4

OPCIÓN A

EDUCACIÓN SECUNDARIA

Matemáticas

J. Colera, Mª J. Oliveira, I. Gaztelu, M. Martínez

ADAPTACIÓN CURRICULAR

Esta serie de **Matemáticas** responde a un proyecto pedagógico creado y desarrollado por Anaya Educación para la ESO. En su elaboración han participado:

Autores: José Colera, M.ª José Oliveira, Ignacio Gaztelu, M.ª Mar Martínez y Leticia Colera Cañas

Coordinación editorial: Mercedes García-Prieto

Edición: Vicente Vallejo

Diseño de cubiertas e interiores: Miguel Ángel Pacheco y Javier Serrano

Tratamiento infográfico del diseño: Javier Cuéllar, Patricia Gómez y Teresa Miguel

Equipo técnico: Maribel Arnau

Corrección: Sergio Borbolla

Ilustraciones: Montse Español y Álex Orbe

Edición gráfica: Olga Sayans

Fotografías: Age Fotostock, Archivo Anaya (Candel, C.; Cosano, P.; Leiva, Á. de; Martin, J.; Padura, S.; Pérez-Uz, B.; Ruiz, J.B.; Steel, M.), Corbis/Cordon Press, NASA, NASA/JPL/University of Arizona.

Las normas ortográficas seguidas son las establecidas por la Real Academia Española en la nueva **Ortografía de la lengua española,** publicada en el año 2010.

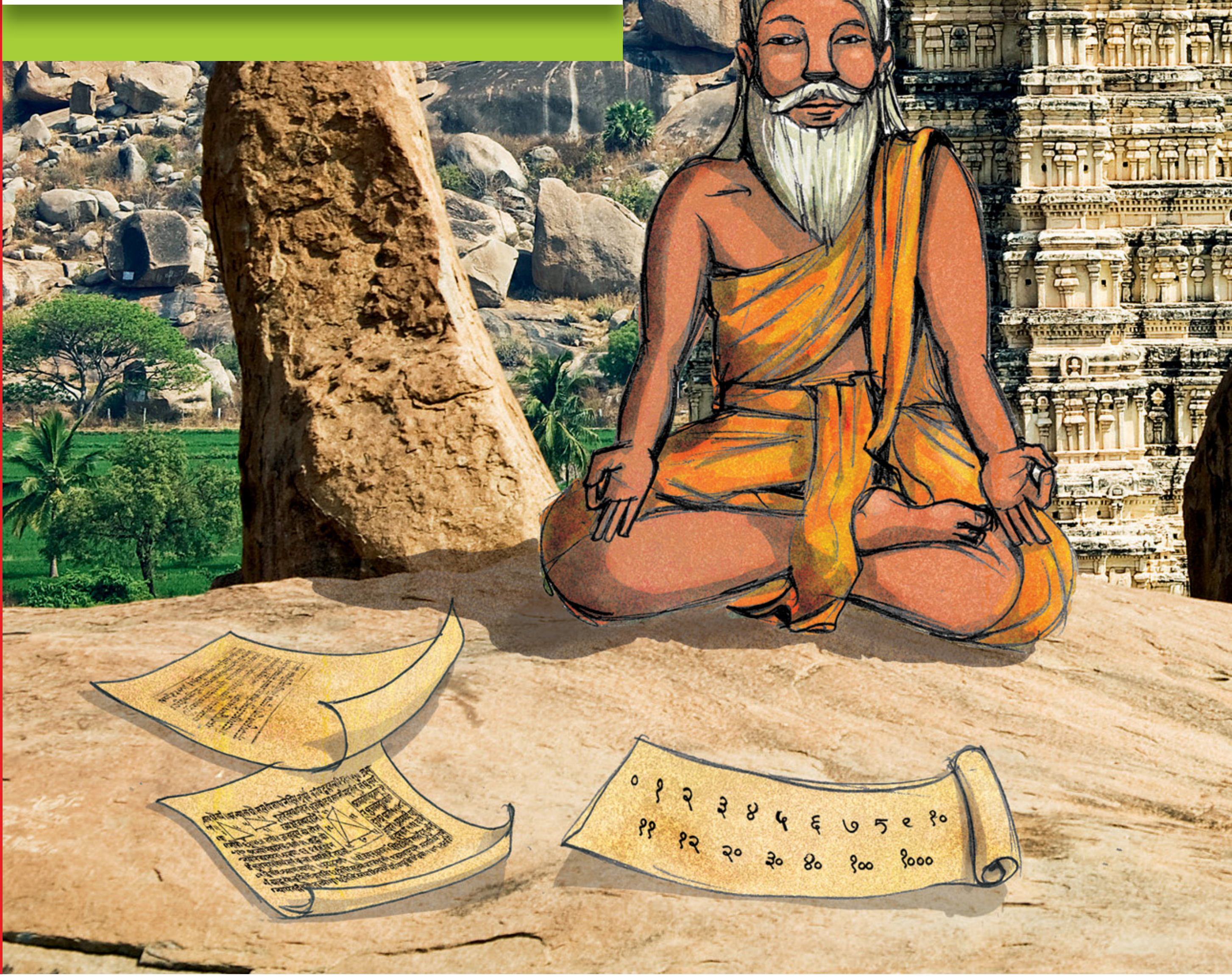
Índice

1 Números enteros y racionales

Los *números naturales* han sido utilizados por todas las civilizaciones desde la más remota antigüedad.

El papel de los negativos, y, sobre todo, el del cero, resultó más difícil de concebir. Por ello, los *números enteros* no acabaron de tomar forma hasta finales del siglo VII, en la India. De allí nos llegaron por medio de los árabes en el siglo IX, junto con el sistema de numeración decimal-posicional.

Las *fracciones* se empezaron a utilizar desde muy antiguo, pero su uso al estilo actual se acabó de consolidar en Europa hacia el siglo XIV.



1 Números naturales

Júpiter es el 5.° planeta por su distancia al Sol y el 1.° si los ordenamos por tamaños.

