE MUJERES (MILLONES)
0-9	2 489	2 352
10-19	2 271	2 146
20-29	2 742	2 687
30-39	4 029	3 843
40-49	3 850	3 739
50-59	3 029	3 096
60-69	2 307	2 504
70-79	1 549	1 923
80-89	823	1 355
90-99	106	279

Indica a qué intervalo corresponden las dos barras mal dibujadas y explica en qué se nota el error.

- En los hombres, la barra incorrecta es la de 0-9 años, pues es más corta que la de 10-19 cuando hay menos varones de esa edad.
- En la de mujeres, la barra incorrecta es la de 30-39 años, pues siendo el grupo más numeroso no es la barra más larga.

12 **Dibuja la pirámide de población de la India en el año 2012 cuyos datos vienen reflejados en esta tabla:**

GRUPO DE EDAD	HOMBRES	MUJERES
0-9	10,36 %	9,20 %
10-19	10,11 %	8,95 %
20-29	8,95 %	8,12 %
30-39	7,79 %	7,29 %
40-49	6,13 %	5,97 %
50-59	4,22 %	4,23 %
60-69	2,65 %	2,65 %
70-79	1,24 %	1,33 %
80-89	0,33 %	0,41 %
90-99	0,01 %	0,02 %

a) Fijándote en el aspecto de la pirámide, clasifícala con el mismo criterio que se hizo en el ejercicio 4.

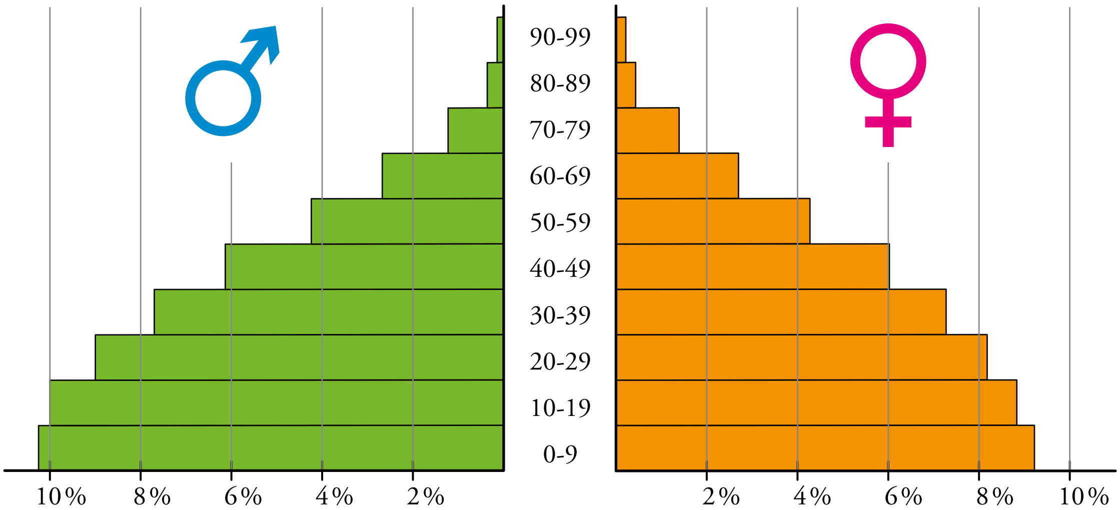
b) Construye otra pirámide de la misma población pero distribuyéndola en estos cuatro grupos:

— NIÑOS Y NIÑAS: de 0 a 9 años

— JÓVENES: de 10 a 24 años

— PERSONAS ADULTAS: de 25 a 59 años

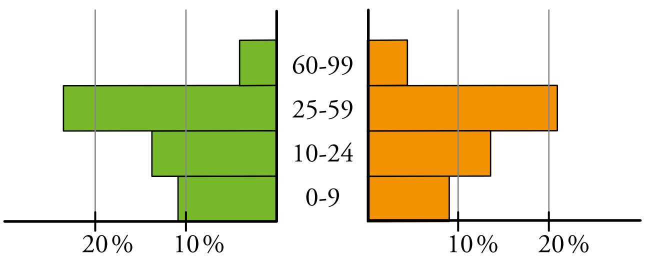
— MAYORES: de 60 en adelante



a) País del tercer mundo.

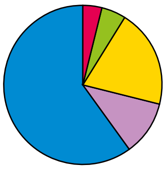
b)

GRUPO	HOMBRES	MUJERES
Niños y niñas	10,36 %	9,20 %
Jóvenes	14,56 %	13,01 %
Personas adultas	22,62 %	21,55 %
Mayores	4,23 %	4,41 %

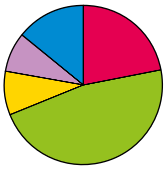


Página 275

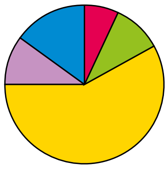
13 **Estas gráficas corresponden a un estudio sobre gustos musicales, realizado a cuatro muestras de población tomadas en distintos ambientes:**



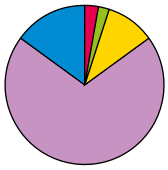
MUESTRA: A la salida de una discoteca.



MUESTRA: En la puerta del conservatorio musical.



MUESTRA: En una fiesta en la casa de Colombia.



MUESTRA: En un concurso de grafiteros.

a) Indica, entre estos cinco, el tipo de música que representa cada color: Pop-Rock, Clásica, Jazz, Reguetón, Rap.

b) Estima a ojo el porcentaje de cada tipo de música en cada una de las muestras.

a) Azul → Pop-Rock. Verde → Clásica. Amarillo → Reguetón.
Morado → Rap. Rojo → Jazz (por eliminación).

b) • A la salida de una discoteca:

— Jazz: 5 % — Clásica: 5 % —Reguetón: 25 %

— Rap: 10 % — Pop-Rock: 55 %

• En la puerta del conservatorio:

— Jazz: 20 % — Clásica: 45 % —Reguetón: 11 %

— Rap: 9 % — Pop-Rock: 15 %

• En una fiesta en la casa de Colombia:

— Jazz: 7 % — Clásica: 10 % —Reguetón: 58 %

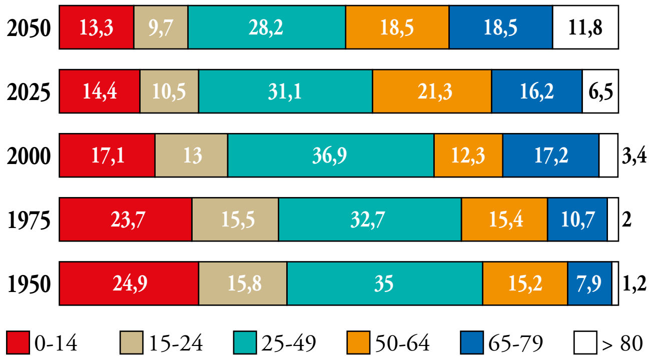
— Rap: 10 % — Pop-Rock: 15 %

• En un concurso de grafiteros:

— Jazz: 2 % — Clásica: 2 % —Reguetón: 10 %

— Rap: 70 % — Pop-Rock: 16 %

14 **El siguiente gráfico describe la evolución estimada de los grupos de población por edades (en porcentaje) en la UE para el periodo 1950-2050:**



a) ¿Qué grupo disminuirá más su porcentaje? ¿Cuál aumentará más?

b) Si se estima que habrá 1 000 millones de habitantes en 2050, ¿cuántos corresponden a cada grupo?

c) Sabiendo que en el año 2000 había unas 125 200 000 personas mayores de 50 años, ¿qué población tenía la UE dicho año?

d) De 2000 a 2050, ¿en qué porcentaje se estima que disminuirán los menores de 14 años? ¿En qué porcentaje se estima que aumentarán los mayores de 80 años?

e) Describe la evolución de cada grupo.

a) Disminuirá más su porcentaje el grupo de edades entre 0 y 14. Hay dos grupos que serán los que más aumenten, el de 65 a 79 años y el de mayores de 80 años.

b) 0 - 14 $\to$ 133 000 000 | 15 - 24 $\to$ 97 000 000

25 - 49 $\to$ 282 000 000 | 50 - 64 $\to$ 185 000 000

65 - 79 $\to$ 185 000 000 | > 80 $\to$ 118 000 000

c) Los mayores de 50 años, en el 2000, corresponden a un 32,9 % (12,3 + 17,2 + 3,4). Por tanto:

$$100 \leftrightarrow 32{,}9$$

$$125\,200\,000 \leftrightarrow x$$

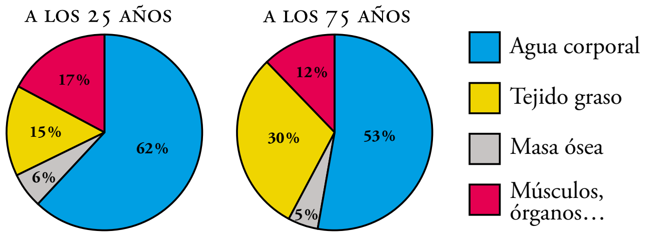
Despejando x de esta regla de tres, obtenemos que la población de toda la UE será de 4 119 080 personas.

d) Los menores de 14 años disminuirán en un 24,9 – 17,1 = 78 %.

Los mayores de 80 años aumentarán en un 3,4 – 1,2 = 2,2 %

e) Los grupos que van de 0 a 14 años y de 15 a 24 años disminuyen de forma más o menos gradual. El grupo que está entre 25 y 49 años va disminuyendo, aunque sufrió un repunte en 2000. Por el contrario, el que va de 50 a 64 años va aumentando, aunque se estima un descenso en 2025. La tónica general de los grupos que van de 65 a 80 años y el de los mayores de 80 es al alza, aunque el primero sufrió un pequeño descenso entre los años 1975 y 2000.

15 **Estos diagramas muestran la composición del cuerpo humano a dos edades distintas:**



a) ¿Cómo varía el porcentaje de agua corporal, de masa ósea, de tejido graso y de músculos, órganos… en esos 50 años? Da el resultado en tanto por ciento de aumento o disminución.

b) Una persona de 25 años que pesa 80 kg, ¿qué cantidad de agua tiene en su organismo? ¿Y de tejido graso?

c) Responde a las preguntas del apartado anterior para una persona de 75 años con el mismo peso.

a) El agua corporal disminuye del 62 % al 53 %.

Coeficiente de variación: $\frac{53}{62} = 0{,}855 \rightarrow$ ha disminuido un 14,5 %

El tejido graso aumenta del 15 % al 30 %.

Coeficiente de variación: $\frac{30}{15} = 2 \rightarrow$ ha aumentado un 100 %

La masa ósea disminuye del 6 % al 5 %.

Coeficiente de variación: $\frac{5}{6} = 0{,}833 \rightarrow$ ha disminuido un 16,7 %

Los músculos, órganos… disminuye del 17 % al 12 %.

Coeficiente de variación: $\frac{12}{17} = 0{,}706 \rightarrow$ ha disminuido un 29,4 %

b) Cantidad de agua: 62 % de 80 = $\frac{62 \cdot 80}{100} = 49{,}6$ kg = 49,6 *l* de agua

Cantidad de tejido graso: 15 % de 80 = $\frac{15 \cdot 80}{100} = 12$ kg de tejido graso

c) Cantidad de agua: 53 % de 80 = $\frac{53 \cdot 80}{100} = 42{,}4$ kg = 42,4 *l* de agua

Cantidad de tejido graso: 30 % de 80 = $\frac{30 \cdot 80}{100} = 24$ kg de tejido graso

16 **Reparto de la población española, según el tamaño del municipio en que vivía, desde 1900 hasta 2020. Para este último año se ha hecho una estimación:**

MUNICIPIOS	1900	1930	1960	1990	2020
Hasta 5 000 hab.	51 %	40 %	29 %	16 %	10 %
De 5 001 a 20 000	28 %	29 %	25 %	20 %	16 %
De 20 001 a 100 000	12 %	16 %	18 %	22 %	27 %
Más de 100 000	9 %	15 %	28 %	42 %	47 %

Número de habitantes de España, en millones, desde 1900 hasta la estimación hecha para el 2020:

1900	1930	1960	1990	2020
18,6	23,6	30,4	38,8	45,6

a) Calcula el número de personas que vivían en los municipios más pequeños desde 1900 hasta 2020. En estos municipios, la población ha ido decreciendo, pero ¿lo hace de forma constante o cada vez decrece menos? Determina cómo evoluciona cada una de las clasificaciones de municipios.

b) Calcula cuántos españoles vivían en los municipios más grandes desde 1900 y di cuál fue la evolución.

c) Haz los diagramas de sectores que muestren la distribución de la población en cada uno de los años que figuran en la tabla.

d) Estima a partir de qué año la mitad de la población vivía en municipios de más de 20 000 habitantes.

a) En municipios de hasta 5 000 habitantes vivían:

En 1900 $\rightarrow$ $18{,}6 \cdot 0{,}51 = 9{,}486$ millones de habitantes

En 1930 $\rightarrow$ $23{,}6 \cdot 0{,}40 = 9{,}44$ millones de habitantes

En 1960 $\rightarrow$ $30{,}4 \cdot 0{,}29 = 8{,}816$ millones de habitantes

En 1990 $\rightarrow$ $38{,}8 \cdot 0{,}16 = 6{,}208$ millones de habitantes

En 2020 $\rightarrow$ $45{,}6 \cdot 0{,}10 = 4{,}56$ millones de habitantes

La población en estos municipios ha ido decreciendo; primero, de forma regular, y bastante menos en el último periodo.

La población en los municipios de 5 001 a 20 000 habitantes crece un punto de 1900 a 1930 y después no deja de disminuir de forma constante.

La población en los municipios de 20 001 a 100 000 habitantes crece en todos los periodos, aunque algo menos de 1930 a 1960.

La población en los municipios de más de 100 000 habitantes siempre crece, aunque lo hace la mitad entre 1900 y 1930 y entre 1990 y 2020 que en los otros dos periodos.

b) En municipios de más de 100 000 habitantes vivían:

En 1900 $\rightarrow$ $18{,}6 \cdot 0{,}09 = 1{,}674$ millones de habitantes

En 1930 $\rightarrow$ $23{,}6 \cdot 0{,}15 = 3{,}54$ millones de habitantes

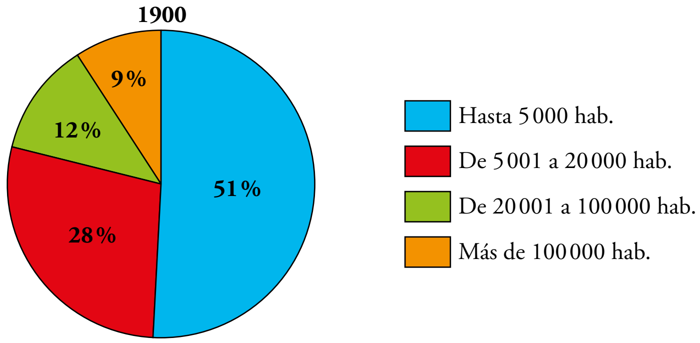
En 1960 $\rightarrow$ $30{,}4 \cdot 0{,}28 = 8{,}512$ millones de habitantes

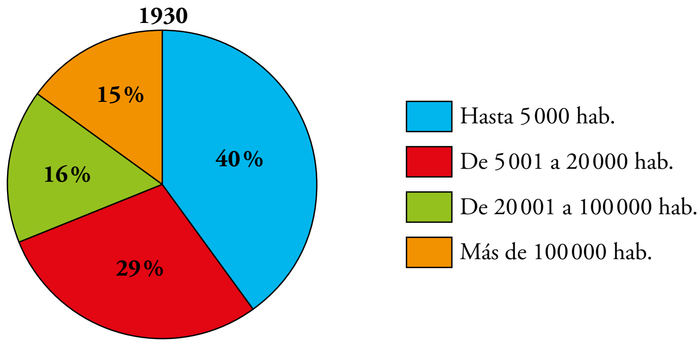
En 1990 $\rightarrow$ $38{,}8 \cdot 0{,}42 = 16{,}296$ millones de habitantes

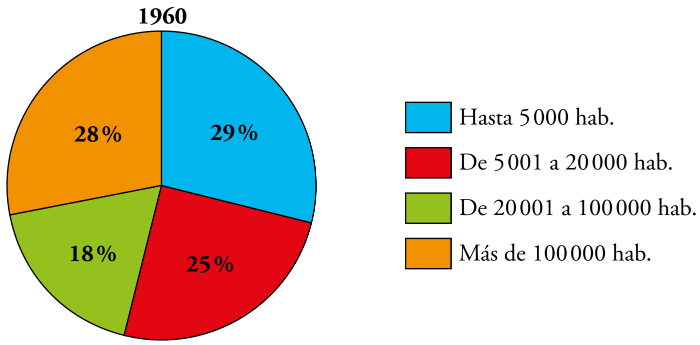
En 2020 $\rightarrow$ $45{,}6 \cdot 0{,}47 = 21{,}432$ millones de habitantes

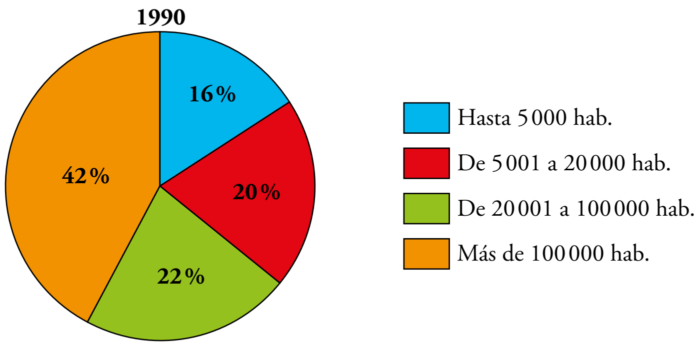
La población en los municipios de más de 100 000 habitantes siempre crece, aunque lo hace la mitad entre 1900 y 1930 y entre 1990 y 2020 que en los otros dos periodos.

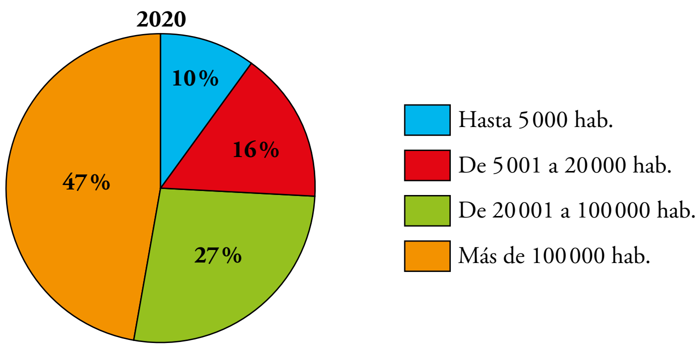
c)











d) La mitad de la población vivía en municipios de más de 20 000 habitantes desde 1990.

Página 276

Investiga

Organiza los datos

Un padre negociador hace un pacto con su hijo:

Después del próximo examen de Matemáticas, deberá sumar, por un lado, las notas de todos los compañeros y las compañeras que le hayan superado y, por otro, todas las que queden por debajo de la suya, y entonces:

— Si las bajas superan a las altas en 50 o más puntos, le regalará una moto.

— Si las altas superan a las bajas en 20 o más puntos, se quedará en casa estudiando todos los domingos durante un mes.

— En el resto de los casos, quedan en paz.

Las notas de sus compañeros y compañeras han sido:

5 - 5 - 4 - 9 - 8 - 6 - 3 - 6 - 3 - 7 - 4 - 5 - 6 - 6

7 - 7 - 4 - 7 - 5 - 2 - 6 - 5 - 5 - 8 - 3 - 9 - 10 - 5

- **¿Te parece un trato ventajoso para el chico?**
- **¿Qué ocurre si saca un 5? ¿Y si saca un 6? ¿Qué nota necesita para conseguir la moto?**

Para hacer un análisis detallado, organizamos los datos en la siguiente tabla:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	SUMA ASCENDENTE	SUMA DESCENDENTE
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
2	1	2	2	160
3	3	9	11	158
4	3	12	23	149
5	7	35	58	137
6	5	3	88	102
7	4	28	116	72
8	2	16	132	44
9	2	18	150	28
10	1	10	160	10

Con esta información vemos que:

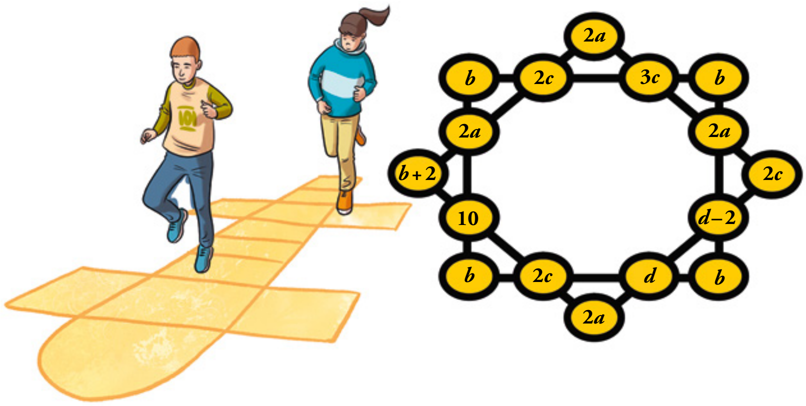
	SUMA DE NOTAS INFERIORES	SUMA DE NOTAS SUPERIORES	DIFERENCIA	RESULTADO PARA EL HIJO
Si saca un 5	23	102	–79	MALO
Si saca un 6	58	72	–14	NEUTRO
Si saca un 7	88	44	+ 44	NEUTRO
Si saca un 8	116	28	+88	BUENO

Por tanto:

- Para conseguir la moto, debe obtener, al menos, un 8.
- Para no quedarse en casa con los amigos, debe obtener, al menos, un 6.

Utiliza tu ingenio

- **Las ocho filas de cuatro números suman lo mismo.**



¿Cuál es el valor de *a*, *b*, *c* y *d*?

— Igualando los lados derecho e izquierdo del rectángulo:

$2b + 2a + 10 = 2b + 2a + d - 2 \;\rightarrow\; d = 12$

— Igualando los lados superior e inferior del rectángulo:

$2b + 5c = 2b + 2c + d \;\rightarrow\; c = 4$

— Igualando el lado inferior derecho del rombo y el izquierdo del rectángulo:

$2a + 2d - 2 + 2c = 2a + 2b + 10 \;\rightarrow\; b = 10$

— Del lado inferior del rectángulo obtenemos el valor de una línea:

Valor de línea $\rightarrow\; 2b + 2c + d = 40$

— Igualando el lado izquierdo del rectángulo a 40:

$2b + 2a + 10 = 40 \;\rightarrow\; a = 5$

Solución: $a = 5$, $b = 10$, $c = 4$, $d = 12$

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Una repartidora lleva en su camión siete cajas de refrescos llenas, siete medio llenas y siete vacías. Si desea repartir su mercancía en tres supermercados dejando en cada uno el mismo número de refrescos y el mismo número de cajas, ¿cómo debe hacer el reparto?**

  Supón que tiene mucha prisa y no quiere andar cambiando botellas de unas cajas a otras. ¿Cómo se las arreglará?

  Una caja llena más una caja vacía equivalen a dos cajas medio llenas.

  Por tanto, el repartidor tiene lo quivalente a $3 \cdot 7 = 21$ cajas medio llenas. En cada supermercado debería dejar lo equivalente a 7 cajas medio llenas.

  Si en cada uno de los dos primeros supermercados deja:

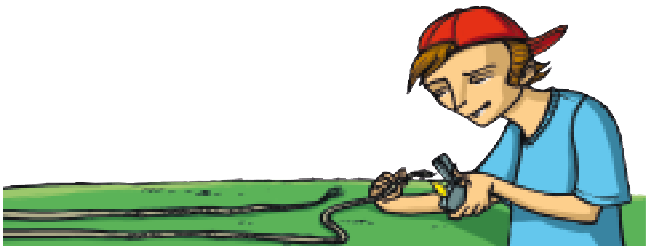
  3 cajas llenas | 3 cajas vacías | 1 caja medio llena

  que son como 7 medio llenas, lo que queda, seguro que sirve para el tercero:

  $7 - 6 = 1$ caja llena | $7 - 6 = 1$ caja vacía | $7 - 2 = 5$ cajas medio llenas

  que también equivalen a 7 cajas medio llenas.

- **Tienes dos mechas. Cada una de ellas tarda en consumirse 10 minutos. Pero la velocidad con que se consumen es irregular (es decir, en la mitad del tiempo no tiene por qué gastarse la mitad de la longitud de la mecha). ¿Serías capaz de medir con ellas un cuarto de hora? ¿Cómo?**



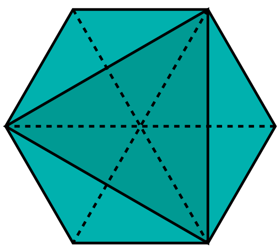
  Si una mecha se prende simultáneamente por los dos extremos, se consume en 5 minutos. Por tanto, podemos prender una de las mechas por un único extremo y se consumirá en 10 minutos, y cuando esta acabe prenderemos la otra por los dos extremos simultáneamente y cuando se consuma por completo habrán pasado 5 minutos más, lo que hace el total de 15 minutos que buscábamos.

- **Tres de los vértices de un hexágono regular coinciden con los vértices de un triángulo equilátero de 20 cm² de superficie. ¿Cuál es la superficie del hexágono?**

  El área del triángulo es la mitad de l área del hexágono.

  Por tanto:

  Área del hexágono $= 20 \cdot 2 = 40$ cm^2



AUTOEVALUACIÓN

1 **Indica, para cada caso, cuáles son los *individuos,* cuál la *población,* cuál la *variable* y de qué tipo es:**

a) Número de veces al año que ha usado su tarjeta sanitaria cada paciente de una sociedad médica.

b) Tiempo de espera de cada paciente en una consulta de un centro de salud a lo largo de un día.

c) Tipo de especialista al que acude cada paciente de un centro de salud durante un mes.

a) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes.

Variable: número de veces al año que han pasado su tarjeta.

Tipo de variable: cuantitativa discreta.

b) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes de la consulta.

Variable: tiempo de espera en la consulta.

Tipo de variable: cuantitativa continua.

c) Individuo: cada paciente.

Población: todos los pacientes de un centro de salud.

Variable: tipo de especialista.

Tipo de variable: cualitativa.

2 **Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:**

28	**4**	**12**	**35**	**2**	**26**	**45**	**22**	**6**	**23**
27	**16**	**18**	**32**	**8**	**47**	**8**	**12**	**34**	**15**
28	**37**	**7**	**39**	**15**	**25**	**18**	**17**	**27**	**15**

a) Haz una tabla, repartiéndolos en intervalos de extremos 1,5 - 9,5 - 17,5 - 25,5 - 33,5 - 41,5 - 49,5.

b) Represente los resultados mediante un gráfico adecuado (diagrama de barras o histograma).

c) Elabora una tabla con su correspondiente diagrama de sectores a partir de esta clasificación:

***Espera poco*: 1-15 min.**

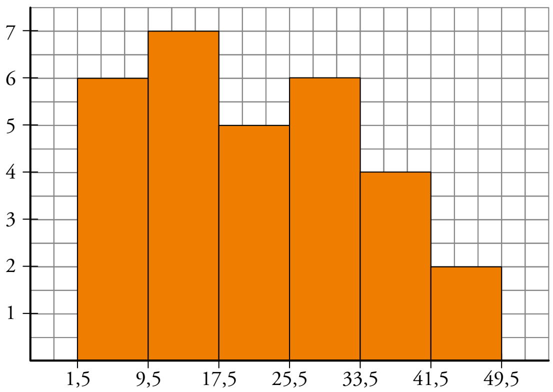
***Espera un rato*: 16-30 min.**

***Espera mucho*: 31-50 min.**

a)

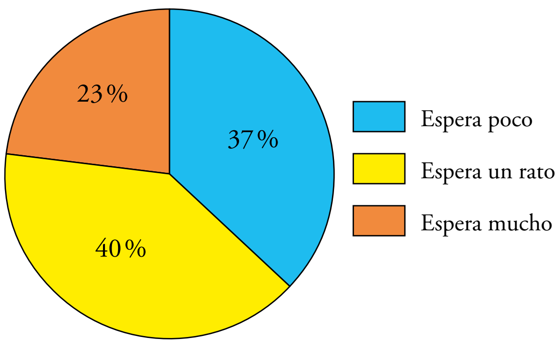
INTERVALO	FRECUENCIA
1,5 - 9,5	6
9,5 - 17,5	7
17,5 - 25,5	5
25,5 - 33,5	6
33,5 - 41,5	4
41,5 - 49,5	2

b)



c)

INTERVALO	FRECUENCIA	f_r	
Espera poco	11	0,37	→ 133,2°
Espera un rato	12	0,40	→ 144°
Espera mucho	7	0,23	→ 82,8°



$0,37 \cdot 360° = 133,2°$; $0,4 \cdot 360° = 144°$

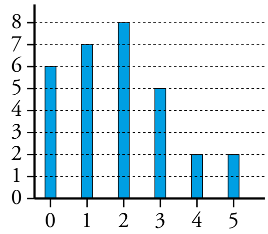
$0,23 \cdot 360° = 82,8°$

3 **Número de días que han ido a la biblioteca del colegio los estudiantes de un curso:**

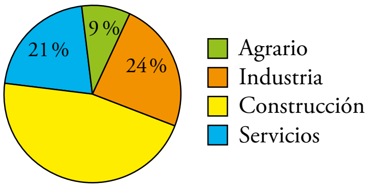
3	**1**	**2**	**4**	**0**	**2**	**1**	**3**	**1**	**0**	**2**	**0**	**3**	**5**	**2**
0	**2**	**4**	**1**	**2**	**1**	**2**	**0**	**5**	**3**	**3**	**1**	**2**	**1**	**0**

Haz una tabla de frecuencias y representa los resultados mediante un gráfico adecuado.

x_i	0	1	2	3	4	5	
f_i	6	7	8	5	2	2	30



4 **En una determinada región se ha hecho un estudio sobre los accidentes mortales producidos en el trabajo según el sector de actividad. Estos son los resultados:**



a) ¿Cuál es el porcentaje de accidentes mortales producidos en el sector de la construcción?

b) Si hubo 135 accidentes mortales en el sector agrario, ¿cuál fue el número total de accidentes mortales en la región?

c) ¿Cuántos accidentes mortales hubo en cada uno de los sectores?

a) $100 - 9 - 24 - 21 = 46$.

Accidentes mortales producidos en la construcción: 46 %

b) $\left.\begin{array}{l} 135 \ \rightarrow \ \ 9\% \\ x \ \rightarrow \ 100\% \end{array}\right\} \ x = \dfrac{135 \cdot 100}{9} = 1500$

Hubo 1 500 accidentes mortales en la región.

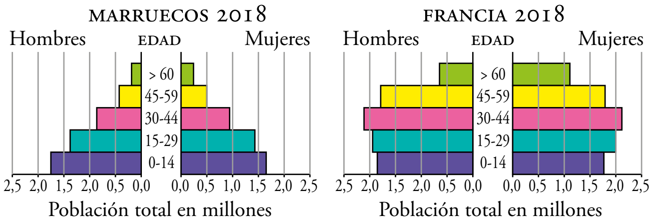
c) Agrario $\rightarrow$ 135

Industria $\rightarrow$ $0{,}24 \cdot 1\,500 = 360$

Construcción $\rightarrow$ $0{,}46 \cdot 1\,500 = 690$

Servicios $\rightarrow$ $0{,}21 \cdot 1\,500 = 315$

5 **Observa estas pirámides de población:**



Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando las respuestas:

a) La proporción de ancianas y ancianos en Francia es mucho mayor que en Marruecos.

b) Hay más ancianas que ancianos en ambos países.

c) La proporción de menores de 15 años es mayor en Marruecos que en Francia.

a) Verdadero. Se observa que el número de nacimientos es muy similar en ambos países y sin embargo el de personas mayores de 60 (barras verdes) es mucho mayor en Francia.

b) Verdadero. Las barras verdes de la derecha de cada pirámide, correspondientes a las mujeres, son más largas que las de la izquierda, hombres.

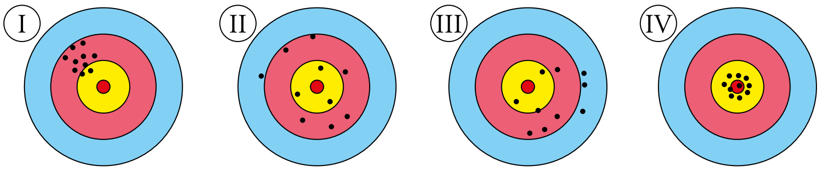
c) Falso. Las barras moradas de ambos países son aproximadamente iguales.

14 PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Página 279

Resuelve

1 **En un concurso de tiro al blanco, seleccionamos cuatro tandas de diez disparos correspondientes a cuatro tiradores. Observa:**



Los cuatro tiradores tienen las siguientes características:

— Ana es una buena tiradora y tiene una buena escopeta.

— Benito es buen tirador y tiene una escopeta con la mira desviada.

— Carla es una mala tiradora y tiene una buena escopeta.

— Daniel es un mal tirador y tiene una escopeta con la mira desviada.

Imaginamos que los tiradores apuntan siempre al centro de la diana.

Responde:

a) ¿Cuál es la diana de cada uno de los cuatro tiradores?

b) Los buenos tiradores, ¿tienen resultados más o menos dispersos que los malos?

c) ¿Dónde habrían dado, aproximadamente, los disparos de Benito y Carla si hubieran intercambiado sus escopetas?

a) La diana I es la de Benito, la II es la de Carla, la III es Daniel y la IV de Ana.

b) Los buenos tiradores tienen resultados menos dispersos que los malos.

c) Los de Benito habrían dado en el centro y los de Carla se hubiesen desplazado hacia la izquierda y hacia arriba.

1 DOS TIPOS DE PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Página 280

1 Calcula la media, la mediana y la moda de cada una de estas distribuciones estadísticas:

a) 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 11, 12, 17

b) 10, 12, 6, 9, 10, 8, 9, 10, 14, 2

c) 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 3, 7

d) 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1

a) $\bar{x} = \dfrac{4+5+6+6+6+6+7+11+12+17}{10} = \dfrac{80}{10} = 8$

$Me = \dfrac{6+6}{2} = 6$ $\qquad Mo = 6$

b) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 6, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 12, 14

$\bar{x} = \dfrac{2+6+8+9+9+10+10+10+12+14}{10} = \dfrac{90}{10} = 9$

$Me = \dfrac{9+10}{2} = 9,5$ $\qquad Mo = 10$

c) Ordenamos los datos de menor a mayor: 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 7

$\bar{x} = \dfrac{2+3+3+3+3+4+5+6+6+6+6+7}{12} = \dfrac{54}{12} = 4,5$

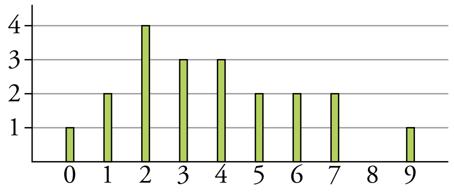
$Me = \dfrac{4+5}{2} = 4,5$ $\qquad Mo = 3 \text{ y } 6$

d) Ordenamos los datos de menor a mayor: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

$\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+4+3+2+1}{9} = \dfrac{25}{9} \approx 2,78$

$Me = 3$ $\qquad Mo = 1, 2, 3 \text{ y } 4$

2 Halla los parámetros de centralización de esta distribución dada por su diagrama de barras:



$\bar{x} = \dfrac{0+2\cdot1+4\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+2\cdot5+2\cdot6+2\cdot7+9}{20} = \dfrac{76}{20} = 3,8$

Son 20 valores así que la mediana estará entre los que ocupen las posiciones 10 y 11.