Contamos los alumnos de una clase, el número de losetas que hay en un suelo o el número de cuadrados que se pueden formar sobre una cierta trama.

Se cuenta con **números naturales.** Los números naturales son, como sabes, 0, 1, 2, 3, …, 10, 11, …, 100, 101, … Hay infinitos. Al conjunto de todos ellos se le denomina $\mathbb{N}$. Están ordenados. Esto nos permite representarlos sobre una recta:

Los números naturales también sirven para numerar. Por ejemplo, decimos que tal alumno es el 15.° (decimoquinto) de la lista.

Ejemplo

Al repartir 100 elementos entre 7 individuos, obtenemos de cociente 14 (a cada individuo le corresponden 14 elementos) y de resto 2 (quedan 2 elementos sin repartir).

Suma y multiplicación

Los números naturales se pueden sumar y multiplicar; el resultado de esas operaciones es, también, un número natural.

Recuerda que en las expresiones $a \cdot b + c$ y $a + b \cdot c$ la multiplicación se efectúa antes que la suma. Cuando queremos dar prioridad a la suma, hemos de indicarlo con paréntesis: $a \cdot (b + c)$, $(a + b) \cdot c$.

División

La idea de división de números naturales es la de reparto. La división 100 : 5 = 20 se interpreta como un reparto de 100 elementos (dividendo) entre 5 partes (divisor), de manera que a cada parte le corresponden 20 elementos (cociente). Cuando con el reparto acabamos con todos los elementos disponibles, como es este caso, la **división** se llama **exacta.** Cuando sobran algunos elementos, la **división** se llama **entera.** En ella, además de un cociente, se obtiene un **resto.**

Entrénate

1. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones enteras:

   a) 328 : 12　　b) 297 : 35

   c) 3 854 : 50　　d) 7 536 : 100

2. Completa las siguientes igualdades en tu cuaderno:

   a) $237 = 24 \cdot 9 + ...$

   b) $178 = 5 \cdot .... + 3$

   c) $324 = 13 \cdot .... + ...$

Potencias y raíces

Como sabes, una potencia de números naturales es, en definitiva, una multiplicación reiterada. Por ejemplo: $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$. Con solo esa referencia se obtienen las propiedades de las potencias.

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Si $7^4 = 2\,401$, entonces $\sqrt[4]{2\,401} = \sqrt[4]{7^4} = 7$. En $\mathbb{N}$ solo tienen sentido las raíces exactas.

Actividades

1 Calcula:

a) $3^3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$　　b) $(2 \cdot 5)^6$　　c) $(2^3)^2$

d) $2^{(3^2)}$　　e) $\sqrt[3]{3\,375}$　　f) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$

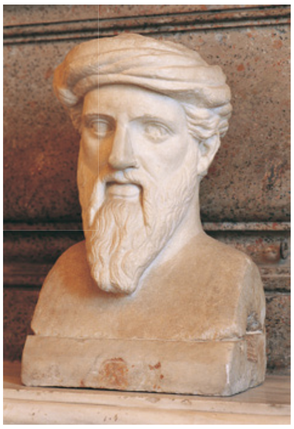
2 Hoy es lunes. Mañana será… Dentro de dos días será… Dentro de 25 días será…

a) ¿Qué día de la semana será dentro de 357 días?

b) ¿Qué día de la semana será pasados $7a + 3$ días, donde a es un número natural cualquiera?

c) ¿Cómo expresarías, en general, el número de días que han de transcurrir para que sea sábado?

2 Números enteros



Busto de Pitágoras.

A veces, para contar, se requieren cantidades negativas. Por ejemplo:

— Pitágoras murió en el –507 significa que murió en el año 507 antes de Cristo.

— Un saldo bancario de –234 € significa que se deben 234 € al banco.

Los números enteros negativos junto con los números naturales forman el conjunto de los **números enteros,** que se denomina $\mathbb{Z}$. Con ellos, además de sumar y multiplicar, podemos restar con la seguridad de que el resultado siempre será un número entero. Los números enteros se pueden representar sobre una recta:

–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Esta representación en la recta supone el siguiente criterio de ordenación:

- Los naturales (el cero y los enteros positivos) ya estaban ordenados.
- Todos los números naturales son mayores que los enteros negativos.
- Si a y b son números naturales y $a < b$, entonces $-a > -b$.

Cálculo mental

Di con qué edad murió cada uno de los siguientes personajes, cuyos años de nacimiento y muerte se dan:

Pitágoras (–582, –507)

Platón (–428, –347)

Octavio Augusto (–63, 14)

Al-Jwarizmi (780, 850)

Einstein (1879, 1955)

Valor absoluto de un número entero

El valor absoluto de un número es su magnitud si prescindimos de su signo. Se escribe así, $|x|$, y se define del siguiente modo:

- El valor absoluto de un número natural es él mismo: $|5| = 5$, $|0| = 0$
- El valor absoluto de un número negativo es su opuesto: $|-27| = 27$

Gráficamente, el valor absoluto de un número es su distancia al 0:

$|-5| = 5$ $\quad$ $|3| = 3$

–5 0 3

Ejemplos

- $7 - 5 - 11 + 15 - 17 + 3 =$
  $= 7 + 15 + 3 - 5 - 11 - 17 =$
  $= (7 + 15 + 3) - (5 + 11 + 17) =$
  $= 25 - 33 = -8$
- $3 - 5 + 8 - (4 - 13 + 6 - 11) =$
  $= 3 - 5 + 8 - 4 + 13 - 6 + 11 =$
  $= (3 + 8 + 13 + 11) +$
  $- (5 + 4 + 6) = 35 - 15 = 20$

Reglas para operar con números enteros

- Para sumar números positivos y negativos, agrupamos unos y otros, restamos los resultados y ponemos el signo del que tenga mayor valor absoluto.
- Si un paréntesis va precedido del signo menos, se puede suprimir cambiando el signo de todos los sumandos que haya dentro.
- Para multiplicar números enteros, recordemos la **regla de los signos:**