$Me = \dfrac{3+4}{2} = 3,5$

$Mo = 2$

Página 281

3 **Halla los parámetros de dispersión de las distribuciones del ejercicio 1 de la página anterior.**

a) Recorrido o rango = 17 – 4 = 13

$$DM = \frac{|4-8|+|5-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|6-8|+|7-8|+|11-8|+|12-8|+|17-8|}{10} =$$

$$= \frac{4+3+2+2+2+2+1+3+4+9}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2+11^2+12^2+17^2}{10} - 8^2 =$$

$$= \frac{16+25+36+36+36+36+49+121+144+289}{10} - 64 = 78,8 - 64 = 14,8$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{14,8} = 3,85$$

b) Recorrido o rango = 14 – 2 = 12

$$DM = \frac{|2-9|+|6-9|+|8-9|+|9-9|+|9-9|+|10-9|+|10-9|+|10-9|}{10} +$$

$$+ \frac{|12-9|+|14-9|}{10} = \frac{7+3+1+0+0+1+1+1+3+5}{10} = \frac{22}{10} = 2,2$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+6^2+8^2+9^2+9^2+10^2+10^2+10^2+12^2+14^2}{10} - 9^2 =$$

$$= \frac{4+36+64+81+81+100+100+100+144+196}{10} - 81 = 90,6 - 81 = 9,6$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{9,6} = 3,1$$

c) Recorrido o rango = 7 –2 = 5

$$DM = \frac{|2-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|3-4,5|+|4-4,5|+|5-4,5|}{12} +$$

$$+ \frac{|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|6-4,5|+|7-4,5|}{12} =$$

$$= \frac{2,5+1,5+1,5+1,5+1,5+0,5+0,5+1,5+1,5+1,5+1,5+2,5}{12} = \frac{18}{12} = 1,5$$

$$\text{Varianza} = \frac{2^2+3^2+3^2+3^2+3^2+4^2+5^2+6^2+6^2+6^2+6^2+7^2}{12} - 4,5^2 =$$

$$= \frac{4+9+9+9+9+16+25+36+36+36+36+49}{12} - 20,25 = 22,83 - 20,25 = 2,58$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{2,58} = 1,61$$

d) Recorrido o rango = 5 – 1 = 4

$$DM = \frac{\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|1-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|2-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|+\left|3-\frac{25}{9}\right|}{9} +$$

$$+ \frac{\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|4-\frac{25}{9}\right|+\left|5-\frac{25}{9}\right|}{9} = \frac{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{11}{9}+\frac{11}{9}+\frac{20}{9}}{9} = \frac{92}{81} \approx 1,14$$

$$\text{Varianza} = \frac{1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+4^2+4^2+5^2}{9} - \left(\frac{25}{9}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+1+4+4+9+9+16+16+25}{9} - \frac{625}{81} = \frac{85}{9} - \frac{625}{81} = 1,73$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{1,73} = 1,31$$

4 **Halla de dos formas distintas la varianza de esta distribución: 8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15.**

7, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 15

$$\bar{x} = \frac{7+7+8+9+11+13+15+15}{8} = \frac{85}{8} = 10,625$$

Forma 1

Promedio de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:

$$\text{Varianza} = \frac{(7-10,625)^2+(7-10,625)^2+(8-10,625)^2+(9-10,625)^2+(11-10,625)^2}{8} +$$

$$+ \frac{(13-10,625)^2+(15-10,625)^2+(15-10,625)^2}{8} =$$

$$= \frac{3,625^2+3,625^2+2,625^2+1,625^2+0,375^2+2,375^2+4,375^2+4,375^2}{8} = 9,984$$

Forma 2

Promedio de los cuadrados menos el cuadrado de la media:

$$\text{Varianza} = \frac{7^2+7^2+8^2+9^2+11^2+13^2+15^2+15^2}{8} - 10,625^2 =$$

$$= \frac{49+49+64+81+121+169+225+225}{8} - 112,89 = 122,875 - 112,891 = 9,984$$

2 ▶ CÁLCULO DE $\bar{x}$ Y σ EN TABLAS DE FRECUENCIAS

Página 282

1 **Calcula la media de las siguientes distribuciones:**

a) NÚMERO DE HIJOS E HIJAS

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1

b) NÚMERO DE SUSPENSOS EN ESTA EVALUACIÓN

x_i	0	1	2	3	4
f_i	17	11	3	1	1

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	
f_i	6	14	15	7	4	2	1	1	50
$x_i \cdot f_i$	0	14	30	21	16	10	6	7	104

$$\bar{x} = \frac{104}{50} = 2,08$$

b)

x_i	0	1	2	3	4	
f_i	17	11	3	1	1	33
$x_i \cdot f_i$	0	11	6	3	4	24

$$\bar{x} = \frac{24}{33} \approx 0,727$$

Página 283

2 **Halla la media y la desviación típica de esta distribución:**

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL			

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1	12	12	12
2	15	30	60
3	24	72	216
4	19	76	304
5	10	50	250
TOTAL	80	240	842

$\bar{x} = \dfrac{240}{80} = 3$ $\sigma = \sqrt{\dfrac{842}{80} - 3^2} \approx 1,235$

3 **Completa en tu cuaderno la tabla con las marcas de clase, y calcula la media y la desviación típica.**

PESOS	PERSONAS
50 a 58	6
58 a 66	12
66 a 74	21
74 a 82	16
82 a 90	5

➡

x_i	f_i
54	6
	12
	21
	16
	5

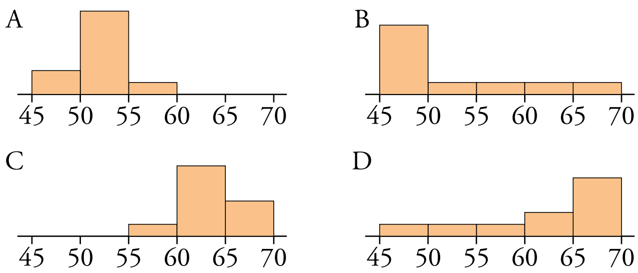
x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54	6	324	17 496
62	12	744	46 128
70	21	1 470	102 900
78	16	1 248	97 344
86	5	430	36 980
TOTAL	60	4 216	300 848

$\bar{x} = \dfrac{4\,216}{60} = 70,267$ $\sigma = \sqrt{\dfrac{300\,848}{30} - 70,267^2} \approx 8,76$

3 ▶ INTERPRETACIÓN CONJUNTA DE $\bar{x}$ Y σ

Página 284

1 **Las siguientes gráficas muestran los porcentajes de encestes de los jugadores de cuatro equipos. A partir de los datos de la tabla de la derecha, indica la media y la desviación típica correspondiente a cada equipo.**



EQUIPO	$\bar{x}$	σ
I	52,5	7,1
II	62	6,9
III	63,5	3
IV	52	2,7

A → Equipo IV

B → Equipo I

C → Equipo III

D → Equipo II

Página 285

2 **En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:**

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943 €	132 €	37 €
DESV. TÍPICA	148 €	22 €	12 €

Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.

	PIANOS	FLAUTAS	ARMÓNICAS
MEDIA	943	132	37
DESV. TÍPICA	148	22	12
CV	0,157	0,167	0,324

$CV_{\text{PIANO}} = \frac{148}{943} = 0,157 \;\rightarrow\; 15{,}7\,\%$

$CV_{\text{FLAUTAS}} = \frac{22}{132} = 0,167 \;\rightarrow\; 16{,}7\,\%$

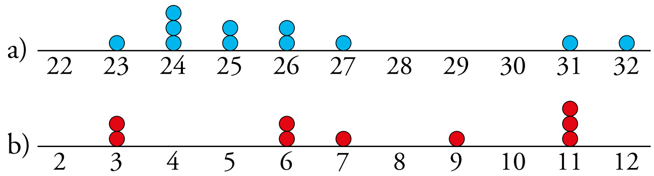
$CV_{\text{ARMÓNICAS}} = \frac{12}{37} = 0,324 \;\rightarrow\; 32{,}4\,\%$

Podemos apreciar que la variación en los pianos y las flautas es muy parecida. En cambio, la variación de las armónicas es mayor que las anteriores, de hecho, es aproximadamente el doble que en las flautas.

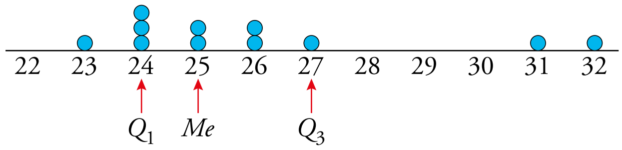
4 ▸ PARÁMETROS DE POSICIÓN: MEDIANA Y CUARTILES

Página 286

1 **Calcula Q_1, *Me* y Q_3 y sitúalos en cada una de las siguientes distribuciones representadas:**



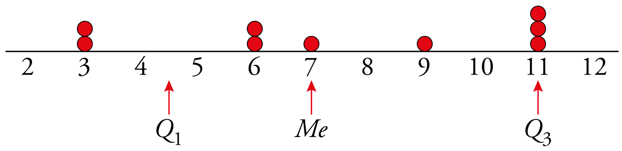
a)



$$23 \quad 24 \quad \overset{Q_1}{\boxed{24}} \quad 24 \quad 25 \quad \overset{Me}{\boxed{25}} \quad 26 \quad 26 \quad \overset{Q_3}{\boxed{27}} \quad 31 \quad 32$$

Los número marcados separan los datos en cuatro partes iguales.

b)



$$3 \quad 3 \quad \overset{Q_1:\ \boxed{\frac{3+6}{2}=4}}{|} \quad 6 \quad 6 \quad \overset{Me}{\boxed{7}} \quad 9 \quad 11 \quad \overset{Q_3:\ \boxed{\frac{11+11}{2}=11}}{|} \quad 11 \quad 11$$

2 **En cada una de las distribuciones siguientes:**

a) Calcula Q_1, Me y Q_3.

b) Representa los datos y sitúa en ellos Q_1, Me y Q_3.

A: 0, 0, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10

B: 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 14, 17, 29, 35

C: 12, 13, 19, 25, 63, 85, 123, 132, 147

a) Q_1 Me Q_3

A: 0 0 2 $\boxed{3}$ 4 4 4 $\boxed{4}$ 5 6 7 $\boxed{8}$ 9 9 10

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 15 : 4 = 3,75.

$Q_1 = 3$; $Me = 4$; $Q_3 = 8$

Me: $\boxed{\dfrac{4+7}{2} = 5,5}$

Q_1 Q_3

B: 0 1 1 $\boxed{2}$ 3 4 4 | 7 7 7 $\boxed{14}$ 17 29 35

Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta parte es 14 : 4 = 3,5

$Q_1 = 2$

$Me = \dfrac{4+7}{2} = 5,5$

$Q_3 = 14$

Q_1: $\boxed{\dfrac{13+19}{2} = 16}$ Q_3: $\boxed{\dfrac{123+132}{2} = 127,5}$

Me

C: 12 13 | 19 25 $\boxed{63}$ 85 123 | 132 147

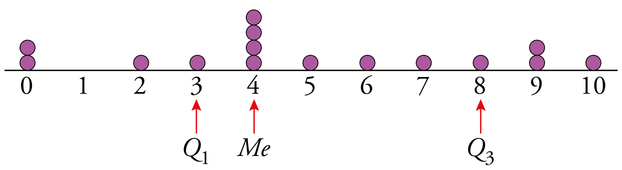
Como la distribución tiene 15 elementos, la cuarta es 9 : 4 = 2,25

$Q_1 = 16$

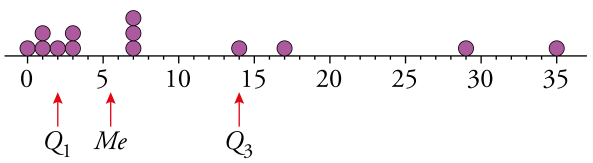
$Me = 63$

$Q_3 = 127,5$

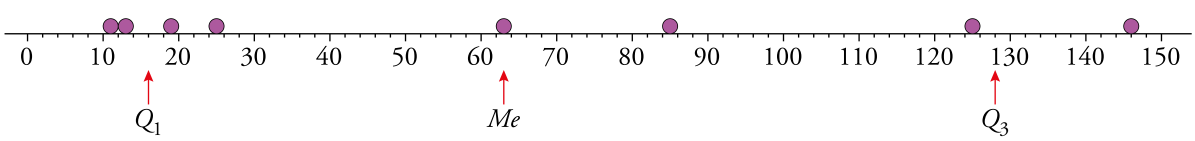
b) A



B



C

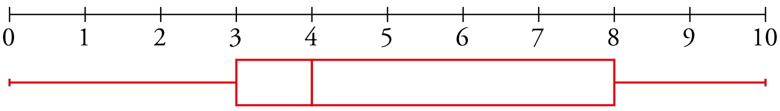


Página 287

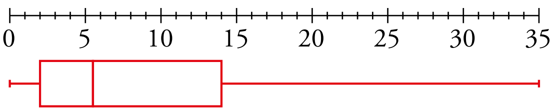
3 **Representa con un diagrama de caja y bigotes cada distribución de la actividad 2 de la página anterior.**

Utiliza los valores de Q_1, Me y Q_3 que hallaste en esa actividad.

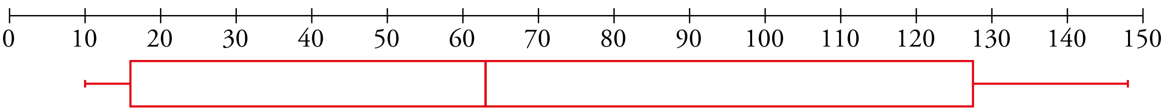
A. $Q_1 = 3$, $Me = 4$ y $Q_3 = 8$



B. $Q_1 = 2$, $Me = 5{,}5$ y $Q_3 = 14$



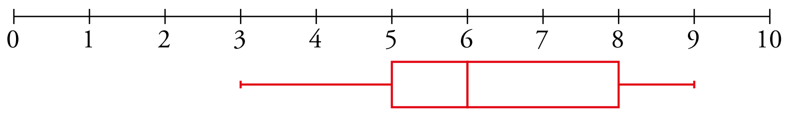
C. $Q_1 = 16$, $Me = 63$ y $Q_3 = 127{,}5$



4 **Representa mediante un diagrama de caja y bigotes los siguientes puntos conseguidos en la diana:**

7 6 6 8 5	**5 7 9 6 8**	**4 7 5 8 6**
7 5 6 6 7	**5 6 6 5 8**	**6 7 5 9 3**

Los parámetros de posición son $\rightarrow$ $Q_1 = 5$, $Me = 6$ y $Q_3 = 8$



5 OBTENCIÓN DE $\bar{x}$ Y σ CON LA CALCULADORA

Página 288

1 **Halla $\bar{x}$ y σ con la calculadora en la distribución a) de la actividad 1 de la página 282.**

$n = 50$; $\Sigma x = 104$; $\Sigma x^2 = 336$; $\bar{x} = 2{,}08$; $\sigma_x = 1{,}547126$

2 **Halla con la calculadora $\bar{x}$ y σ en la distribución b) de la actividad 1 de la página 282.**

$n = 33$; $\Sigma x = 24$; $\Sigma x^2 = 48$; $\bar{x} = 0{,}\overset{\frown}{72}$; $\sigma_x = 0{,}9620914$

6 ESTADÍSTICA EN LOS MEDIOS

Página 289

1 **Interpreta los gráficos y las noticias que hemos visto en esta página.**

Respuesta abierta.

2 **Busca en Internet noticias en las que se haya recurrido a la estadística.**

Respuesta abierta.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 290

1 Obtención de parámetros estadísticos

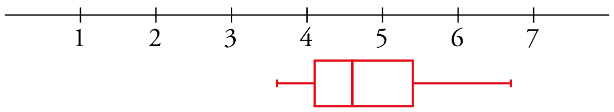
Hazlo tú

- **Construye el diagrama de caja y bigotes para el colectivo reducido (los 20 adultos sin niños) y compáralo con el del grupo inicial.**

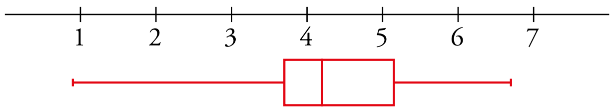
$\boxed{Q_1 = \frac{40+42}{2} = 41}$ $\boxed{Me = \frac{45+47}{2} = 46}$ $\boxed{Q_3 = \frac{53+55}{2} = 54}$

36 37 37 37 40 | 42 43 43 44 45 | 47 48 50 52 53 | 55 58 61 63 67

Sin los 5 miembros más jóvenes, el diagrama de caja y bigotes es el siguiente:



Con los 5 niños:



Haciendo una comparación de este diagrama y el del problema resuelto anterior podemos observar que las cajas son muy parecidas, lo que varía es la longitud del bigote izquierdo, ya que hemos suprimido las edades más jóvenes.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 291

Practica

Parámetros de centralización y dispersión

1 Calcula los parámetros media, mediana, moda, recorrido, varianza, desviación típica y coeficiente de variación en cada caso:

a) 6, 3, 4, 2, 5, 5, 6, 4, 5, 6, 8, 9, 6, 7, 7, 6, 4, 6, 10, 6

b) 11, 12, 12, 11, 10, 13, 14, 15, 14, 12

c) 165, 167, 172, 168, 164, 158, 160, 167, 159, 162

Calculamos la tabla de frecuencias para facilitar el cálculo:

a) 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 9, 7, 7, 10

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
2	1	2	4
3	1	3	9
4	3	12	48
5	3	15	75
6	7	42	252
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
TOTAL	20	115	731

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{115}{20} = 5{,}75 \qquad \text{Recorrido} = 8$$

$$Me = \frac{6+6}{2} = 6$$

$$Mo = 6$$

$$\text{Varianza} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{731}{20} - 5{,}75^2 = 3{,}49$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{731}{20} - 5{,}75^2} = 1{,}87$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1{,}87}{5{,}75} = 0{,}3248 \ \rightarrow\ 32{,}48\,\%$$

b) 10, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 15

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
10	1	10	100
11	2	22	242
12	3	36	432
13	1	13	169
14	2	28	392
15	1	15	225
TOTAL	10	124	1 560

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{124}{10} = 12{,}4 \qquad \text{Recorrido} = 5$$

$$Me = \frac{12+12}{2} = 12$$

$$Mo = 12$$

$$\text{Varianza} = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \frac{1\,560}{10} - 12{,}4^2 = 2{,}24$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1\,560}{10} - 12{,}4^2} = 1{,}50$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1{,}50}{12{,}4} = 0{,}1207 \ \rightarrow\ 12{,}07\,\%$$

c) 158, 159, 160, 162, 164, 165, 167, 167, 168, 172

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
158	1	158	24 964
159	1	159	25 281
160	1	160	25 600
162	1	162	26 244
164	1	164	26 896
165	1	165	27 225
167	2	334	55 778
168	1	168	28 224
172	1	172	29 584
TOTAL	10	1 642	269 796

$\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1\,642}{10} = 164,2$ Recorrido = 14

$Me = \dfrac{164 + 165}{2} = 164,5$

$Mo = 167$

$\text{Varianza} = \dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \dfrac{269\,796}{10} - 164,2^2 = 17,96$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{269\,796}{10} - 164,2^2} = 4,24$

$CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{4,24}{164,2} = 0,0258 \rightarrow 2,58\,\%$

2 **El número de calzado que llevan los alumnos y las alumnas de una clase son los siguientes:**

42, 40, 43, 45, 43 44, 38, 39, 40, 43

41, 42, 38, 36, 38 45, 38, 39, 42, 40

40, 39, 37, 36, 41 46, 44, 37, 42, 39

a) Haz una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos: 35,5 - 38,5 - 40,5 - 42,5 - 44,5 - 46,5.

b) Halla la media, la desviación típica y el CV.

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
35,5-38,5	37	8	296	10 952
38,5-40,5	39,5	8	316	12 482
40,5-42,5	41,5	6	249	10 333,5
42,5-44,5	43,5	5	217,5	9 461,25
44,5-46,5	45,5	3	136,5	6 210,75
	TOTALES	30	1 215	49 439,5

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{1215}{30} = 40,5$

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{49\,439,5}{30} - 40,5^2} = 2,78$

$CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{2,78}{40,5} = 0,0687 \rightarrow 6,87\,\%$

3 **Una fábrica ha contado el número de vasos que se le rompen en cada cajón de camino a la tienda. Estos son los resultados:**

N.º DE VASOS ROTOS	0	1	2	3	4	5	6
N.º DE CAJONES	51	23	11	8	4	2	1

a) Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

b) ¿Cuál es la moda?

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	51	0	0
1	23	23	23
2	11	22	44
3	8	24	72
4	4	16	64
5	2	10	50
6	1	6	36
TOTAL	100	101	289

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{101}{100} = 1,01$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{289}{100} - 1,01^2} = 1,37$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,37}{1,01} = 1,3539 \ \rightarrow \ 135,39\,\%$$

b) $Mo = 0$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

0 ⊗ 6 DATA → 0

1 ⊗ 14 DATA → 1

2 ⊗ 15 DATA → 2

3 ⊗ 7 DATA → 3

4 ⊗ 4 DATA → 4

5 ⊗ 2 DATA → 5

6 ⊗ 1 DATA → 6

Obtenemos los resultados:

n → 100

Σx → 101

Σx^2 → 289

$\bar{x}$ → 1.01

σ_n → 1.367443

4 **La siguiente tabla muestra los lanzamientos de jabalina que se han realizado en la clasificación para los juegos olímpicos:**

DISTANCIAS (m)	N.° DE LANZADORES
54 a 58	4
58 a 62	11
62 a 66	24
66 a 70	9
70 a 74	2

a) Haz una tabla con las marcas de clase y las frecuencias.

b) Calcula la media, la desviación típica y el coeficiente de variación.

c) Comprueba los resultados con la calculadora.

a) Tabla de frecuencias:

Intervalo	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
54-58	56	4	224	12 544
58-62	60	11	660	39 600
62-66	64	24	1 536	98 304
66-70	68	9	612	41 616
70-74	72	2	144	10 368
	TOTALES	50	3 176	202 432

b) $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{3\,176}{50} = 63{,}52$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{202\,432}{50} - 63{,}52^2} = 3{,}72$$

$$\text{CV} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3{,}72}{63{,}52} = 0{,}0586 \rightarrow 5{,}86\,\%$$

c) Introducimos los datos en la calculadora:

56 ⊗ 4 DATA → 56

60 ⊗ 14 DATA → 60

64 ⊗ 15 DATA → 64

68 ⊗ 7 DATA → 68

72 ⊗ 4 DATA → 72

Obtenemos los resultados:

n → 50

Σx → 3176

Σx^2 → 202432

$\bar{x}$ → 63.52

σ_n → 3.721505

Parámetros de posición y diagramas de caja

5 **Halla la mediana y los cuartiles de cada distribución y representa su correspondiente diagrama de caja y bigotes:**

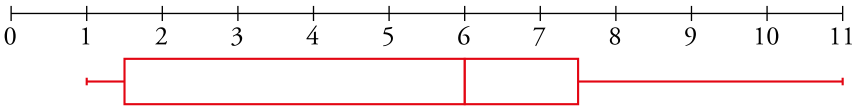
a) 1, 1, 1, 2, 2, 5, 6, 6, 6, 7, 8 10, 11

b) 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 12, 14, 19, 22

c) 123, 125, 134, 140, 151, 173, 178, 186, 192, 198

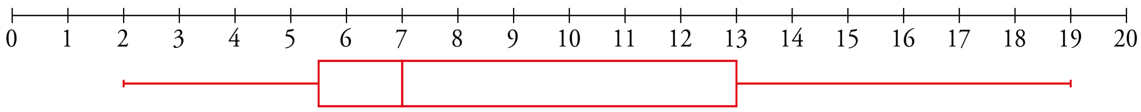
a) $\boxed{Q_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5}$ $\quad$ *Me* $\quad$ $\boxed{Q_2 = \frac{7+8}{2} = 7,5}$

1 1 1 2 2 5 $\boxed{6}$ 6 6 7 8 10 11



b) $\boxed{Q_1 = \frac{5+6}{2} = 5,5}$ $\quad$ $\boxed{Me = \frac{7+7}{2} = 7}$ $\quad$ $\boxed{Q_3 = \frac{12+14}{2} = 13}$

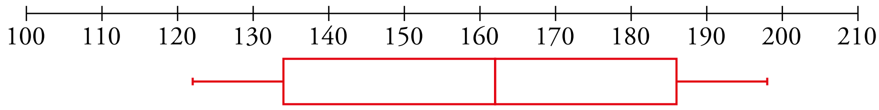
4 5 5 6 7 7 7 8 12 14 19 2



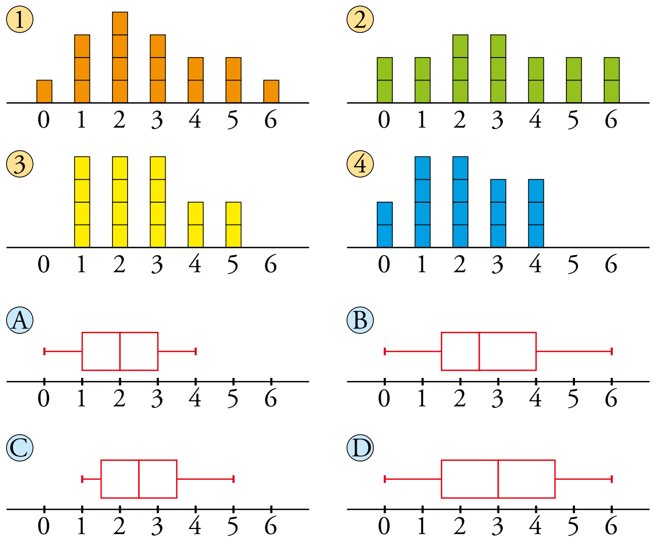
c) $\boxed{Me = \frac{151+173}{2} = 162}$

Q_1 $\quad$ Q_3

123 125 $\boxed{134}$ 140 151 173 178 $\boxed{186}$ 192 198



6 **Asocia cada gráfico de barras con su correspondiente diagrama de caja y bigotes:**



1 → B   2 → D   3 → C   4 → A

8 **Esta tabla muestra la distribución del número de asignaturas suspendidas en una evaluación por los estudiantes de una clase:**

N.° DE ASIG. SUSP.	0	1	2	3	4	5
N.° DE ESTUDIANTES	10	4	5	2	4	3

Representa esta distribución mediante un diagrama de caja y bigotes.

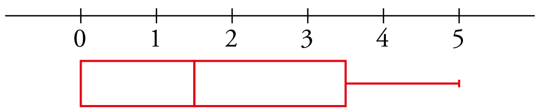
En total son 28 estudiantes preguntados.

La mediana estará entre el dato de la posición 14 y el 15, es decir, $Me = \dfrac{1+2}{2} = 1{,}5$

Quedarán 14 datos a la derecha y 14 datos a la izquierda de la mediana.

El primer cuartil estará entre los datos del puesto 7 y el puesto 8, es decir, $Q_1 = \dfrac{0+0}{2} = 0$

El tercer cuartil estará entre los datos del puesto 21 y el puesto 22, es decir, $Q_3 = \dfrac{3+4}{2} = 3{,}5$

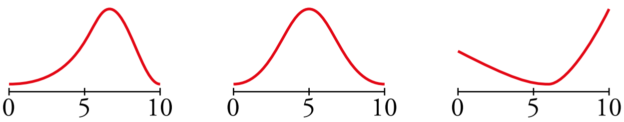


Página 292

Resuelve problemas

9 **Se ha hecho un mismo examen en dos grupos, A y B, de 30 alumnos y alumnas cada uno. Sus medias y sus desviaciones típicas son: $\bar{x}_A = 6$, $\sigma_A = 1$, $\bar{x}_B = 6$, $\sigma_B = 3$.**

a) Asigna una de estas gráficas a A y otra a B.

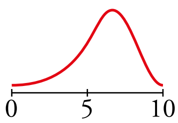


b) En una de las clases hay 11 suspensos y 4 sobresalientes, mientras que en la otra hay 5 suspensos y 1 sobresaliente. ¿Cuál es A y cuál es B?

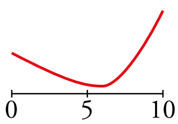
c) Si Laura necesita sacar sobresaliente y Miguel se conforma con aprobar, ¿qué clase te parece más adecuada para cada uno de ellos?

a) La segunda gráfica la descartamos porque la media sería 5.

$\bar{x}_A = 6$ y $\sigma_A = 1$ $\rightarrow$ 1ª gráfica



$\bar{x}_B = 6$ y $\sigma_B = 3$ $\rightarrow$ 3ª gráfica

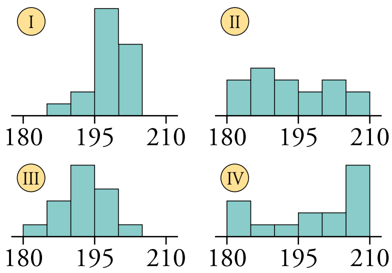


b) A corresponde con la clase de los 5 suspensos y el sobresaliente.

B corresponde con la clase de los 11 suspensos y los 4 sobresalientes.

c) La clase A será más adecuada para Laura, y la clase B, para Miguel.

10 **Estas cuatro gráficas corresponden a las estaturas de los jugadores de cuatro equipos de baloncesto, A, B, C y D, cuyos parámetros aparecen en la tabla. ¿Cuál es la gráfica de cada equipo?**



EQUIPO	$\bar{x}$	σ
A	198,5	9,7
B	198,1	3,9
C	193	4,6
D	193,4	8,1

Halla el CV de cada equipo y ordénalos de menos a más regulares.

Los equipos I y IV tienen medias superiores a 195, y los equipos II y III, inferiores.

Además, los jugadores de IV tienen estaturas más extremas que I. Lo mismo ocurre con III que tiene estaturas más extremas que II.

Así, podemos relacionar:

A → IV   B → I   C → III   D → II

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{9,7}{198,5} = 0,0489 \rightarrow 4,89\,\%$$

$$CV_B = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,9}{198,1} = 0,0197 \rightarrow 1,97\,\%$$

$$CV_C = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4,6}{193} = 0,0238 \rightarrow 2,38\,\%$$

$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{8,1}{193,4} = 0,0419 \rightarrow 4,19\,\%$$

Los ordenamos de menos a más regulares:

A < D < C < B

11 **Elena, una jugadora de baloncesto, tiene una media de 17 puntos por partido y una desviación típica de 9. Su compañera, Marta, tiene una media de 20 puntos y una desviación típica de 3 puntos.**

Para el próximo partido, el entrenador necesita una jugadora que intente conseguir 30 o más puntos. ¿A cuál de las dos debe seleccionar? ¿Por qué?

El entrenador necesita que la jugadora elegida haga 30 puntos.

Elena tiene $\bar{x} = 17$ y $\sigma = 9$ y pasa de los 30 puntos con 1,5 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 1,5\sigma = 17 + 1,5 \cdot 9 = 30,5$.

Marta tiene $\bar{x} = 20$ y $\sigma = 3$ y para tener al menos 30 puntos, necesita más de 3 desviaciones típicas. Es decir, $\bar{x} + 3\sigma = 20 + 3 \cdot 3 = 29$.

Por tanto, el entrenador debe seleccionar a Elena.

12 **Lidia y Marcos juegan varias veces a acertar, en un minuto, el máximo número de palabras dada su definición. Estos son los resultados:**

LIDIA	14	8	15	9	7	13	12	15
MARCOS	11	9	10	10	12	11	6	9

a) Halla la media y la desviación típica de cada uno.

b) Calcula sus CV y di quién es más regular.

a) Lidia:

$$\bar{x} = \frac{14+8+15+9+7+13+12+15}{8} \approx 11{,}63$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{14^2+8^2+15^2+9^2+7^2+13^2+12^2+15^2}{8} - 11{,}63^2} \approx 2{,}98$$

Marcos:

$$\bar{x} = \frac{11+9+10+10+12+11+6+9}{8} = 9{,}75$$

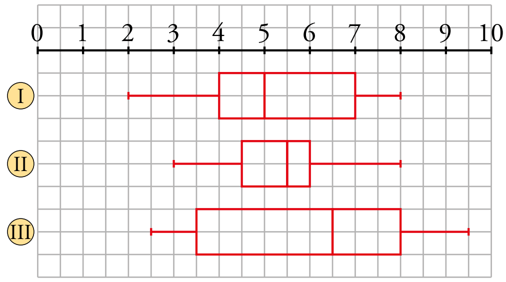
$$\sigma = \sqrt{\frac{11^2+9^2+10^2+10^2+12^2+11^2+6^2+9^2}{8} - 9{,}75^2} \approx 2{,}94$$

b) Lidia: $CV = \dfrac{2{,}98}{11{,}63} = 0{,}26 \rightarrow 26\,\%$

Marcos: $CV = \dfrac{2{,}94}{9{,}75} = 0{,}30 \rightarrow 30\,\%$

Lidia es un poco más regular.

13 **a) Compara estas distribuciones de notas obtenidas por tres grupos de alumnas y alumnos indicando cuáles son la mediana y los cuartiles en cada una:**



b) En la evaluación se hicieron estos comentarios:

I. Aprobó el 50 % de la clase.

II. Las notas son muy parecidas.

III. Un cuarto de la clase tiene notas superiores a 7.

IV. Es la mejor clase, pero con la mayor dispersión.

Indica a qué grupo corresponde cada comentario.

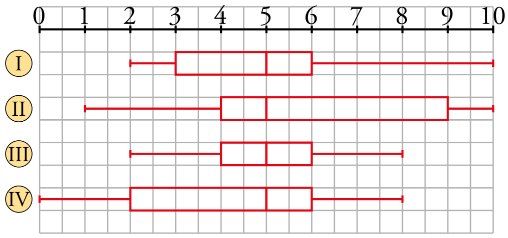
a) I. $Q_1 = 4$ $Me = 5$ $Q_3 = 7$

II. $Q_1 = 4{,}5$ $Me = 5{,}5$ $Q_3 = 6$

III. $Q_1 = 3{,}5$ $Me = 6{,}5$ $Q_3 = 8$

b) I. Grupo I II. Grupo II III. Grupo I IV. Grupo III

14 **Estos son los diagramas de caja de las notas en matemáticas de cuatro clases de 20 estudiantes:**



a) Di, en cada una de ellas, los valores menor y mayor así como Q_1, Me y Q_3.

b) Los parámetros son, no respectivamente:

	A	B	C	D
$\bar{x}$	4	6	5	5
σ	2,3	3,1	2,5	1,3

Asocia los parámetros con su clase.

c) Las 20 notas de la clase I son:

2 2 2 2 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 7 8 8 10 10

Comprueba que responden a su diagrama de caja.

Inventa tú 20 valores que respondan a cada uno de los diagramas II, III y IV.

d) Calcula $\bar{x}$ y σ en las distribuciones que has inventado en el apartado anterior y compáralos con los que se dan en la tabla del apartado b).

e) Halla el coeficiente de variación de cada distribución del apartado b) y determina cuál es más regular.

a) I. $Mín = 2$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ $Máx = 10$

II. $Mín = 1$ $Me = 5$ $Q_3 = 9$ $Máx = 10$

III. $Mín = 2$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ $Máx = 8$

IV. $Mín = 0$ $Me = 5$ $Q_3 = 6$ $Máx = 8$

b) A tiene la media más baja: A → IV

B tiene la media más alta: B → II

C parece centrada en 5 con dispersión alta: C → I

D tiene dispersión baja y la media y la mediana coinciden: D → III

c) Para que los datos respondan al diagrama I habría que cambiar el 7 por un 6.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

II → 1 2 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 7 8 9 9 9 9 10 10

III → 2 2 2 3 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 8 8

IV → 0 1 1 2 2 2 3 4 4 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 8

d) Respuesta abierta.

e) Respuesta abierta.

Página 293

15 **Rafa es vendedor ambulante seis días a la semana. Ayer, viernes, calculó que durante esta semana había conseguido una ganancia media de 48 € diarios. Al hacer la misma cuenta hoy, sábado, resulta una media de 60 € diarios.**

¿Cuánto ha ganado hoy?

La media que calculó el viernes fue: $\bar{x} = 48 = \dfrac{\sum x_i}{5} \rightarrow \sum x_i = 240$.

La media de hoy, sábado, es: $\bar{x} = 60 = \dfrac{\sum x_i}{6} \rightarrow \sum x_i = 360$.

Por lo tanto, Rafa ha ganado hoy 360 – 240 = 120 €.

16 **Para hallar la nota de una asignatura, el segundo examen vale el doble que el primero, y el tercero, el triple que el primero.**

a) ¿Cuál es la nota final de una alumna que sacó un 5, un 6 y un 4?

b) ¿Y si esas notas son el 10 %, el 40 % y el 50 %?

a) $\dfrac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{1 + 2 + 3} = \dfrac{29}{6} = 4,8\widehat{3}$

b) $\dfrac{10 \cdot 5 + 40 \cdot 6 + 50 \cdot 4}{10 + 40 + 50} = \dfrac{490}{100} = 4,9$

17 **Sabemos que, en una clase, la calificación media de un examen ha sido 5, y la desviación típica, 1,5. En esa misma clase, para otro examen, la calificación media ha sido, también, 5 y la desviación típica, 1.**

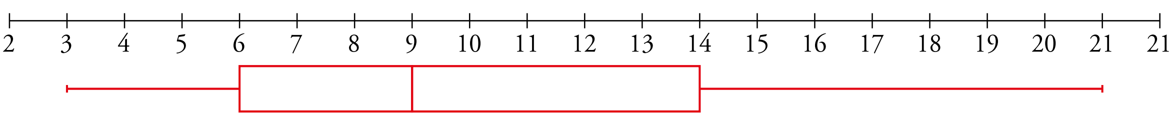
Si alguien ha obtenido un 8 en el primer examen y un 7,5 en el segundo, ¿qué nota te parece más meritoria? ¿Por qué?

El coeficiente de variación en el primer examen es del 30 %, y en el segundo, del 20 %. Así, en el segundo examen hay menos personas que hayan sacado notas muy por encima de la media y, por lo tanto, el 7,5 de este alumno es más meritorio.

18 **Conocemos el número de días al mes que ha llovido este año en una cierta región. Los valores de los cuartiles son 6, 9 y 14. El mes que más llovió fue marzo con 21 días y sabemos que el rango de la distribución es 18.**

a) Construye el diagrama de caja y bigotes.

b) ¿Crees que es una región lluviosa? Justifica la respuesta.



Observando el diagrama de caja y bigotes sí podemos deducir que e s una región lluviosa.

Resuelve: un poco más difícil

19 **Al medir el peso al nacer en una determinada especie de animales, hemos obtenido los datos siguientes:**

PESO (kg)	N.° DE ANIMALES
3,5 - 4,5	1
4,5 - 5,5	8
5,5 - 6,5	28
6,5 - 7,5	26
7,5 - 8,5	16
8,5 - 9,5	1

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) ¿Qué porcentaje de animales pesó entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$? ¿Y más que $\bar{x} + \sigma$? ¿Y menos que $\bar{x} - \sigma$? Haz una estimación razonada.

a)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
3,5 - 4,5	4	1	4	16
4,5 - 5,5	5	8	40	200
5,5 - 6,5	6	28	168	1 008
6,5 - 7,5	7	26	182	1 274
7,5 - 8,5	8	16	128	1 024
8,5 - 9,5	9	1	9	81
		80	531	3 603

$$\bar{x} = \frac{531}{80} = 6{,}638$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3\,603}{80} - (6{,}638)^2} = 0{,}997$$

b) $\bar{x} - \sigma = 6{,}638 - 0{,}997 = 5{,}641 \approx 5{,}5$; $\bar{x} + \sigma = 6{,}638 + 0{,}997 = 7{,}635 \approx 7{,}5$

En el intervalo que va de $\bar{x} - \sigma$ a $\bar{x} + \sigma$ hay 28 + 26 = 54 individuos, que supone un $\frac{54}{80} = 0{,}675 = 67{,}5\,\%$.

Con más de $\bar{x} + \sigma$ hay 16 + 1 = 17 individuos, que supone un $\frac{17}{80} = 0{,}2125 = 21{,}25\,\%$.

Con menos de $\bar{x} - \sigma$ hay 1 + 8 = 9 individuos, que supone un $\frac{9}{80} = 0{,}1125 = 11{,}25\,\%$.