$+ \cdot + = + \qquad + \cdot - = - \qquad - \cdot + = - \qquad - \cdot - = +$

Actividades

1 Ordena de menor a mayor: –4, 19, 7, 0, –6

2 Calcula:

a) $||-3||$ b) $|5 + (3 - 11)|$

c) $|5 + |3 - 11||$ d) $|30 - (-20 - 9)|$

3 Calcula:

a) $[(1 - 4) - (5 - 3) - (-6)] \cdot [-3 + (-7)]$

b) $-3(4 - 2) - 4(3 - 8) - [4 \cdot (-5)] \cdot [(-3) \cdot 11]$

c) $|3 - 3 \cdot (-7) - |5 \cdot (-8)||$

Cálculo mental

$2^2 =$	$(-2)^2 =$
$2^3 =$	$(-2)^3 =$
$5^2 =$	$(-10)^3 =$
$1^7 =$	$(-1)^7 =$
$10^4 =$	$(-10)^4 =$

Potencias de base entera y exponente natural

Recuerda: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$ $\quad a$ es la base; n, el exponente.

Por ejemplo:

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \qquad (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \qquad (-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

- Si a es positivo, a^n es positivo cualquiera que sea n natural distinto de cero.
- Si a es negativo: $\begin{cases} n \text{ par} \to a^n \text{ positivo. Por ejemplo, } (-2)^4 = 16. \\ n \text{ impar} \to a^n \text{ negativo. Por ejemplo, } (-2)^5 = -32. \end{cases}$

Propiedades de las potencias

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — Por ejemplo: $(-2)^3 \cdot (-2)^5 = (-2)^{3+5} = (-2)^8$
2. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ — Por ejemplo: $6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$
   $(-2)^5 = (-1 \cdot 2)^5 = (-1)^5 \cdot 2^5 = -2^5$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — Por ejemplo: $(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$
4. Si $m > n$, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — Por ejemplo: $\dfrac{10^7}{10^4} = 10^{7-4} = 10^3$

Entrénate

1. Calcula las siguientes potencias:
   $(-2)^3 \quad -2^3 \quad 2^3 \quad (-2)^4 \quad -2^4 \quad 2^0$
2. Ordena de menor a mayor.
   $(-5)^2 \quad -4^3 \quad (-1)^{105} \quad 7^2 \quad 11^0 \quad -3^2$

Ejercicios resueltos

1. Calcular estas potencias:

$\mathbf{3^2, -3^2, (-3)^2, -(-3)^2}$

$\mathbf{2^3, -2^3, (-2)^3, -(-2)^3}$

1. $3^2 = 9 \qquad -3^2 = -9 \qquad (-3)^2 = 9 \qquad -(-3)^2 = -9$
   $2^3 = 8 \qquad -2^3 = -8 \qquad (-2)^3 = -8 \qquad -(-2)^3 = -(-8) = 8$

2. Simplificar:

a) $\mathbf{3^5 \cdot 2^3 \cdot 2^2}$ **b)** $\mathbf{(5^2)^3 \cdot \dfrac{2^8}{2^2}}$

2. a) $3^5 \cdot 2^3 \cdot 2^2 = 3^5 \cdot (2^3 \cdot 2^2) = 3^5 \cdot 2^{3+2} = 3^5 \cdot 2^5 = (3 \cdot 2)^5 = 6^5$
   b) $(5^2)^3 \cdot \dfrac{2^8}{2^2} = 5^{2 \cdot 3} \cdot 2^{8-2} = 5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 = 10^6$

3. Realizar:

$\mathbf{(-3+1)^3 + (5-8)^4 \cdot (-1)^9 - (-5)^2 \cdot (-1)^4}$

3. $(-3+1)^3 + (5-8)^4 \cdot (-1)^9 - (-5)^2 \cdot (-1)^4 = (-2)^3 + (-3)^4 \cdot (-1) - 5^2 \cdot 1 =$
   $= -8 - 81 - 25 = -114$

Actividades

4 Calcula las siguientes potencias:

a) -10^5 b) $(-10)^5$ c) $(-10)^6$ d) $-(-10)^5$

e) $(-1)^{100}$ f) -10^6 g) -1^6 h) $-(-1)^{101}$

5 Simplifica: $\dfrac{(-3)^5 \cdot (-3)^8}{[(-3)^3]^3} \cdot 5^4$

6 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $[(1-7) - (8-3) - (-2)^5] \cdot [15 + (-11)]^2$

b) $(7-3) \cdot [4 - (-3)] + (5-1)^2 \cdot [6 - (-3)^4]$

c) $(-3)^2 - (-3^3) + 5^2 \cdot (-5)^2 - [2 - (-3)^4 \cdot (-2)]$

d) $17 - (-4)(-3+6) - 2[4 - 5(2-3)^7]^2$

3 Números racionales. Fracciones

Cálculo mental

1. Compara (mayor que o menor que) los siguientes pares de fracciones:

$\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{7}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{7}{9}$ y $\frac{11}{10}$

1 y $\frac{3}{4}$ $\quad$ 1 y $\frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{7}{5}$ y 2

$\frac{11}{5}$ y 2 $\quad$ $\frac{1}{9}$ y $\frac{1}{10}$ $\quad$ $\frac{10}{9}$ y $\frac{11}{10}$

2. Calcula mentalmente.
   a) La mitad de 7/8.
   b) La tercera parte de 9/5.
   c) La mitad de la quinta parte de –4.
   d) El triple de la mitad de 2/3.

3. Calcula mentalmente:
   a) $\frac{4}{3}$ de 21 $\quad$ b) $\frac{5}{2}$ de 10
   c) $\frac{3}{10}$ de 1 millón
   d) $\frac{7}{20}$ de cien mil

Números mixtos

Las expresiones $2 + \frac{1}{3}$ y $4 + \frac{3}{5}$ que resultan de sumar un número entero con una fracción propia, se llaman **números mixtos.**

También son números mixtos $-2 - \frac{1}{3}$ y $-4 - \frac{3}{5}$.