20 **Estas son las estaturas de 4 350 soldados:**

ESTATURA (m) (MARCAS DE CLASE)	1,52	1,56	1,60	1,64	1,68	1,72	1,76	1,80	1,84	1,88
N.° SOLDADOS	62	186	530	812	953	860	507	285	126	29

Decimos que los soldados que tienen su estatura entre $\bar{x} + \sigma$ y $\bar{x} + 2\sigma$ son *altos*, si la tienen entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} - 2\sigma$, son *bajos* y entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$, son *normales*.

Estima qué tanto por ciento de altos, de bajos y de normales hay.

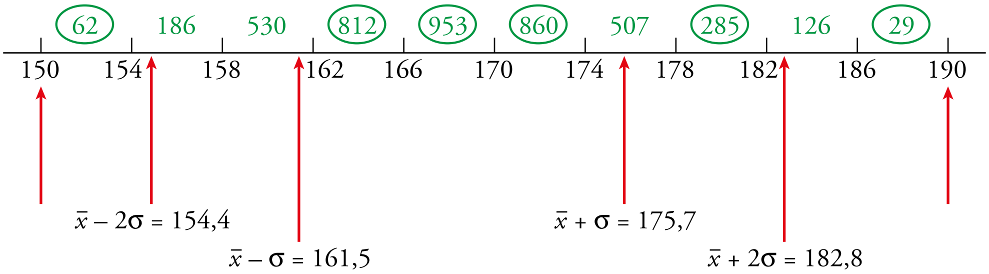
¿Qué porcentaje hay de *altísimos* y de *bajísimos*?

Empezamos por calcular $\bar{x}$ y σ. Obtenemos $\bar{x}$ = 168,6 cm, σ = 7,1 cm.

Son importantes los siguientes valores:

$\bar{x} - 2\sigma = 154{,}4$ $\quad$ $\bar{x} - \sigma = 161{,}6$ $\quad$ $\bar{x} + \sigma = 175{,}7$ $\quad$ $\bar{x} + 2\sigma = 182{,}8$

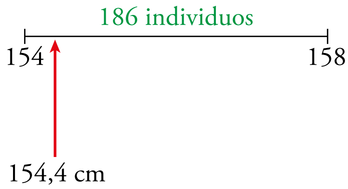
Representamos estos valores junto con los extremos de los intervalos:



Deseamos averiguar el número de individuos que hay en los *tramos* delimitados por las líneas rojas. Para ello, hemos puesto, en verde, los individuos de cada intervalo. Se han señalado los que están contenidos por completo en uno de los *tramos*. Así, 62 son los individuos del primer intervalo que están dentro del *tramo* 150 - 154,4.

Los demás números en verde hemos de repartirlos del siguiente modo:

2.° intervalo:



$$\frac{186 \text{ individuos}}{4 \text{ cm}} = \frac{x}{154{,}4 - 154} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{0{,}4 \cdot 186}{4} = 18{,}6 \approx 19 \text{ individuos}$$

Asignamos **19** inidividuos a la izquierda de 154,4 y 186 – 19 = **167** a la derecha.

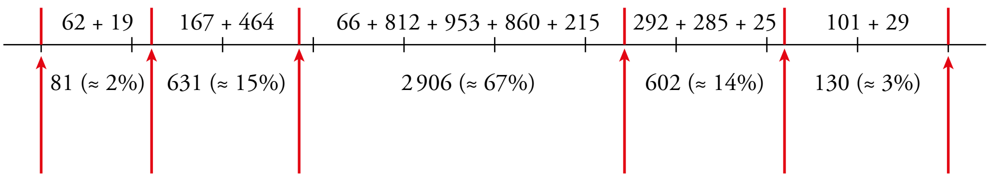
Análogamente:

3.^er^ intervalo: $\rightarrow$ **464** individuos a la izquierda de 161,5 y **66** a la derecha.

7.° intervalo: $\rightarrow$ **215** individuos a la izquierda de 175,7 y **292** a la derecha.

9.° intervalo: $\rightarrow$ **25** individuos a la izquierda de 182,8 y **101** a la derecha.

Conclusión:



Por tanto, diremos que hay:

2 % de bajísimos, 15 % de bajos, 67 % de normales, 14 % de altos y 3 % de altísimos.

(Los porcentajes suman 101 y no 100 debido al redondeo).

21 **Estas son las horas de estudio semanal de un grupo de alumnas y alumnos:**

14	**9**	**9**	**20**	**18**	**12**	**14**	**6**	**14**	**8**
15	**10**	**18**	**20**	**2**	**7**	**18**	**8**	**12**	**10**
20	**16**	**18**	**15**	**24**	**10**	**12**	**25**	**24**	**17**
10	**4**	**8**	**20**	**10**	**12**	**16**	**5**	**4**	**13**

a) Construye una tabla de frecuencias con los siguientes intervalos: 1,5 - 6,5 - 11,5 - 16,5 - 21,5 - 26,5.

b) Calcula la media y la desviación típica.

a)

INTERVALO	FRECUENCIA
1,5 - 6,5	5
6,5 - 11,5	11
11,5 - 16,5	12
16,5 - 21,5	9
21,5 - 26,5	3

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
1,5 - 6,5	4	5	20	80
6,5 - 11,5	9	11	99	891
11,5 - 16,5	14	12	168	2 352
16,5 - 21,5	19	9	171	3 249
21,5 - 26,5	24	3	72	1 728
		40	530	8 300

$\bar{x} = \dfrac{530}{40} = 13,25$ h

$\sigma = \sqrt{\dfrac{8\,300}{40} - (13,25)^2} = 5,6513$

22 **En una clase, estas son las notas de un examen:**

NOTAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º ALUMNOS	4	3	2	1	7	3	2	8	3	2

Calcula las notas medias de: la clase ($\bar{x}$), los aprobados ($\bar{x}_A$) y los suspensos ($\bar{x}_B$). ¿Se podría hallar $\bar{x}$ haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$?

$\bar{x} = \dfrac{198}{35} \approx 5,657$ $\qquad \bar{x}_A = \dfrac{178}{25} = 7,12$ $\qquad \bar{x}_B = \dfrac{20}{10} = 2$

Haciendo la media de $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$ no se puede hallar $\bar{x}$. Observamos que:

Si $\bar{x}_A = \dfrac{a}{b}$ y $\bar{x}_B = \dfrac{c}{d}$, $\bar{x} = \dfrac{a+c}{b+d}$

$\dfrac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2} \neq \dfrac{a+c}{b+d}$

23 **En mi clase de recuperación somos 16 estudiantes y hemos sacado una nota media de 7,1. Si la media de las chicas es 8 y la de los chicos, 6,4, ¿qué proporción de chicas y chicos hay en clase?**

Llamamos y al número de chicas de la clase. Por tanto, en la clase hay $16 - y$ chicos.

- Media de las chicas: $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots x_y}{y} = 8 \;\rightarrow\; x_1 + x_2 + \ldots x_y = 8 \cdot y$
- Media de los chicos: $\dfrac{x_{y+1} + x_{y+2} + \ldots x_{16}}{16 - y} = 6,4 \rightarrow x_{y+1} + x_{y+2} + \ldots x_{16} = 6,4 \cdot y(16 - y)$
- Media de la clase:

$$\frac{(x_1 + x_2 + \ldots x_y) + (x_{y+1} + x_{y+2} + \ldots x_{16})}{16} = \frac{(8 \cdot y) + [6,4(16 - y)]}{16} = 7,1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 8_y + 102,4 - 6,4y = 113,6 \;\rightarrow\; 1,6y = 11,2 \rightarrow y = 7$$

En la clase hay 7 chicas y 9 chicos.

24 **La media de tres números es 7 unidades mayor que el pequeño y 10 unidades menor que el mayor. Sabiendo que la mediana es 7, ¿de qué números se trata?**

- Llamamos x, y, z a los tres números buscados dados de menor a mayor.
- Como la mediana es $7 \;\rightarrow\; y = 7$.
- La media es 7 unidades mayor que $x \;\rightarrow\; \dfrac{x + 7 + z}{3} = x + 7$
- La media es 10 unidades menor que $z \;\rightarrow\; \dfrac{x + 7 + z}{3} = z - 10$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+7+z}{3} = x + 7 \\ \dfrac{x+7+z}{3} = z - 10 \end{array}\right\} \rightarrow x + 7 = z - 10 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = z - 17$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación:

$$\frac{z - 17 + 7 + z}{3} = z - 10 \;\rightarrow\; 2z - 10 = 3z - 30x \;\rightarrow\; z = 20 \;\rightarrow\; x = 3$$

Los tres números buscados son 3, 7 y 20.

Reflexiona

25 **¿Qué les ocurre a la $\bar{x}$ y a la σ de una distribución si a todos sus datos les sumamos un mismo número?**

¿Y si los multiplicamos por el mismo número?

Comprueba tus conjeturas con estos datos:

4, 3, 6, 7, 5, 4, 5, 3, 2, 6, 5

- Si a cada dato le sumamos un mismo número, a, entonces la media aumenta a unidades pero la desviación típica no varía.

  Datos $\rightarrow$ $x'_i = x_i + a$

  Parámetros $\rightarrow$ $\bar{x}' = \bar{x} + a$; $\sigma' = \sigma$

- Si cada dato se multiplica por k, la media y la desviación típica se multiplican por k:

  Datos $\rightarrow$ $x_i'' = k \cdot x_i$

  Parámetros $\rightarrow$ $\bar{x}'' = k \cdot \bar{x}$; $\sigma'' = \sigma$

Comprobación:

Los parámetros de la distribución son $\bar{x} \approx 4{,}55$ y $\sigma \approx 1{,}42$.

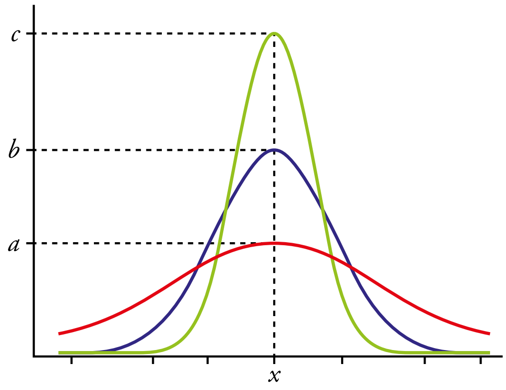
Si sumamos 3 a cada dato, obtenemos $\bar{x} \approx 7{,}55$ y $\sigma \approx 1{,}42$.

Si multiplicamos por 2 cada dato, obtenemos $\bar{x} \approx 9{,}1$ y $\sigma \approx 2{,}84$.

Página 294

Lee y aprende

La campana de Gauss



Muchas variables estadísticas relativas a fenómenos del mundo real, con componentes aleatorios, presentan frecuencias muy bajas en los valores extremos, que van creciendo a medida que se acercan a los valores centrales.

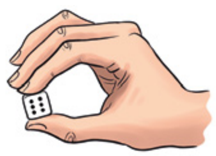
Así se comporta, por ejemplo, la distribución de las alturas de un conjunto de personas: unas poquitas muy bajas (menos de 1,55 m), otras poquitas muy altas (más de 1,95 m) y muchas entre los valores intermedios (alrededor de 1,75 m). Y lo mismo podemos decir de la distribución de pesos, el tallaje en las prendas de vestir, los datos relativos a temperaturas, caudales de ríos, gasto de energía, ingresos, etc.

Este tipo de distribuciones, en su forma ideal, responden al concepto de distribución normal y su representación gráfica (*valores-frecuencias*) se conoce como campana de Gauss, por su forma y por ser Gauss el primer matemático que aplicó estos conceptos en estudios prácticos, para otras ciencias.

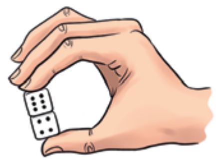
- **¿Cuál sería la media en la distribución de la gráfica roja? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?**
- **¿Qué valor tendrían esos parámetros en la gráfica verde? ¿Y en la morada?**

La media, la mediana y la moda de cualquier distribución normal coinciden.

Piensa y generaliza



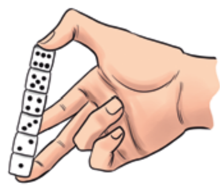
Este dado tiene dos caras ocultas y cuatro a la vista. ¿Cuántos puntos suman las caras ocultas?



Aquí hay cuatro caras ocultas.

¿Cuántos puntos suman esas cuatro caras?

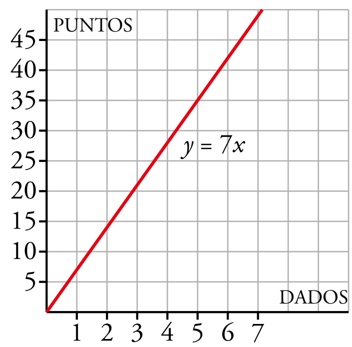
¿Y aquí?



¿Y aquí?

- **¿Y si hubiera x dados?**

  El número de puntos de las caras ocultas está en función del número de dados. Escribe y representa una función que relacione el número de dados, x, con el de puntos en las caras ocultas, y.



- Las caras opuestas de un dado siempre suman 7 puntos.
- Según la respuesta anterior, $7 \cdot 2 = 14$ puntos.
- $7 \cdot 3 = 21$ puntos.
- $7 \cdot 6 = 42$ puntos.
- Según la serie anterior, si hubiera x dados las caras ocultas sumarían $7 \cdot x$ puntos.
- $y = 7x$

Página 295

Entrénate resolviendo otros problemas

- **Un grupo de 17 chicas y chicos de la misma edad organizan un gran viaje. A la reunión inicial acuden los padres y las madres de todos ellos, cuya edad media es de 45 años. Pero si consideramos al grupo formado por padres, madres, hijas e hijos, la edad media es de 35 años. ¿Qué edad tienen los chicos y las chicas?**

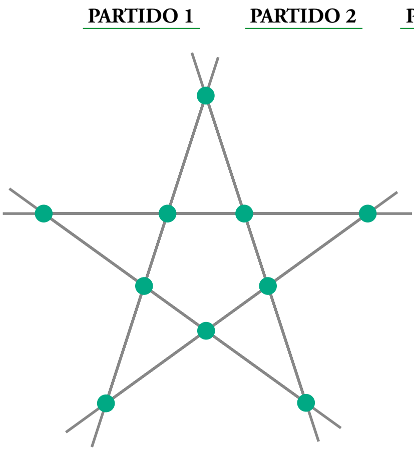
Entre padres y madres suman $\longrightarrow$ $45 \cdot 17 \cdot 2 = 1\,530$ años

Entre madres, padres e hijos suman $\longrightarrow$ $35 \cdot 17 \cdot 3 = 1\,785$ años

Solo los hijos suman $\longrightarrow$ $1\,785 - 1\,530 = 255$ años

Cada hijo tiene $\longrightarrow$ $255 : 17 = 15$ años

- **Sitúa 10 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 5 filas de 4 soldados.**



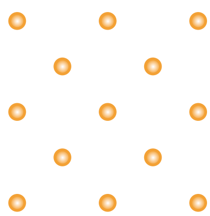
- **Un cocinero va a freír tres filetes. Cada uno ha de estar en la sartén cinco minutos por cada cara. Pero en la sartén solo caben dos. ¿Cómo debe hacerlo para tardar el menor tiempo posible?**

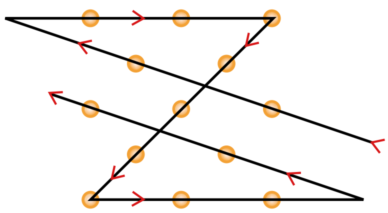
Pone dos filetes, A y B, durante 5 minutos.

Saca uno de ellos, A, da la vuelta al otro, B, y pone el tercero, C, durante 5 minutos.

Saca el B (ya está hecho por las dos caras), da la vuelta al C, y pone el A por la cara cruda. Otros 5 minutos. Ya están los tres. Ha tardado 15 minutos.

- **Copia el dibujo de la derecha y traza en tu cuaderno una línea quebrada de cinco segmentos que pase por estos trece puntos.**





AUTOEVALUACIÓN

1 **Halla la media, la mediana, la desviación típica y el coeficiente de variación de cada una de estas distribuciones y determina cuál es más dispersa:**

a) 6, 9, 1, 4, 8, 2, 3, 4, 4, 9

b) 120, 95, 87, 111, 116, 82, 121, 92, 76

c) 987, 1 010, 1 004, 995, 998, 1 001, 999, 982

a) Ordenamos primero los datos: 1 2 3 4 4 4 6 8 9 9

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4\cdot 3+6+8+9\cdot 2}{10} = 5$

MEDIANA $= 4$

VARIANZA: $\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2\cdot 3+6^2+8^2+9^2\cdot 2}{10} - 5^2 = \dfrac{324}{10} - 25 = 7,4$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{7,4} \approx 2,72$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{2,72}{5} = 0,544$

b) Ordenamos los datos: 76 82 87 92 95 111 116 120 121

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{76+82+87+92+95+111+116+120+121}{9} = 100$

MEDIANA $= 95$

VARIANZA: $\dfrac{76^2+82^2+87^2+92^2+95^2+111^2+116^2+120^2+121^2}{9} = -100^2 = 264$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{264} \approx 16,25$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{16,25}{100} = 0,1625$

c) Ordenamos los datos: 982 987 995 998 999 1001 1004 1010

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{982+987+995+998+999+1001+1004+1010}{8} = 997$

MEDIANA $= \dfrac{998+999}{2} = 998,5$

VARIANZA: $\dfrac{982^2+987^2+995^2+998^2+999^2+1001^2+1004^2+1010^2}{8} = -997^2 = 71$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{71} \approx 8,43$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $CV = \dfrac{8,43}{997} = 0,0085$

La distribución más dispersa es la a).

2 **Calcula $\bar{x}$, σ y CV de las siguientes distribuciones:**

a) Número de días que han ido a la biblioteca los estudiantes de un curso:

N.° DE DÍAS	FRECUENCIA
0	6
1	7
2	8
3	5
4	2
5	2

b) Tiempo, en minutos, que pasaron en la sala de espera los pacientes de un médico cierto día:

TIEMPO (min)	FRECUENCIA
De 1 a 9	4
De 9 a 17	5
De 17 a 25	8
De 25 a 33	7
De 33 a 41	4
De 41 a 49	2

a)

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0	6	0	0
1	7	7	7
2	8	16	32
3	5	15	45
4	2	8	32
5	2	10	50
	30	56	166

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{56}{30} \approx 1{,}87$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{166}{30} - 1{,}87^2} \approx 1{,}43$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{1{,}43}{1{,}87} \approx 0{,}7647$

b)

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
0 - 10	5	6	30	150
10 - 20	15	9	135	2 025
20 - 30	25	8	200	5 000
30 - 40	35	5	175	6 125
40 - 50	45	2	90	4 050
		30	630	17 350

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{630}{30} \approx 21$

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{17\,350}{30} - 21^2} \approx 11{,}72$

COEFICIENTE DE VARIACIÓN: $\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11{,}72}{21} \approx 0{,}56$

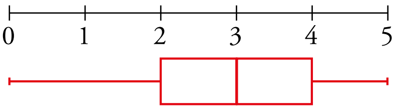
3 **Las notas obtenidas por los estudiantes de una clase en un examen con 5 preguntas han sido:**

3	**3**	**2**	**4**	**5**	**4**	**1**	**3**	**3**	**2**
3	**2**	**4**	**4**	**3**	**1**	**2**	**0**	**5**	**3**
2	**0**	**3**	**5**	**3**	**3**	**5**	**2**	**1**	**4**

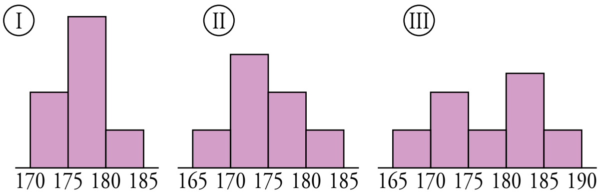
a) Calcula la mediana y los cuartiles.

b) Dibuja el correspondiente diagrama de caja.

a) $Me = 3$, $Q_1 = 2$ y $Q_3 = 4$

b) 

4 **Las estaturas de los componentes de tres equipos escolares de baloncesto, A, B y C, se distribuyen según las siguientes gráficas:**



Los parámetros correspondientes a cada uno son:

	A	B	C
$\bar{x}$	177,8	176,8	174,6
σ	6,4	3,2	4,5

Indica a qué equipo corresponde cada gráfica.

La gráfica I corresponde al equipo B, ya que su medida debe estar entre 175 y 180 y su desviación media es la más pequeña.

La gráfica II corresponde al equipo C, ya que su media debe estar entre 170 y 175 y su desviación media está entre las de los otros dos equipos.

La gráfica III corresponde al equipo A, ya que su media está más cercana a 180 y su desviación media es la más grande.

5 **He estudiado esta semana: el lunes, 3 h; el martes, 2 h; el miércoles, 2,5 h; el jueves, 5 h; el viernes, 2 h, y el sábado, 3,5 h.**

a) ¿Cuánto tengo que estudiar el domingo para mantener la media? ¿Y para la mediana?

b) ¿Cuánto debo estudiar para que la media sea 5 h?

a) Ordenamos los datos: 2 h 2 h 2,5 h 3 h 3,5 h 5 h

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{2 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 5}{6} = 3$ h

MEDIANA= 2,75 h

Para mantener la media, el domingo tengo que estudiar 3 h. Y para mantener la mediana, 2,75 h.

b) $\dfrac{2 + 2 + 2,5 + 3 + 3,5 + 5 + x}{7} = 5 \rightarrow 18 + x = 35 \rightarrow x = 17$

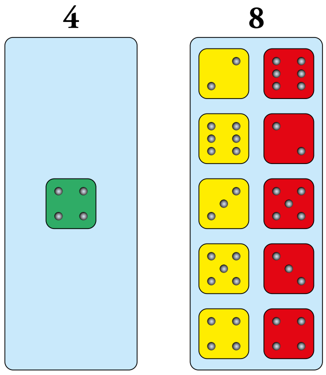
Tengo que estudiar 17 h.

15 AZAR Y PROBABILIDAD

Página 297

Resuelve

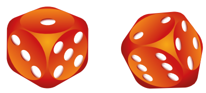
1 **a) Resuelve el problema de Cardano, enunciado en la página anterior, utilizando el siguiente esquema:**



- **Al tirar un dado, hay 1 posibilidad entre 6 de obtener un cuatro:**

$P[4] = \dots$

- **Al tirar dos dados, hay 5 posibilidades entre 36 de obtener un ocho:**



$P[8] = \dots$

b) ¿Qué es más probable, «obtener 5» con un dado o «sumar 7» con dos dados?

a) $P[4] = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}16$; $P[8] = \dfrac{5}{36} \approx 0{,}13$

b) $P[5] = \dfrac{1}{6} \leftarrow$ Al tirar un dado.

Al tirar dos dados, hay 6 posibilidades de sumar 7 ($6 + 1$, $5 + 2$, $4 + 3$, $3 + 4$, $2 + 5$, $1 + 6$) entre 36: $P[\text{suma } 7] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Por tanto, es igual de probable una cosa que la otra.

2 **a) Para resolver el problema «Un desafío interrumpido», observa el esquema que aparece a la izquierda. De él se concluye que** B triunfa **en la mitad de la mitad de los casos y A, en el resto. Por tanto:**

$$P[\text{TRIUNFA A}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad P[\text{TRIUNFA B}] = \frac{1}{4}$$

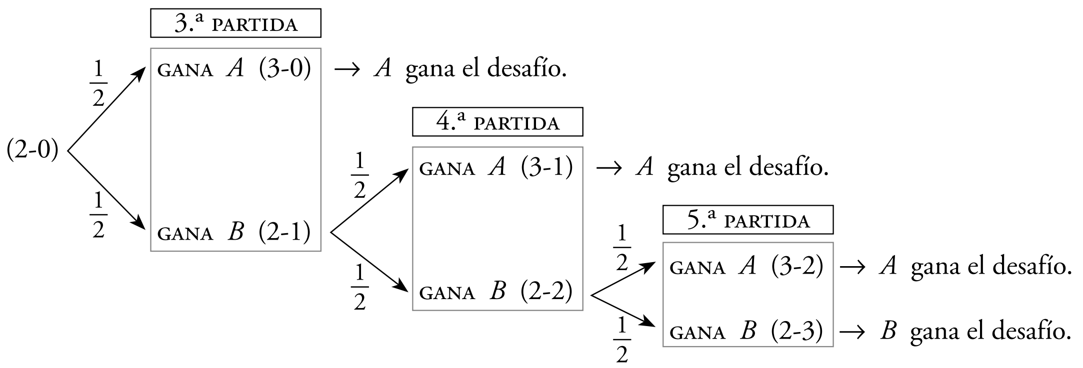
Lo razonable es repartir el dinero proporcionalmente a estas probabilidades. Hazlo.

b) ¿Cómo se deberían repartir los 3 000 doblones si la partida se hubiera interrumpido cuando A ganaba 2 – 0?

a) A se lleva $\frac{3}{4}$ de 3 000 doblones $\rightarrow$ 2 250 doblones.

B se lleva $\frac{1}{4}$ de 3 000 doblones $\rightarrow$ 750 doblones.

b)



B ganaría el desafío en la mitad de la mitad de la mitad de los casos; es decir, en la octava parte de los casos.

$P[B \text{ gana el desafío}] = \frac{1}{8}$

$P[A \text{ gana el desafío}] = \frac{7}{8}$

A debería llevarse $\frac{7}{8} \cdot 3\,000 = 2\,625$ doblones.

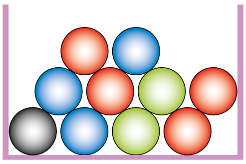
B debería llevarse $\frac{1}{8} \cdot 3\,000 = 375$ doblones.

1 SUCESOS ALEATORIOS

Página 299

1 **En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.**

Sacamos una bola y anotamos su color.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar. b) E = {R, A, V, N}

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

S_1 = {R, A, V, N} S_2 = {R, N} S_3 = {V}

S_4 = {A} S_5 = {A, V, N}

2 **Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña.**

Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa dos sucesos que tengan más de un caso.

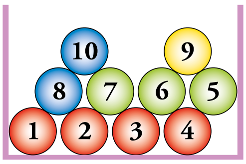
a) Sí, pues el resultado depende del azar. b) $E = \{F, N, L, P\}$

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

$S_1 = \{F, N\}$; $S_2 = \{N, L, P\}$

3 **En una urna hay 10 bolas numeradas.**

Sacamos una bola y anotamos el número.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

a) Sí, pues el resultado depende del azar. b) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

c) Respuesta abierta. Por ejemplo:

S_1: "PAR" = {2, 4, 6, 8, 10} S_2: "IMPAR" = {1, 3, 5, 7, 9}

S_3: "MÚLTIPLO DE 3" = {3, 6, 9} S_4: "MÚLTIPLO DE 5" = {5, 10}

S_5: "NÚMERO PRIMO" = {2, 3, 5, 7} S_6: "CUADRADO PERFECTO" = {1, 4, 9

4 **Daniel le ha regalado a su hermana María una caja de bombones de chocolate.**

Saca un bombón y ve si es de chocolate.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

No es una experiencia aleatoria, Daniel sabe que todos los bombones son de chocolate; por lo tanto, no interviene el azar.

3 PROBABILIDAD EN EXPERIENCIAS REGULARES. LEY DE LAPLACE

Página 301

1 **Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener:**

a) El as de espadas.

b) El rey de bastos.

c) Una figura (sota, caballo o rey).

d) Una copa.

a) $P[\text{as de espadas}] = \frac{1}{40}$

b) $P[\text{rey de bastos}] = \frac{1}{40}$

c) $P[\text{una figura}] = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

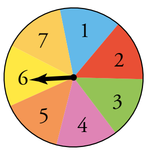
d) $P[\text{una copa}] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

2 **En un campamento hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar a su portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?**

En el campamento hay 32 + 13 + 15 + 23 = 83 jóvenes.

$P[\text{europeo}] = \frac{32}{83}$

3 **Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?**



$P[\text{par}] = \frac{3}{7}$

4 PROBABILIDAD EN EXPERIENCIAS IRREGULARES. LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Página 302

1 **En una caja hay dos tipos de galletas: las de chocolate, *CH*, y las normales, *N*. Sacamos una al azar, la miramos y la devolvemos a la caja.**

Si hemos extraído 27 galletas de chocolate y 13 galletas normales, ¿qué valores asignarías a $P[CH]$ y a $P[N]$?

Hemos extraído 27 + 13 = 40 galletas en total.

$$P[CH] = \frac{27}{40} = 0{,}675$$

$$P[N] = \frac{13}{40} = 0{,}325$$

5 PROBABILIDADES EN EXPERIENCIAS COMPUESTAS

Página 303

1 **Calcula las restantes probabilidades en la EXPERIENCIA I. (Sumar 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12).**

$P[2] = \frac{1}{36}$ $P[3] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

$P[4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $P[6] = \frac{5}{36}$

$P[7] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $P[8] = \frac{5}{36}$

$P[9] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ $P[10] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

$P[11] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $P[12] = \frac{1}{36}$

2 **En la EXPERIENCIA I:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea menor que 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor que 6?

c) ¿Y de que esté entre 4 y 7, ambos incluidos?

a) 1 + 2 + 3 + 4 = 10 resultados menores que 6. Por tanto:

$P[\text{MENOR QUE } 6] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

b) $P[\text{MAYOR QUE } 6] = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

c) $P[4, 5, 6 \text{ o } 7] = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

3 **Lanzamos dos dados y nos fijamos en la mayor de las puntuaciones.**

Completa en tu cuaderno el cuadro. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayor de las puntuaciones sea 1?

¿Y de que sea 2? ¿Y 3? ¿Y 4? ¿Y 5? ¿Y 6?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁		2	3	4		
⚂					5	
⚃					5	
⚄					5	6
⚅					6	6

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
⚁	2	**2**	**3**	**4**	5	6
⚂	3	3	3	4	**5**	6
⚃	4	4	4	4	**5**	6
⚄	5	5	5	5	**5**	**6**
⚅	6	6	6	6	**6**	**6**

$P[1] = \frac{1}{36}$ $P[2] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $P[3] = \frac{5}{36}$

$P[4] = \frac{7}{36}$ $P[5] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $P[6] = \frac{11}{36}$

Página 304

4 **Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de obtener par en el primero y múltiplo de 3 en el segundo.**

$P[\text{par y múltiplo de 3}] = P[\text{par}] \cdot P[\text{múltiplo de 3}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

5 **Lanzamos simultáneamente un dado correcto y una chincheta. Deseamos calcular las probabilidades de cada uno de los dobles resultados. Rellena en tu cuaderno una tabla como esta suponiendo que P[ ] = 0,7.**

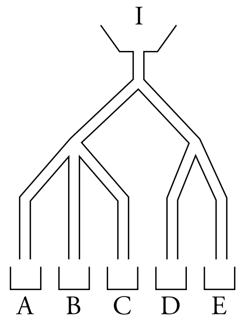
	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅

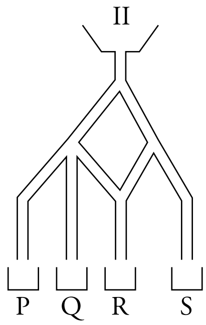
Si P[ ] = 0,7 → P[ ] = 0,3. P[⚀] = P[⚁] = … = P[⚅] = $\frac{1}{6}$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
	$0,3 \cdot \frac{1}{6} = 0,05$	$0,3 \cdot \frac{1}{6} = 0,05$	0,05	0,05	0,05	0,05
	$0,7 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,117$	$0,7 \cdot \frac{1}{6} \approx 0,117$	0,117	0,117	0,117	0,117

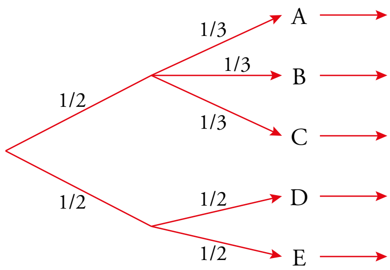
6 **¿Cuál es la probabilidad de que una bola que se deja caer por el embudo caiga en cada casillero?**

a) En el aparato I. **b) En el aparato II.**





a)



$P[A] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

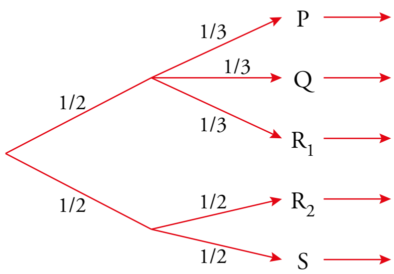
$P[B] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[D] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[E] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b)



$P[P] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[Q] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} P[R_1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ P[R_2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} P[R] = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

$P[S] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 305

2. Experiencias compuestas. Diagramas en árbol

Hazlo tú

- **Suprime una bola verde de cada una de las dos urnas de este ejercicio y calcula las mismas probabilidades que en él se piden.**

Llamamos: $R \rightarrow$ bola roja $\qquad V \rightarrow$ bola verde

a) $P[1.^a\ R \text{ y } 2.^a\ R] = P[1.^a\ R] \cdot P[2.^a\ R \text{ habiendo sido } 1.^a\ R] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}05$

b) $P[1.^a\ V \text{ y } 2.^a\ R] = P[1.^a\ V] \cdot P[2.^a\ R \text{ habiendo sido } 1.^a\ V] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}05$

c) $P[2.^a\ R] = 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}35$

d) $P[2.^a\ V] = 1 - P[2.^a\ R] = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 306

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1 **Indica el espacio muestral de cada una de las siguientes experiencias aleatorias:**

a) Señalo al azar una provincia en un mapa de Galicia.

b) Lanzo un cubo de Rubik recién montado y anoto el color de la cara de arriba.

c) Señalo una palabra cualquiera de un libro elegido al azar y observo cuál es la primera vocal que aparece.

d) Saco una carta de una baraja española y observo el palo.

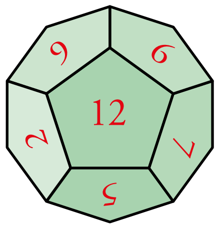
a) E = {A Coruña. Lugo, Orense, Pontevedra}

b) E = {azul, amarillo, rojo, verde, blanco, naranja}

c) E = {a, e, i, o, u}

d) E = {oros, copas, espadas, bastos}

2 **Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.**



a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = «Menos de 5» **B = «Más de 7»**

C = «Número par» **D = «No múltiplo de 3»**

a) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) A = {1, 2, 3, 4} B = {8, 9, 10, 11, 12}

C = {2, 4, 6, 8, 10, 12} D = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 11}

3 **Escogemos al azar un día cualquiera de la semana.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = «Fin de semana»

B = «Los que empiezan por la letra M»

C = «Los que acaban en *es*»

a) E = {L, M, X, J, V, S, D}

b) A = {S, D} B = {M, X} C = {L, M, X, J, V}

5 **Describe los sucesos contrarios a los sucesos A, B, C y D del ejercicio 2.**

- El suceso contrario de A es: Obtener 5 o más = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
- El contrario de B es: Obtener 7 o menos = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
- El contrario de C es: Obtener número impar = {1, 3, 5, 7, 9, 11}
- El contrario de D es: Obtener múltiplo de 3 = {3, 6, 9, 12}

6 **Describe los sucesos contrarios a los sucesos A, B y C del ejercicio 3.**

- El contrario de A es: No fin de semana = {L, M, X, J, V}
- El contrario de B es: No empiezan por M = {L, J, V, S, D}
- El contrario de C es: No acaban en *es* = {S, D}

Probabilidades en experiencias simples

8 **Halla las probabilidades de los sucesos A, B y C de la actividad 3. Calcula también la de sus contrarios.**

$P[A] = 2/7$ $P[B] = 2/7$ $P[C] = 5/7$

$P[\text{CONTRARIO DE } A] = 1 - 2/7 = 5/7$

$P[\text{CONTRARIO DE } B] = 1 - 2/7 = 5/7$

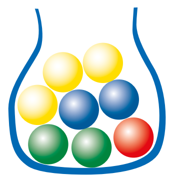
$P[\text{CONTRARIO DE } C] = 1 - 5/7 = 2/7$

9 **Se extrae al azar una bola de la siguiente bolsa. Calcula la probabilidad de que:**

a) Sea azul.

b) No sea verde.

c) Sea roja o azul.



a) $P[\text{azul}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{no verde}] = 1 - P[\text{verde}] = 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

c) $P[\text{roja o azul}] = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

10 **Lanzamos un dado correcto. Calcula las probabilidades de que el resultado sea:**

a) 1 o 2. **b) Mayor que 2.**

c) Par. **d) Mayor que 1.**

e) Menor que 1. **f) Menor que 7.**

a) $P[1 \text{ o } 2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

b) $P[\text{mayor que } 2] = 1 - P[1 \text{ o } 2] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c) $P[\text{par}] = \frac{1}{2}$

d) $P[\text{mayor que } 1] = 1 - P[1] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

e) $P[\text{menor que } 1] = 0$

f) $P[\text{menor que } 7] = 1$

11 **La profesora ha traído estos libros a clase:**

TÍTULO	NÚMERO DE LIBROS
La isla del tesoro	11
El principito	8
De la Tierra a la Luna	6
El conde de Montecristo	5

Si se asignan al azar, calcula la probabilidad de que el libro que le toque al primero de la lista:

a) Sea *La isla del tesoro.*

b) No sea *El principito* ni *El conde de Montecristo.*

c) No sea *De la Tierra a la Luna.*

En total hay 30 libros.

a) A = Sea *La Isla del tesoro*. $P[A] = \frac{11}{30}$

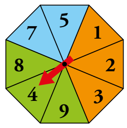
b) B = No sea *El Principito* ni *El Conde de Montecristo*. $P[B] = \frac{11+6}{30} = \frac{17}{30}$

c) C = No sea *De la Tierra a la Luna*. $P[C] = 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

Página 307

Probabilidades en experiencias compuestas

12 **Tiramos un dado y hacemos girar la ruleta:**



a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos números pares?

b) Halla la probabilidad de obtener un número mayor que 2 en el dado y un color que no sea azul en la ruleta.

c) ¿Cómo de probable es sacar 5 o 6 en el dado?