Números fraccionarios para expresar medidas

Para medir, suele ser necesario fraccionar la unidad. De aquí surge la idea de número fraccionario: la mitad, la quinta parte, la milésima parte… de la unidad. Las fracciones son las expresiones numéricas de los números fraccionarios.

Son números fraccionarios: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{1}{100}, \frac{145}{1\,000}$

En todas estas fracciones, el numerador es menor que el denominador y, por tanto, son partes de la unidad. Se llaman **fracciones propias.**

También son fraccionarios los números: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}, \ \frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

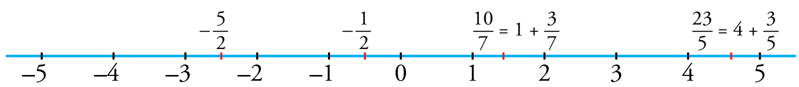
Cada uno de ellos se compone de varias unidades enteras más una fracción de la unidad.

Asimismo, son fraccionarios los números representados por fracciones negativas.

Los números **fraccionarios** complementan a los **enteros** dando lugar, entre todos, a los números **racionales.** El conjunto de todos los números racionales se designa por $\mathbb{Q}$. Los elementos de $\mathbb{Q}$ se caracterizan porque se pueden poner en forma de fracción.

Representación en la recta

Los números fraccionarios pueden ser representados en la recta junto a los enteros:



De este modo se tendrían todos los números racionales. Estos se aglomeran en la recta de tal manera que, entre cada dos de ellos, hay otros infinitos.

Pero, a pesar de tal aglomeración, en la recta aún caben infinitos números no racionales, según veremos en la unidad 3.

Actividades

1 Copia en tu cuaderno y completa cada frase con una fracción.

a) Son bisiestos ☐ de los años.

b) Los meses con 31 días son ☐ del total.

c) Entre los números menores que 30, la proporción de primos es ☐. (Recuerda que 1 no es primo).

d) Entre los números de 3 cifras, la proporción de capicúas es ☐.

2 Expresa como número mixto (suma de un entero y una fracción menor que la unidad) las siguientes fracciones:

$$\frac{40}{9}, \ \frac{86}{5}, \ \frac{127}{10}, \ \frac{127}{12}, \ -\frac{43}{8}$$

3 Representa, aproximadamente, en la recta:

$$\frac{13}{5}, \ \frac{18}{9}, \ -\frac{7}{5}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{11}{5}, \ \frac{2}{5}, \ \frac{7}{10}, \ -\frac{17}{10}$$

Simplificación de fracciones. Fracciones equivalentes

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número entero, al hacerlo diremos que la hemos **simplificado** o reducido.

Por ejemplo: $\frac{28}{24} = \frac{7}{6}$ $\frac{15}{-6} = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$ $\frac{5\,000}{7\,500} = \frac{2}{3}$

Cuando una fracción no se puede reducir más, diremos que es una **fracción irreducible.** Las fracciones irreducibles se suelen poner con denominador positivo.

Dos fracciones son **equivalentes** si al simplificarlas dan lugar a la misma fracción irreducible. Por ejemplo, $\frac{-10}{35}$ y $\frac{8}{-28}$ son equivalentes:

$$\frac{-10}{35} = \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7} \qquad \frac{8}{-28} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$$

Cálculo mental

1. Simplifica las fracciones:

$\frac{10}{15}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{4}{2}$
$\frac{14}{21}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{75}{100}$
$\frac{33}{44}$	$\frac{34}{17}$	$\frac{52}{26}$

2. Las nueve fracciones anteriores son equivalentes tres a tres. Clasifícalas.
3. Escribe seis fracciones equivalentes a $\frac{300}{500}$.

   ¿Cuál es la correspondiente fracción irreducible?

La fracción como operador

Para hallar los $\frac{3}{4}$ de 500 €, empezamos calculando $\frac{1}{4}$ de 500 € = 500 : 4 = 125 €.

Por tanto, $\frac{3}{4}$ de 500 € es 3 veces 125 € = 375 €.

> La fracción $\frac{a}{b}$ de una cantidad C se obtiene haciendo:
>
> $(C : b) \cdot a$ o bien $(C \cdot a) : b$

Problemas resueltos

1. Montserrat tiene ahorrados 2 380 €. Gasta 3/7 en un equipo de informática. ¿Cuánto le queda?

2. Una ciudad tenía 120 000 habitantes en el año 1985. En un decenio aumentó 4/15. En el siguiente decenio aumentó 9/16. ¿Cuántos habitantes tenía en el año 2005?

1. $\frac{3}{7}$ de 2 380 = (2 380 : 7) · 3 = 340 · 3 = 1 020 € vale el equipo.

   2 380 € – 1 020 € = 1 360 € le quedan.

2. Aumentó en el primer decenio:

   4/15 de 120 000 = (120 000 : 15) · 4 = 8 000 · 4 = 32 000 habitantes.

   En 1995 había 120 000 + 32 000 = 152 000 habitantes.

   Aumentó en el segundo decenio:

   9/16 de 152 000 = (152 000 : 16) · 9 = 9 500 · 9 = 85 500

   En 2005 había 152 000 + 85 500 = 237 500 habitantes.

Actividades

4 El presupuesto anual de una oficina es 297 000 €. Gastan 2/11 partes en equipamiento. ¿Cuánto dinero les queda para lo demás?

5 En un depósito había 2 600 *l* de gasolina. Se gastan 3/20 primero. Después, se utilizan 2/13 de lo que quedaba. ¿Cuánto queda?