a) $P[\text{par y par}] = P[\text{par}] \cdot P[\text{par}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$

b) $P[\text{mayor que 2 y no azul}] = P[\text{mayor que 2}] \cdot P[\text{no azul}] = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{2}$

c) $P[6 \text{ o } 5] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

14 **Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de estos sucesos:**

a) Dos ases.

b) Un as y un rey.

c) Dos oros.

d) Ninguna copa (no copa y no copa).

e) Dos figuras (sota, caballo o rey).

f) Una figura y una no figura.

a) $P[\text{AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS habiendo sido AS}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

b) $P[\text{AS y REY}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{REY habiendo sido AS}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{2}{195}$

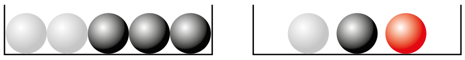
c) $P[\text{OROS y OROS}] = P[\text{OROS}] \cdot P[\text{OROS habiendo sido OROS}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$

d) $P[\text{NINGUNA COPA}] = P[\text{NO COPA}] \cdot P[\text{NO COPA habiendo sido NO COPA}] = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{29}{52}$

e) $P[\text{FIGURA y FIGURA}] = P[\text{FIGURA}] \cdot P[\text{FIGURA habiendo sido FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$

f) $P[\text{FIGURA y NO FIGURA}] = P[\text{FIGURA}] \cdot P[\text{NO FIGURA habiendo sido FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{28}{39} = \frac{14}{65}$

15 **Cogemos al azar una bola de la 1.ª urna, la echamos en la 2.ª y sacamos una bola de esta 2.ª urna.**

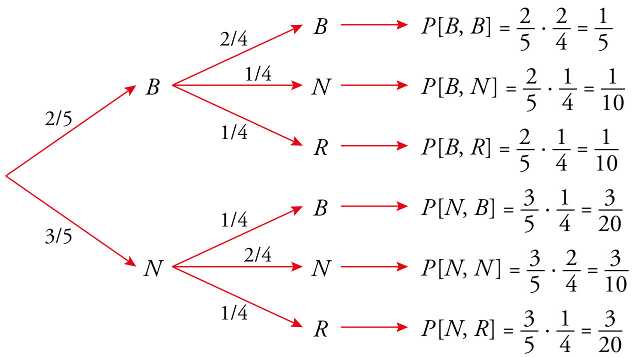


Calcula las siguientes probabilidades:

a) P**[1.ª**  **y 2.ª** **]** **b)** P**[1.ª** **y 2.ª** **]**

c) P**[2.ª** **]** **d)** P**[2.ª** **] e)** P**[2.ª** **]**

$N \rightarrow$ bola negra $B \rightarrow$ bola blanca $R \rightarrow$ bola roja



a) $P[1.^a\ N \text{ y } 2.^a\ N] = P[1.^a\ N] \cdot P[2.^a\ N \text{ habiendo sido } 1.^a\ N] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

b) $P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ N] = P[1.^a\ B] \cdot P[2.^a\ N \text{ habiendo sido } 1.^a\ B] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

c) $P[2.^a\ N] = P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ N] + P[1.^a\ N \text{ y } 2.^a\ N] = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$

d) $P[2.^a\ B] = P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ B] + P[1.^a\ N \text{ y } 2.^a\ B] = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$

e) $P[2.^a\ R] = P[1.^a\ B \text{ y } 2.^a\ R] + P[1.^a\ N \text{ y } 2.^a\ R] = \frac{1}{10} + \frac{3}{20} = \frac{1}{4}$

Resuelve problemas

16 **Lanzamos una moneda: si sale cara, tomo una carta de una baraja; si sale cruz, no sigo jugando.**

¿Qué probabilidad hay de obtener OROS o FIGURA?

Primero calculamos la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja sea de Oros o Figura: $P[\text{OROS o FIGURA}] = P[\text{OROS}] + P[\text{FIGURA}] = \frac{10}{40} + \frac{9}{40} = \frac{19}{40}$.

Ahora tenemos también en cuenta el lanzamiento de la moneda:

$P[\text{CARA y OROS o FIGURA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{40} = \frac{19}{80}$

17 **Encima de la mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española (40 cartas):**

Sacando al azar otra carta del mazo:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una escalera?

a) 5 + 1 + 4 + 2 = 12 son los puntos de las que ya hay. Para que la suma sea 15, la nueva carta debe ser un 3. Quedan los 4 "treses" en las 36 cartas restantes.

Por tanto, $P[\text{SUMA } 15] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}111$

Para que la suma sea 16, la nueva carta debe ser "cuatro". Quedan 3 "cuatros" entre las 36 cartas sin repartir.

Por tanto, $P[\text{SUMA } 16] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083$

b) $P[\text{ESCALERA}] = P[\text{sacar } 3] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

18 **Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados del dado y la ruleta del ejercicio 12 sea mayor que 10.**

Construye una tabla de doble entrada.

Construimos la tabla del espacio muestral:

	1	2	3	4	5	7	8	9
1	2	3	4	5	6	8	9	10
2	3	4	5	6	7	9	10	11
3	4	5	6	7	8	10	11	12
4	5	6	7	8	9	11	12	13
5	6	7	8	9	10	12	13	14
6	7	8	9	10	11	13	14	15

$P[\text{suma mayor que } 10] = \frac{13}{48}$

19 **Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:**

a) Sea 5. **b) Sea 6.** **c) Sea 4.**

a) 1 y 5, 5 y 1

$P[\text{PROD.} = 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) 1 y 6, 2 y 3, 3 y 2, 6 y 1

$P[\text{PROD.} = 6] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

c) 1 y 4, 2 y 2, 4 y 1

$P[\text{PROD.} = 4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

20 **Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de que la diferencia de las puntuaciones:**

a) Sea 0. **b) Sea 1.**

c) Sea 3. **d) Sea 5.**

Hay 36 posibles casos.

a) $P[\text{SEA } 0] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{SEA } 1] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

c) $P[\text{SEA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d) $P[\text{SEA } 5] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

21 **Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de:**

a) Obtener al menos un 6.

b) Que las dos puntuaciones coincidan.

c) Que una puntuación sea mayor que la otra.

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

a) Hay 36 opciones y 11 de ellas tienen un 6. Por tanto, $P[\text{AL MENOS UN } 6] = \frac{11}{36}$

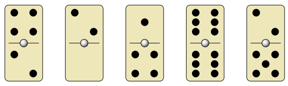
b) Hay 36 opciones y en 6 de ellas las puntuaciones coinciden.

Así, $P[\text{COINCIDEN}] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

c) Es lo mismo que decir que no coincidan las puntuaciones.

Por tanto, $P[\text{UNA MAYOR QUE OTRA}] = P[\text{NO COINCIDEN}] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

22 **¿Conoces el dominó? Es un juego cuyas fichas son de este tipo:**



Hay fichas con todas las posibles combinaciones con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, incluyendo las dobles como el 6-6 del dibujo.

a) Comprueba que en total son 28 fichas.

Si sacamos una al azar, calcula la probabilidad de que:

b) La suma de los números sea 6.

c) La suma sea un número impar.

d) El producto de los dos números sea menor que 6.

a) En esta tabla vemos cuáles son las fichas del dominó: son 28.

b) Hay 4 fichas cuya suma es 6 (marcadas en amarillo).

$P[\text{SUMA } 6] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

c) Hay 12 fichas cuya suma es un número impar (marcadas en verde).

$P[\text{SUMA IMPAR}] = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2			2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	3-5	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						5-5	5-6
6							6-6

d) Hay 13 fichas en las que el producto de los dos números es menor que 6.

$P[\text{PRODUCTO MENOR QUE } 6] = \frac{13}{28}$

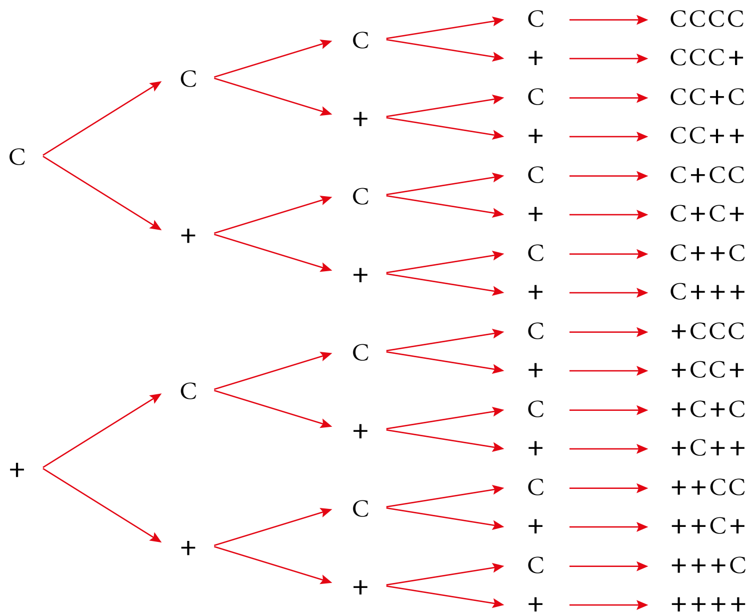
	0	1	2	3	4	5	6
0	0-0	0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
1		1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2			2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3				3-3	3-4	3-5	3-6
4					4-4	4-5	4-6
5						5-5	5-6
6							6-6

Página 308

23 Lanzamos cuatro monedas. Halla la probabilidad de obtener:

a) Dos caras. **b) Ninguna cara.** **c) Alguna cara.**

Hacemos un diagrama en árbol para ver los casos posibles:



Hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ casos posibles.

a) $P[\text{DOS CARAS}] = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ b) $P[\text{NINGUNA CARA}] = \frac{1}{16}$

c) $P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA CARA}] = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

24 ¿Qué probabilidad hay de obtener dos caras lanzando dos monedas? ¿Y lanzando tres monedas? ¿Y si tiramos cuatro monedas?

Podemos ayudarnos de diagramas de árbol para calcular estas probabilidades.

- Dos monedas: el espacio muestral tiene 4 casos y los favorables al suceso son CC.

  $P[\text{CC}] = \frac{1}{4}$

- Tres monedas: el espacio muestral tiene 8 casos y los favorables al suceso son CC+, C+C, +CC.

  $P[\text{DOS CARAS}] = \frac{3}{8}$

- Cuatro monedas: el espacio muestral tiene 16 casos y los favorables al suceso son CC++, C+C+, C++C, +CC+, +C+C, ++CC.

  $P[\text{DOS CARAS}] = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

25 En una familia de 4 hijos, ¿cuál es la probabilidad de que todos sean varones?

¿Cuál es la probabilidad de que en una familia de tres hijos, sean 2 chicos y 1 chica?

Hay 16 combinaciones distintas y solo una opción de que los cuatro salgan varones. Por tanto, $P[\text{TODOS VARONES}] = \frac{1}{16}$.

En una familia de tres hijos, pueden darse $2^3 = 8$ combinaciones distintas. En 3 de ellas hay 2 chicos y 1 chica. Por tanto, $P[\text{DOS CHICOS Y UNA CHICA}] = \frac{3}{8}$.

27 **En una empresa hay 200 empleados, de los que 100 son hombres y 100 son mujeres. Los alérgicos son 40 hombres y 35 mujeres.**

a) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no sea alérgico.

b) Si sabemos que el elegido no es alérgico, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Haz una tabla como la del problema anterior.

Construimos una tabla:

	HOMBRES	MUJERES	TOTAL
ALÉRGICOS	40	35	75
NO ALÉRGICOS	60	65	125
TOTAL	100	100	200

a) $P[\text{HOMBRE NO ALÉRGICO}] = \dfrac{60}{200} = \dfrac{3}{10}$

b) $P[\text{MUJER SABIENDO QUE NO ES ALÉRGICA}] = \dfrac{65}{125} = \dfrac{13}{25}$

28 **Hoy hay tres partidos: de baloncesto, de fútbol y de tenis. De los 40 amigos y amigas que hay en casa, 21 prefieren fútbol y 5, tenis. Hay 10 chicos que quieren baloncesto, 9 chicas que quieren fútbol y 3 chicas que prefieren ver el tenis. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:**

a) Sea chico.

b) No quiera ver el tenis.

c) Sea un chico que quiere ver el tenis.

d) Sea una chica que quiera ver el baloncesto.

e) Sabiendo que es una chica, que quiera ver fútbol.

f) Sabiendo que prefiere ver tenis, que sea un chico.

Con los datos del enunciado completamos la siguiente tabla:

	CHICOS	CHICAS	TOTALES
FÚTBOL	12	9	21
TENIS	2	3	5
BALONCESTO	10	4	14
TOTALES	24	16	40

a) $P[\text{CHICO}] = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$

b) $P[\text{NO QUIERA VER TENIS}] = \dfrac{21+14}{40} = \dfrac{7}{8}$

c) $P[\text{CHICO QUIERE VER TENIS}] = \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20}$

d) $P[\text{CHICA QUIERE VER BALONCESTO}] = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$

e) $P[\text{VER FÚTBOL SABIENDO QUE ES UNA CHICA}] = \dfrac{9}{16}$

f) $P[\text{CHICO SABIENDO QUE QUIERE VER TENIS}] = \dfrac{2}{5}$

29 **Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.**

Durante unos días hacemos 1 000 veces la experiencia de *agitar*, *inclinar la botella* y *anotar el color de la bola que se ve*. Al final, hemos obtenido estos resultados:

$$f(⚫) = 461 \qquad f(🔴) = 343 \qquad f(🟢) = 196$$

Podemos averiguar, con cierta seguridad, cuántas bolas hay de cada color. Hagámoslo con las negras:

$$f_r(⚫) = \frac{461}{1000} = 0{,}461$$

$$P[⚫] = \frac{n}{20} \quad (n \text{ es el número de bolas negras})$$

Como $f_r(⚫) \approx P[⚫]$, hacemos:

$$0{,}461 \approx \frac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0{,}461 = 9{,}22$$

Estimamos que el número de bolas negras es 9.

¿Cuántas bolas de cada color estimas que hay en la botella?

- Bolas rojas: $0{,}343 \approx \frac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0{,}343 = 6{,}86 \rightarrow n = 7$
- Bolas verdes: $0{,}196 \approx \frac{n}{20} \rightarrow n \approx 20 \cdot 0{,}196 = 3{,}92 \rightarrow n = 4$

Estimamos que hay 9 bolas negras, 7 rojas y 4 verdes.

30 **En un cajón hay calcetines. No sabemos cuántos, ni de qué colores. Sacamos un calcetín, anotamos el color y lo devolvemos al cajón. Lo hacemos cien veces y hemos obtenido 42 veces un calcetín negro; 8 veces uno rojo, y 50 veces uno blanco.**

a) Haz una tabla de frecuencias relativas.

b) ¿Qué porcentaje de calcetines de cada color hay en el cajón?

c) Si sabemos que hay 20 calcetines, ¿cuántos estimas que hay de cada color?

a)

	f	f_r
NEGRO	42	42/100 = 0,42
ROJO	8	8/100 = 0,08
BLANCO	50	50/100 = 0,5

b) Podemos estimar que, aproximadamente, el 42 % de los calcetines son negros, el 8 % rojos, y el 50 %, blancos.

c) Habrá 8 calcetines negros, 2 rojos y 10 blancos.

Página 309

31 **Hemos de jugar a cara o cruz con una cierta ficha. Antes de empezar, experimento con ella y obtengo 37 caras y 3 cruces.**

¿Qué te parece más correcto, apostar por cruz porque «ya es hora de que salga» o por cara porque «parece que sale más»?

Si de 40 lanzamientos se han obtenido 37 CARAS y 3 CRUCES, las probabilidades de C o + serán equivalente a sus frecuencias relativas (el número de lanzamientos es relativamente grande). Por tanto:

$f_r(\text{C}) \approx P[\text{C}] = \dfrac{37}{40}$ $\qquad$ $f_r(+) \approx P[+] = \dfrac{3}{40}$

Sería más correcto apostar por CARA.

32 **En cada mano del juego *Piedra, papel o tijera* puedes ganar, empatar o perder. Si me juego un refresco, ¿qué probabilidad tengo de ganarlo a la primera? ¿Qué probabilidad tengo de llegar a la segunda y ganarlo? ¿Y a la tercera y ganarlo?**

Nos podemos ayudar de un diagrama de árbol para averiguar que:

$P[\text{GANAR EN LA 1.}^{\text{a}} \text{ PARTIDA}] = \dfrac{1}{3}$

Si quiero ganar dos partidas, $P[\text{GANAR EN LA 1.}^{\text{a}} \text{ Y 2.}^{\text{a}} \text{ PARTIDAS}] = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$

Si quiero llegar a la tercera y ganar, $P[\text{GANAR EN LA 1.}^{\text{a}}\text{, 2.}^{\text{a}} \text{ Y 3.}^{\text{a}} \text{ PARTIDAS}] = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$

33 **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?**

Podemos ayudarnos de un diagrama de árbol para comprobar que la probabilidad que nos piden es la siguiente:

$P[< 5 \text{ y } < 5 \text{ y } < 5] = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{8}{27}$

34 **Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38. Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?**

Llamaremos $p\uparrow$ al suceso “caer con la punta hacia arriba” y $p\downarrow$ “caer con la punta hacia abajo”.

Si $P[p\uparrow] = 0{,}38 \Rightarrow P[p\downarrow] = 1 - 0{,}38 = 0{,}62$. Por tanto:

$P[\text{LAS DOS DE DISTINTA FORMA}] = P[p\uparrow \text{ y } p\downarrow] + P[p\downarrow \text{ y } p\uparrow] = 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}62 \cdot 0{,}38 \approx 0{,}47$

35 **En un laboratorio, para que un medicamento salga al mercado tiene que pasar tres controles. La probabilidad de superar el primero es 0,89; la de superar el segundo es 0,93 y la de superar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto no sea apto para salir al mercado?**

Llamaremos SC_n al suceso “superar el control n”.

$P[SC_1] = 0{,}89 \Rightarrow P[\text{no } SC_1] = 1 - 0{,}89 = 0{,}11$

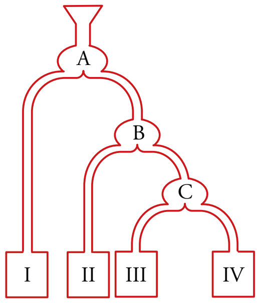
$P[SC_2] = 0{,}93 \Rightarrow P[\text{no } SC_2] = 1 - 0{,}93 = 0{,}07$

$P[SC_3] = 0{,}85 \Rightarrow P[\text{no } SC_3] = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

$P[\text{NO APTO}] = P[\text{no } SC_1] + P[\text{no } SC_1 \text{ y no } SC_2] + P[SC_1 \text{ y } SC_2 \text{ y no } SC_3] =$

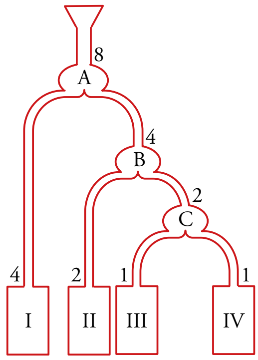
$= 0{,}11 + 0{,}89 \cdot 0{,}07 + 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}15 \approx 0{,}3$

36 **Dejamos caer una bola en el embudo de este aparato.**



Calcula la probabilidad de que caiga en cada uno de los depósitos I, II, III y IV.

Si tirásemos 8 bolas y se repartieran equitativamente:



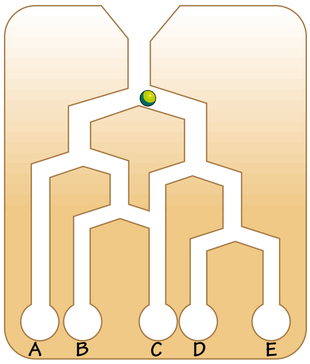
$$P[\text{I}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P[\text{II}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

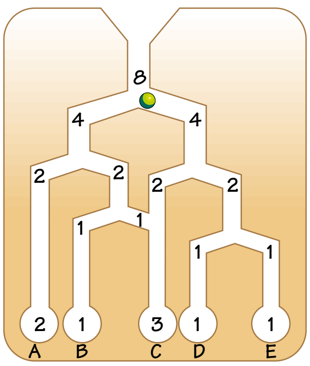
$$P[\text{III}] = \frac{1}{8}$$

$$P[\text{IV}] = \frac{1}{8}$$

37 **Cuál es la probabilidad de que una bola caiga en cada uno de los depósitos?**



Si tirásemos 8 bolas:



$$P[\text{A}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P[\text{B}] = \frac{1}{8}$$

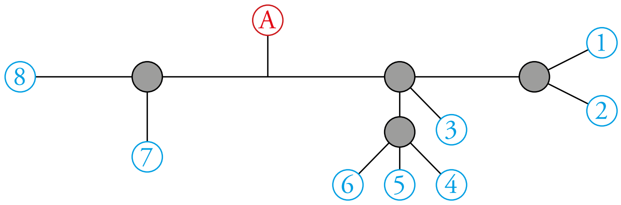
$$P[\text{C}] = \frac{3}{8}$$

$$P[\text{D}] = \frac{1}{8}$$

$$P[\text{E}] = \frac{1}{8}$$

Resuelve: un poco más difícil

38 **Esto es un plano de parte de la red de cercanías de una ciudad. En cada bifurcación es igual de probable que el tren continúe por un camino u otro y no se puede ir hacia atrás.**



Si una persona sube a un tren en A sin saber adónde se dirige, ¿cuál es la probabilidad de que llegue a la estación 5?

Calcula la probabilidad de llegar a cada una de las otras estaciones.

Si el tren se encuentra en una bifurcación con 2 opciones, tiene 1/2 de probabilidad de ir por cada una de ellas. Si se encuentra en una bifurcación con 3 posibles opciones, tendrá 1/3 de probabilidad de ir por cada uno de los caminos, y así en todos los casos.

Para llegar de A a la estación 5 pasa por una bifurcación con 2 posibles caminos, otra con 3 posibles caminos y una última con otros tres posibles caminos.

Por tanto, $P[\text{LLEGAR A } 5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

$P[\text{LLEGAR A } 1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[\text{LLEGAR A } 2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[\text{LLEGAR A } 3] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P[\text{LLEGAR A } 4] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P[\text{LLEGAR A } 6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

$P[\text{LLEGAR A } 7] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[\text{LLEGAR A } 8] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

39 **Se ha hecho un análisis de sangre a 200 personas para determinar su grupo sanguíneo. También se ha estudiado su Rh.**

Los resultados se resumen en esta tabla:

	GRUPO A	GRUPO B	GRUPO AB	GRUPO O	TOTALES
RH+	74	12	6	70	162
RH–	18	3	1	16	38
TOTALES	92	15	7	86	200

a) Si elegimos al azar una persona de entre esas 200, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea A? ¿Y de que sea O? ¿Y de que tenga Rh+?

b) Si elegimos al azar una persona del grupo sanguíneo B, ¿cuál es la probabilidad de que tenga Rh+?

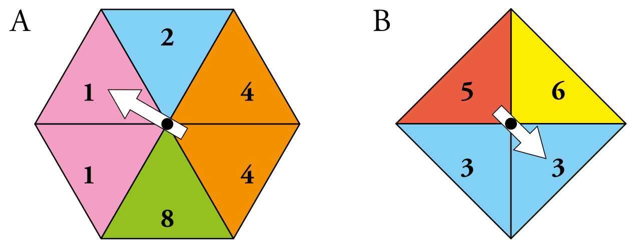
c) Sabiendo que una persona es del grupo A o B, ¿cuál es la probabilidad de que sea RH+?

a) $P[A] = \frac{92}{200} = 0{,}46$ $\quad P[O] = \frac{86}{200} = 0{,}43$ $\quad P[Rh+] = \frac{162}{200} = 0{,}81$

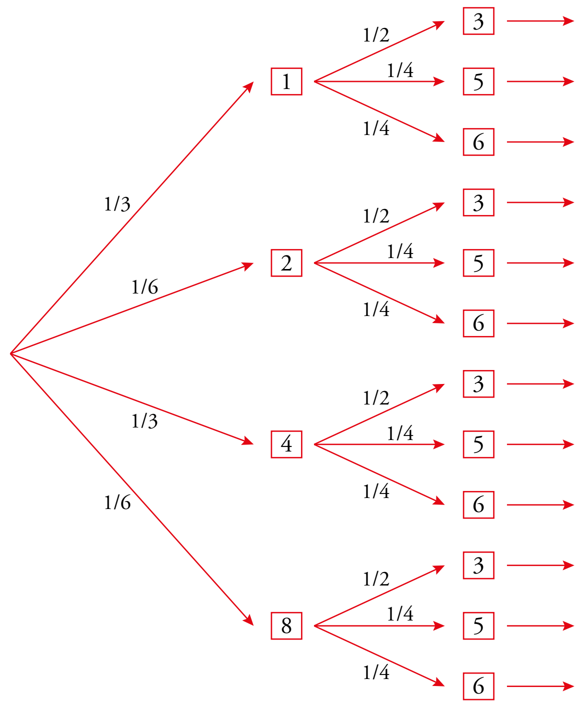
b) Si elegimos alguien con grupo B: $P[Rh+] = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

c) $P[\text{Rh+ sabiendo que es del grupo A o B}] = \frac{74+12}{92+15} = \frac{86}{107}$

40 **Se hace girar cada una de estas dos ruletas y gana el que consiga la puntuación más alta.**



Calcula la probabilidad de que gane A y la de que gane B.



$P[1, 3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P[1, 5] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[1, 6] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[2, 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[2, 5] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$P[2, 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$P[4, 3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$P[4, 5] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[4, 6] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[8, 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$P[8, 5] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$P[8, 6] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

$$P[\text{GANA A}] = P[4, 3] + P[8, 3] + P[8, 5] + P[8, 6] = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3}$$

En el resto de ocasiones gana B. Por tanto: $P[\text{GANA B}] = 1 - P[\text{GANA A}] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Página 310

Razona y calcula

El botánico austriaco Gregor Mendel cruzó plantas de flores rojas con otra variedad de la misma especie de flores blancas, y resultó que todas las de la segunda generación (plantas hijas) tenían las flores rosas.

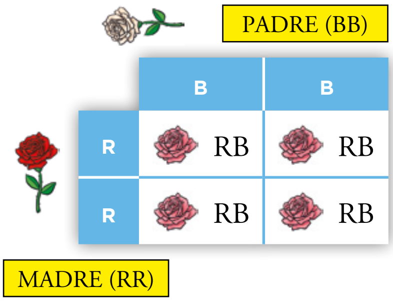
La explicación es la siguiente:

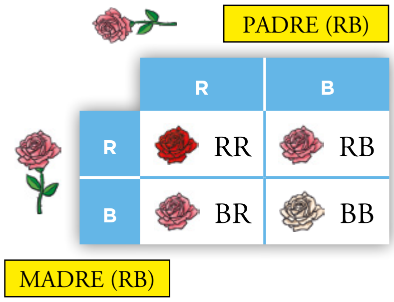
— El color viene determinado por un par de genes, uno del padre y otro de la madre.

— Los genes del padre y de la madre se combinan al azar en los hijos.

Así, cada planta hija tiene un gen rojo y otro blanco, con lo que sus flores son de color intermedio.

Sin embargo, en la tercera generación (plantas nietas) se complicaron las cosas. Al cruzar dos plantas de flores rosas, obtuvo blancas, rojas y rosas.





- **¿Cuál es la probabilidad de que una planta de la tercera generación tenga las flores blancas? ¿Y rojas? ¿Y de color rosa?**

- Fijándonos en la segunda de las tablas, es fácil ver que:

$$P[\text{BLANCA}] = P[\text{BB}] = \frac{1}{4}$$

$$P[\text{ROJA}] = P[\text{RR}] = \frac{1}{4}$$

$$P[\text{ROSA}] = P[\text{RB o BR}] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Entrénate resolviendo otros problemas

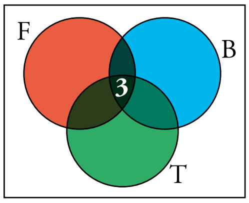
- **En una clase de 30 alumnas y alumnos:**

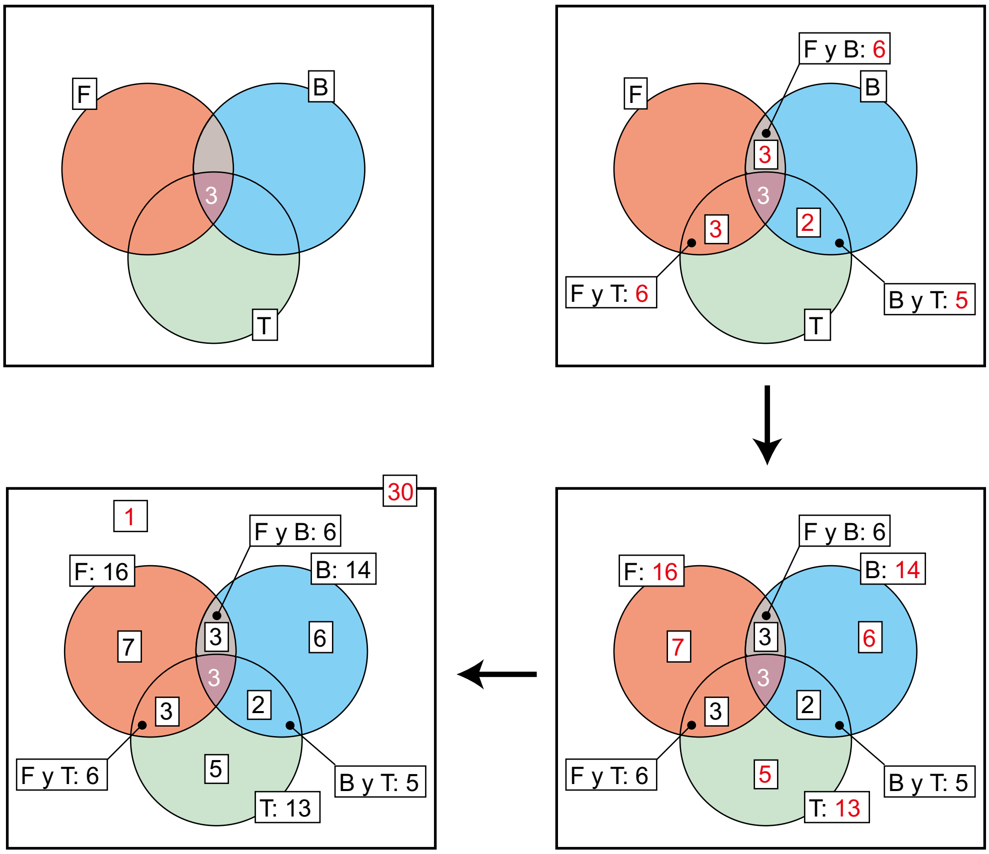
  — 16 practican fútbol; 14, baloncesto, y 13, tenis.

  — 6 practican fútbol y baloncesto, 6 practican fútbol y tenis y 5 practican baloncesto y tenis.

  — 3 practican los tres deportes.

  ¿Cuántos no practican ni fútbol, ni baloncesto ni tenis?





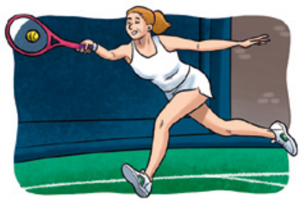
Siguiendo paso a paso los diagramas, está claro que el número de chicos y chicas que practica uno o dos o los tres deportes es: 3 + (3 + 3 + 2) + (7 + 6 + 5) = 29.

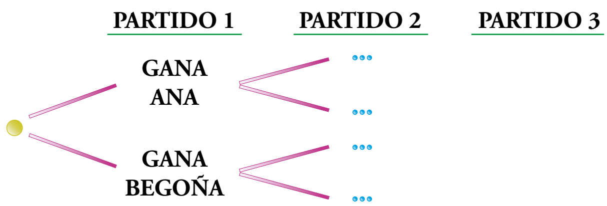
Como son 30 en total, solo uno de ellos no practica ningún deporte.

- **Ana y Begoña son las finalistas de un torneo de tenis. Gana el torneo quien venza en dos partidos consecutivos o en tres alternos.**

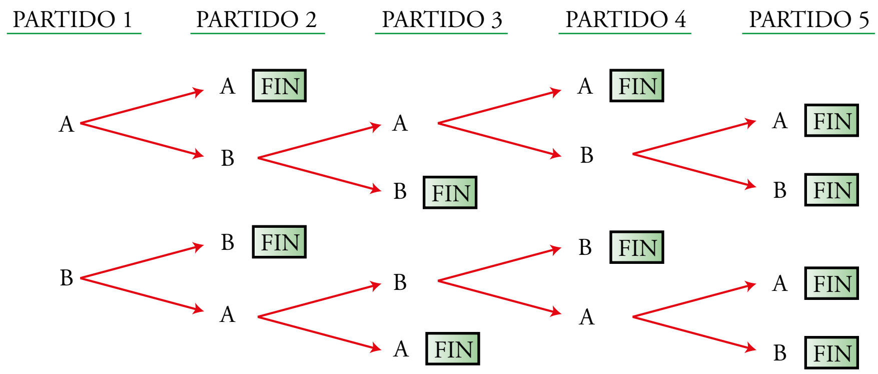
  Averigua todas las posibilidades que pueden darse.

  ¿Cuántos partidos, como máximo, tendrán que disputar para acabar el torneo?





En el siguiente diagrama, A significa «gana Ana» y B significa «gana Begoña».



Tiene que disputar, como máximo, 5 partidos.

AUTOEVALUACIÓN

1 **Escribimos cada letra de la palabra JUEGO en un papel diferente y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.**

a) Describe los sucesos elementales del experimento.

b) Describe el suceso «obtener vocal».

c) Describe el suceso contrario al anterior.

d) Si la palabra elegida fuera PROBABILIDAD, ¿cómo responderías a los apartados a), b) y c)?

a) E = {J, U, E, G, O}

b) Vocal = {U, E, O}

c) Consonante = {J, G}

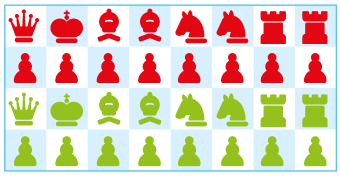
d) E = {P, R, O, B, A, I, L, D}; Vocal = {O, A, I}; Consonante = {P, R, B, L, D}

2 **Introducimos las siguientes tarjetas de un ajedrez en una bolsa y elegimos una al azar:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un peón? ¿Y de obtener un peón rojo?

b) Halla la probabilidad de obtener una ficha que no sea un peón rojo.

c) ¿Qué probabilidad hay de sacar una torre? ¿Y un caballo verde? ¿Y un rey?



a) $P[\text{PEÓN}] = \dfrac{16}{32} = \dfrac{1}{2}$

$P[\text{PEÓN ROJO}] = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$

b) $P[\text{NO PEÓN ROJO}] = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

c) $P[\text{TORRE}] = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$

$P[\text{CABALLO VERDE}] = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$

$P[\text{REY}] = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$

3 **Hemos lanzado 1 000 veces un dado de cuatro caras, numeradas del 1 al 4, obteniendo los siguientes resultados:**

CARA OBTENIDA	1	2	3	4
N.° DE VECES	180	370	262	188

a) ¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los posibles resultados?

b) ¿Se puede suponer que el dado es correcto?

a) $P[1] \approx \dfrac{180}{1000} = 0{,}18$ $P[2] \approx \dfrac{370}{1000} = 0{,}37$

$P[3] \approx \dfrac{262}{1000} = 0{,}26$ $P[4] \approx \dfrac{188}{1000} = 0{,}19$

b) El dado no es correcto, porque la probabilidad de cada cara no es la misma.

4 **Marta tira un dado y su hermana Alba lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Alba sea mayor que la de Marta?**

Construimos una tabla:

		ALBA					
		1	2	3	4	5	6
MARTA	1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
	2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
	3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
	4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
	5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
	6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

Hay 36 posibles casos, 15 de los cuales (los sombreados) son favorables para Alba. Por tanto,

$P[\text{ALBA TENGA MAYOR PUNTUACIÓN QUE MARTA}] = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

5 **Lanzamos dos dados sucesivamente. Halla la probabilidad de obtener «impar» en el primero y «mayor que 4» en el segundo.**

Podemos ayudarnos de un diagrama de árbol para comprobar que la probabilidad pedida es la siguiente:

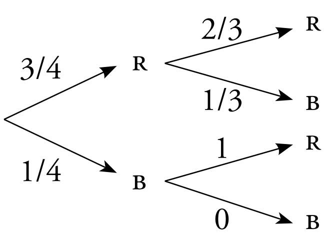
$$P[\text{IMPAR Y} > 4] = P[\text{IMPAR}] \cdot P[> 4] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

6 **De una urna con tres bolas rosas y una blanca se extraen dos bolas al azar. Halla estas probabilidades:**

a) $P[\text{DOS ROSAS}]$

b) $P[\text{DOS BLANCAS}]$

c) $P[\text{UNA ROSA Y OTRA BLANCA}]$



a) $P[\text{RR}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

b) $P[\text{BB}] = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$

c) $P[\text{RB}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

7 **Extraemos una bola de la urna A y la echamos en la B. Después, sacamos una bola de B.**

A B

Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Haya alguna roja.

a) P[roja en A y roja en B] =

= P[roja en A] · P[roja en B habiendo obtenido roja en A] = $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{8}$

b) P[negra en A y negra en B] =

= P[negra en A] · P[negra en B habiendo obtenido negra en A]= $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

c) Es el suceso contrario de la unión de los sucesos de a) y b). Por tanto:

P[alguna roja] = $1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{16} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

8 **Se elige al azar una persona de este grupo:**

	CHICOS	CHICAS	TOTAL
PRACTICA DEPORTE	20	10	30
NO PRACTICA DEPORTE	2	8	10
TOTAL	22	18	40

Halla la probabilidad de que:

a) Sea chica.

b) Sea chico.

c) Haga deporte.

d) Sea chica y practique deporte.

e) Sabiendo que es chico, practique deporte.

a) P[chica] = $\frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

b) [chico] = $\frac{22}{40} = \frac{11}{20}$

c) P[deporte] = $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

d) [chica y deporte] = $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

c) P[deporte siendo chico] = $\frac{20}{22} = \frac{10}{11}$