4 Operaciones con fracciones

Cálculo mental

$1 + \frac{1}{2} =$ $\quad$ $1 - \frac{1}{3} =$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$ $\quad$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} =$ $\quad$ $3 \cdot \frac{4}{9} =$

$10 \cdot \frac{9}{5} =$ $\quad$ $\frac{5}{9} \cdot \frac{12}{10} =$

$\frac{1}{3}$ de $600 =$ $\quad$ $\frac{2}{3}$ de $600 =$

$\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $600 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ de $600 =$

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$ de $800 =$

$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{5}$ de $800 =$

$1 : \frac{1}{3} =$ $\quad$ $\frac{3}{7} : 4 =$

$1 : \frac{1}{10} =$ $\quad$ $10 : \frac{1}{100} =$

Suma y resta

Sumar fracciones con el mismo denominador es muy fácil: se suman sus numeradores y se mantiene el denominador.

Para **sumar** (y **restar**) fracciones con distinto denominador, tendremos que transformarlas en otras equivalentes con el mismo denominador.

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} - 5 = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{1} = \frac{15}{20} + \frac{16}{20} - \frac{100}{20} = \frac{15 + 16 - 100}{20} = \frac{-69}{20}$$

Producto

La tercera parte de la cuarta parte de algo es su doceava parte: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Razonando de forma análoga, podemos ver que $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}$.

El **producto** de dos fracciones es otra fracción cuyo denominador es el producto de sus denominadores y cuyo numerador es el producto de sus numeradores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Cociente

El inverso del número 5 es $\frac{1}{5}$. Y viceversa, el inverso de $\frac{1}{5}$ es 5. La inversa de la fracción $\frac{5}{7}$ es $\frac{7}{5}$. Y viceversa. En general, la inversa de la fracción $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

El **cociente** de dos fracciones es el producto de la primera por la inversa de la segunda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Actividades

1 Calcula.

a) $4 - \frac{11}{3} + \frac{7}{3}$

b) $\frac{3}{4} - 7 + \frac{46}{8}$

c) $\frac{7}{3} - \left(\frac{2}{6} + \frac{5}{9}\right)$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

e) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

f) $\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$

2 Calcula.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{-2}$

b) $\dfrac{\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)}{\frac{3}{4} + 1}$

c) $\dfrac{(-3)\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)}{(-2)\left(\frac{4}{3} - \frac{6}{5}\right)}$

d) $\dfrac{\frac{4}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{10}}{1 - \frac{7}{15}}$

Problemas resueltos

1. Jorge ha gastado 2/7 de la paga en música y 1/5 en libros.

a) ¿Qué fracción de la paga ha gastado?

b) ¿Qué fracción le queda?

1. a) Ha gastado $\frac{2}{7} + \frac{1}{5} = \frac{10}{35} + \frac{7}{35} = \frac{17}{35}$ en música y libros.

b) La fracción que le queda es $1 - \frac{17}{35} = \frac{35 - 17}{35} = \frac{18}{35}$.

2. En una clase hay 36 alumnos, 2/3 de los cuales son chicos. Las 3/4 partes de las chicas dan música. ¿Qué fracción del total son las chicas de música? ¿Cuántas son?

2. $\frac{2}{3}$ son chicos, $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ son chicas.

Las chicas que dan música son $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ del total de alumnos de la clase.

Hay $\frac{1}{4}$ de 36 = 9 chicas que dan clase de música.

3. En una frutería se venden, por la mañana, 3/5 de la fruta que había y, por la tarde, la mitad de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción queda por vender?

b) Si al empezar el día había 750 kg, ¿cuántos kilos de fruta se vendieron?

3. a) MAÑANA: Se venden $\frac{3}{5}$ del total. Quedan $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ del total.

TARDE: Se vende $\frac{1}{2}$ de lo que queda $\rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ del total.

Se han vendido $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ del total. Queda sin vender $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

b) En total se vendieron $\frac{4}{5}$ de 750 kg $= \frac{4 \cdot 750}{5} = 600$ kg de fruta.

Actividades

3 Un terreno se divide en tres partes. Dos de ellas son 2/5 y 1/3 del total. ¿Cuál es la más grande?

4 De un sueldo de 1 500 €, se gasta en comida la sexta parte, y en el pago de la hipoteca, 350 € más que en comida. ¿Qué fracción del sueldo queda para otros gastos?

5 Los 2/5 de los chicos de una clase llevan gafas. En esa clase, 7/12 son chicas. En la clase hay 36 personas. ¿Cuántos son chicos con gafas?

6 Un dentista dedica 1 h y 3/4 a su consulta. Si recibe a 15 pacientes, ¿qué fracción de hora puede dedicar a cada uno? ¿Cuántos minutos son?

7 Un club dispone de 1 200 entradas para un partido. Asigna 3/5 partes a su hinchada y 5/8 del resto a la visitante. ¿Cuántas entradas quedan para venta libre?

8 Reparto entre cuatro: A y B se llevan, respectivamente, 2/7 y 13/21 del total. C recibe 7/10 del resto. Y D, finalmente, 390 €. ¿Cuánto dinero se repartió?

9 Mauro compra un piso de 245 000 €. Aporta en efectivo 3/10 de dicha cantidad, y solicita para el resto una hipoteca. ¿Cuánto dinero pide de hipoteca?

10 Ana tenía ahorrados 13 500 € al empezar el año. En el primer semestre consiguió ahorrar 5/12 de lo que ya tenía. Sin embargo, en el segundo trimestre ahorró 1/5 menos de lo que había ahorrado hasta Junio. ¿A cuánto ascienden sus ahorros al terminar el año?

11 El primer día, un jardinero realiza la tercera parte del trabajo; al día siguiente, 3/4 del resto, y el tercer día termina su tarea. ¿Qué fracción de trabajo hace cada día? ¿Qué día trabaja más?

12 De una botella de agua, se gasta la mitad por la mañana, y por la tarde, la mitad de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción de agua queda sin gastar?

b) ¿Si la botella fuera de 5 *l*, ¿cuántos litros se habrían consumido?

5 Potencias de exponente entero

En el apartado 2 hemos repasado las potencias de exponente natural, es decir, entero positivo. Veamos ahora cómo son las potencias cuando el exponente es cero o un número entero negativo.

Observa

$\dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$

$\dfrac{a^n}{a^n} = 1$

Por tanto, debe ser $a^0 = 1$.

$\dfrac{1}{a^n} = \dfrac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$

$a^0 = 1$, cualquiera que sea $a \neq 0$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Por tanto, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$

Por ejemplo: $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$; $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = \dfrac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

Propiedades de las potencias de exponente entero

Si m y n son números enteros cualesquiera, se cumple que:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ — Por ejemplo: $(3^{-5}) \cdot (3^4) = 3^{-5+4} = 3^{-1}$

2. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ — Por ejemplo: $15^{-2} = (3 \cdot 5)^{-2} = 3^{-2} \cdot 5^{-2}$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ — Por ejemplo: $(10^5)^{-3} = 10^{5 \cdot (-3)} = 10^{-15}$

4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ — Por ejemplo: $\dfrac{(-7)^4}{(-7)^{-2}} = (-7)^{4-(-2)} = (-7)^6 = 7^6$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ — Por ejemplo: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 = \dfrac{5^4}{3^4}$

Ejercicios resueltos

1. Calcular:

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3}$; $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-5}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$; $0{,}125^{-2}$

2. Reducir a una única potencia.

a) $\dfrac{1}{2^2} : \dfrac{1}{2^{-2}}$ $\quad$ b) $\dfrac{2^4}{(-2)^7}$

c) $\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^2 \cdot (5^{-3})^{-2}$

d) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-2} \left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^2$

1. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^3 = \dfrac{5^3}{2^3} = \dfrac{125}{8} = 15{,}625$; $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-5} = 10^5 = 100\,000$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16} = 5{,}0625$; $0{,}125^{-2} = \left(\dfrac{1}{0{,}125}\right)^2 = 8^2 = 64$

2. a) $\dfrac{1}{2^2} : \dfrac{1}{2^{-2}} = \dfrac{2^{-2}}{2^2} = 2^{-4}$ $\quad$ b) $\dfrac{2^4}{(-2)^7} = \dfrac{2^4}{-2^7} = -2^{-3}$

c) $\left(\dfrac{1}{5^3}\right)^2 \cdot (5^{-3})^{-2} = \dfrac{5^6}{5^6} = 5^0 = 1$

d) $\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^{-2} \left(\dfrac{1}{2^{-3}}\right)^2 = \dfrac{1}{2^{-6}} \cdot \dfrac{1}{2^{-6}} = \dfrac{1}{2^{-12}} = 2^{12}$

Actividades

1 Ordena de menor a mayor:

2^{-3}, 2^{-1}, 2^0, 2^{-2}, 2^{-4}, $(-2)^{-3}$, $(-2)^{-1}$

2 Expresa como una potencia de base 3.

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} \cdot (3^{-2})^5 \cdot 3^7$

3 Calcula:

a) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-6}$ $\quad$ b) $\left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right]^{-3}$ $\quad$ c) $0{,}2^{-4}$

4 Reduce a una única potencia.

a) $\dfrac{1}{3^3} \cdot \left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{-4}$ $\quad$ b) $\left(\dfrac{1}{2^2}\right)^5 : \left(\dfrac{1}{2^{-2}}\right)^3$ $\quad$ c) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{7}\right)^3 \cdot 7^4$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

Números enteros

1 ▼▽▽ Calcula.

a) $5 + (-3) - (-2) + (4 - 6) - [3 - (6 - 4)]$

b) $(3 + 6 - 11) \cdot (4 - 2 - 9) \cdot (-1)$

c) $5 \cdot [8 - (2 + 3)] - (-4) \cdot [6 - (2 + 7)]$

d) $(-7) \cdot [4 \cdot (3 - 8) - 5 \cdot (8 - 5)]$

2 ▼▽▽ Calcula.

a) $|3 + (2 - 5)|$ b) $|1 - 5 + 31|$

c) $|20 - (-10 + 9)|$ d) $|-3 + |2 - 8||$

3 ▼▽▽ Realiza las siguientes operaciones:

a) $(-3 + 1)^3 + (5 - 8)^4 \cdot (-1) - 5^2 : (-1)^7$

b) $4 : (2 - 3)^7 + 5 \cdot (-1)^2 - 3^2 \cdot 4$

c) $(2 \cdot 3)^2 : (-1 - 5) + 3 \cdot (5 - 2)^0$

d) $6 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-5 + 4)^6$

4 ▼▽▽ Expresa como potencia única.

a) $(2 \cdot 3 \cdot 5)^4$ b) $(-3)^5 : (-3)^2$ c) $3^4 : (-3)^2$

d) $(2^2 \cdot 2)^3$ e) $(-1)^3 \cdot (-2)^3 \cdot 5^3$ f) $12^2 : 4^2$

5 ▼▼▽ Elimina paréntesis y simplifica.

a) $\dfrac{[(-5)^3]^2}{(-5)^6}$ b) $[(-3)^5 : (-3)^3]^2$

c) $\dfrac{9^2}{(-3)^4}$ d) $[2^4 \cdot (-2)^2] : (-4)^3$

6 ▼▽▽ Expresa el radicando como potencia y calcula:

a) $\sqrt[6]{64}$ b) $\sqrt{64}$ c) $\sqrt[5]{100\,000}$

d) $\sqrt[3]{-27\,000}$ e) $\sqrt{484}$ f) $\sqrt[4]{81}$

Fracciones

7 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) Los dos quintos de 400.

b) El número cuyos dos quintos son 160.

c) Los tres séptimos de 140.

d) El número cuyos cinco sextos son 25.

8 ▼▽▽ Compara mentalmente.

a) $\dfrac{2}{5}$ y $\dfrac{2}{7}$ b) 3 y $\dfrac{7}{2}$ c) $\dfrac{7}{8}$ y 1 d) $\dfrac{5}{8}$ y $\dfrac{3}{8}$

9 ▼▽▽ Expresa en forma de fracción de hora.

a) 15 minutos b) 20 minutos c) 10 minutos

d) 1 minuto e) 120 segundos f) 1 segundo

10 ▼▽▽ Expresa como número mixto.

a) $\dfrac{5}{3}$ b) $\dfrac{-7}{3}$ c) $\dfrac{45}{5}$ d) $\dfrac{-48}{5}$ e) $\dfrac{93}{10}$ f) $\dfrac{2\,437}{621}$

11 ▼▽▽ Calcula.

a) $6 - \left[\dfrac{10}{3} - \left(1 + \dfrac{5}{6}\right)\right]$ b) $\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{7}{8} + \dfrac{3}{4}\right) - \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{1}{6}\right) - \left(\dfrac{13}{12} - \dfrac{1}{2}\right)$

d) $-\dfrac{7}{2} - \left[2 + \dfrac{2}{7} - \left(-\dfrac{3}{4}\right)\right]$

12 ▼▽▽ Calcula.

a) $\left(-\dfrac{3}{4}\right) \cdot \dfrac{8}{9} \cdot \dfrac{5}{-6}$ b) $\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\right) : \left(3 + \dfrac{1}{7}\right)$

c) $\dfrac{\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}\right)}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{14}}$ d) $\dfrac{\dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{5}{3}\right)}{\dfrac{5}{3} : \dfrac{7}{6}}$

Potencias de exponente entero

13 ▼▽▽ Calcula.

a) $(-2)^4$ b) -2^4 c) $(-2)^3$ d) -2^{-3}

e) 2^{-3} f) $(-2)^{-3}$ g) $(-1)^{-16}$ h) 1^{-17}

14 ▼▽▽ Ordena de menor a mayor.

3^{-3} $(-3)^{-1}$ -3^0 $(-3)^{-4}$ 3^{-2}

15 ▼▽▽ Calcula.

a) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^2$ b) $-\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}$ c) $\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{-2}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ e) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^3$ f) $-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$

16 ▼▽▽ Expresa como potencias de base 10.

a) Cien millones.
b) Diez billones.
c) Una milésima.
d) Cien mil millones.
e) Una millonésima.
f) Cien milésimas.
g) Diez mil billones.
h) Mil centésimas.

Aplica lo aprendido

17 ▼▼▽ La temperatura de un congelador baja 2 °C cada 3 minutos hasta llegar a –18 °C. ¿Cuánto tardará en llegar a –12 °C si cuando lo encendemos la temperatura es de 16 °C?

18 ▼▽▽ Aristóteles murió en el año 322 a.C. y vivió 62 años. ¿En qué año nació?

19 ▼▽▽ Con una barrica que contiene 510 *l* de vino, ¿cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar? ¿Cuántas de litro y medio?

20 ▼▽▽ Calcula qué fracción de hora ha pasado entre las diez y cuarto y las once menos veinte.

21 ▼▽▽ Ana se gasta 2/3 del dinero en ropa y 1/4 del total en comida.

a) ¿Cuál es la fracción gastada?

b) ¿Qué fracción le queda por gastar?

c) Si salió de casa con 180 €, ¿qué cantidad no se ha gastado?

22 ▼▽▽ En cierta parcela se cultivan 4/5 partes de trigo, y el resto, 100 m^2, de maíz. ¿Cuál es la superficie de la parcela?

23 ▼▽▽ Con una garrafa de 5/2 de litro se llenan 25 vasos. ¿Qué fracción de litro entra en 1 vaso?

Resuelve problemas

24 ▼▽▽ Una pelota pierde en cada bote 2/5 de la altura a la que llegó en el bote anterior. ¿Qué fracción de la altura inicial, desde la que cayó, alcanzará cuatro botes después?

25 ▼▽▽ Los 3/8 de un poste están pintados de blanco; los 3/5 del resto, de azul, y el resto, que mide 1,25 m, de rojo. ¿Cuál es la altura del poste? ¿Cuánto mide la parte pintada de azul?

26 ▼▽▽ Un jardinero riega en un día 2/5 partes del jardín. ¿Cuántos días tardará en regar todo el jardín? ¿Cuánto ganará si cobra 50 € por día?

27 ▼▽▽ A Pablo le descuentan al mes, del sueldo bruto, la octava parte de IRPF y la décima parte para la Seguridad Social. Si el sueldo neto es 1 302 €, ¿cuál es su sueldo bruto mensual?

Autoevaluación

¿Manejas la operativa con fracciones y la aplicas a la resolución de problemas?

1 Calcula y, si es posible, simplifica el resultado.

a) $\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{2}\right):\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{11}{12}\right)$

b) $\left(\frac{11}{3}-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\left(2\cdot\frac{5}{3}-\frac{16}{9}\right)^{-1}$

2 En un depósito, el lunes había 3 000 *l* de agua y estaba lleno. El martes se gastó 1/6 del depósito. El miércoles se sacaron 1 250 *l*. ¿Qué fracción queda?

3 Marta compra a plazos un equipo de música. En el momento de la compra paga 2/7 del total, y cuando recibe el equipo, 2/3 de lo que le quedaba por pagar. Al cabo de un mes, abona el resto, que son 190 €. ¿Cuánto costó el equipo de música? ¿Qué cantidad entregó en cada momento?

¿Conoces el significado y las propiedades de las potencias de exponente entero y sabes aplicarlas?

4 Calcula:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ b) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$ c) 6^{-3} d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ e) $(-6)^2$

5 Expresa como potencia de base 3 o de base 10:

a) –1 000
b) 1/27
c) –0,1
d) –1/81
e) 1/100
f) –27

2 Números decimales

Nuestro sistema de numeración es sencillo y sumamente útil. Decimos de él que es decimal y posicional.

Son muchas las civilizaciones, incluso muy primitivas, que tuvieron un sistema de numeración decimal. ¿Por qué? Sin duda por los diez dedos de las manos, que ayudan a designar cantidades y a efectuar cuentas.

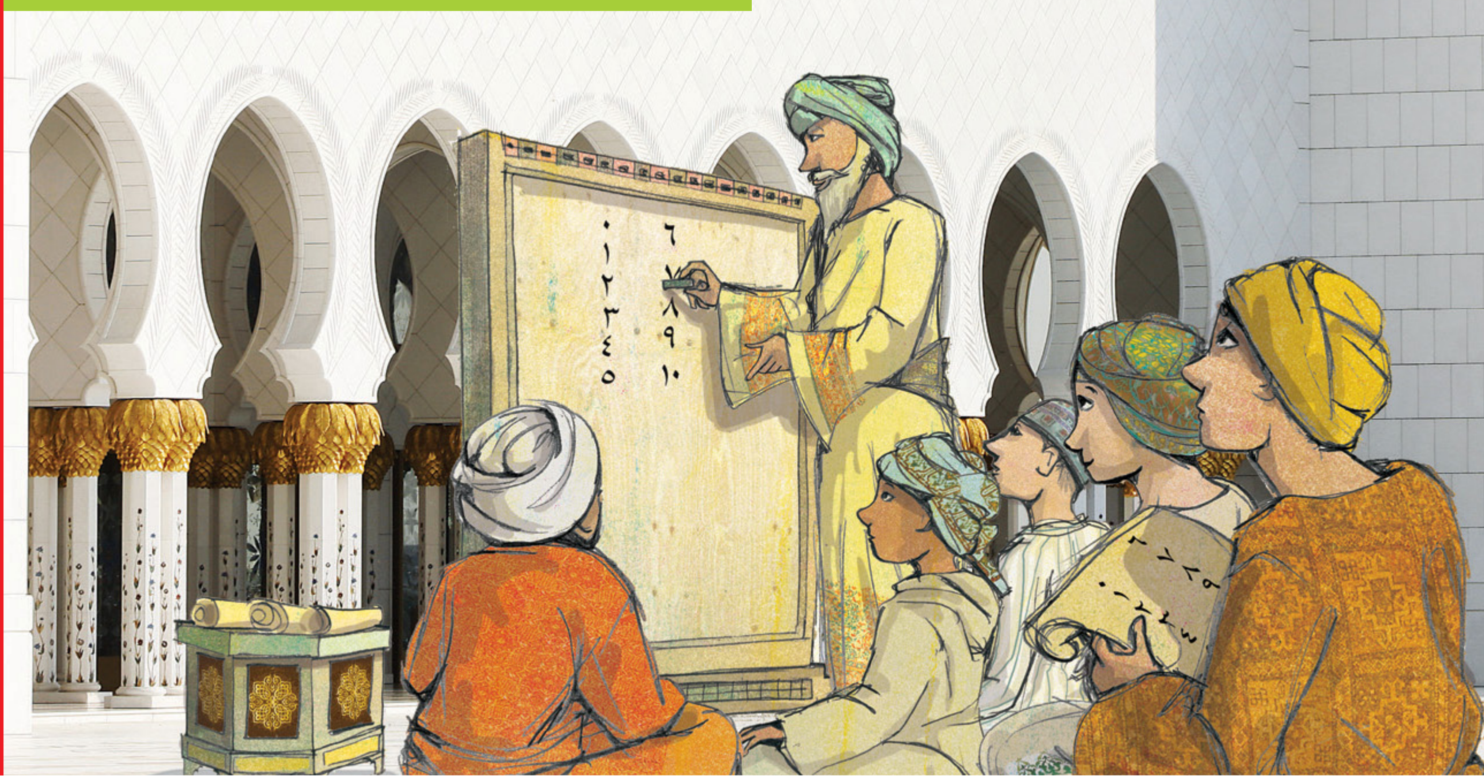
Pero nuestro sistema tiene dos características que lo hacen especialmente interesante:

— Es posicional: el valor de cada cifra depende de la posición que ocupe.

— Una de sus cifras, el cero, tiene peculiaridades que la distinguen de las demás.

El cero, en principio, se usó solo para señalar una posición en la que no había ninguna cantidad. Solo más tarde adquirió el mismo rango que las demás cifras. Y, mucho más tarde, fue considerado un número.

Otras civilizaciones hicieron intentos en ese sentido. Lo consiguieron los indios en el siglo VII, y el feliz hallazgo nos lo trajeron los árabes en el siglo IX.



1 Fracciones y números decimales

A menudo, tanto en matemáticas como en la vida cotidiana, es conveniente expresar una fracción como número decimal, y viceversa.

Paso de fracción a decimal

Una fracción puede considerarse como una división indicada. Por ello, para pasar de fracción a decimal, bastará con que dividamos el numerador entre el denominador. Recordemos, mediante algunos ejemplos, las distintas situaciones que se nos pueden presentar:

Recuerda

En toda división, sabemos que el resto debe ser menor que el divisor. Por tanto, el número máximo de restos distintos que pueden darse está limitado por el propio divisor. Por ello, siempre acabaremos llegando a un resto igual a 0, o bien los restos se repetirán indefinidamente.

- $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$

$$\begin{array}{l|l} 13{,}0 & 40 \\ \cline{2-2} \;\;1\,00 & 0{,}325 \\ \;\;\;\;200 & \\ \;\;\;\;\;\;00 & \end{array}$$

El cociente tiene un número limitado de cifras decimales y el resto es 0. Hemos obtenido un **decimal exacto,** 0,325.

- $\dfrac{41}{33} = 1{,}\widehat{24}$

$$\begin{array}{l|l} 41 & 33 \\ \cline{2-2} 080 & 1{,}242\ldots \\ \;\;140 & \\ \;\;\;\;080 & \\ \;\;\;\;\;\;14 & \end{array}$$

El cociente tiene un número ilimitado de cifras decimales que se repiten periódicamente. Hemos obtenido un **decimal periódico puro,** $1{,}\widehat{24}$. Las cifras que se repiten se llaman **periodo.**

- $\dfrac{32}{15} = 2{,}1\widehat{3}$

$$\begin{array}{l|l} 32 & 15 \\ \cline{2-2} 020 & 2{,}133\ldots \\ \;\;050 & \\ \;\;\;\;050 & \\ \;\;\;\;\;\;05 & \end{array}$$

Hay una primera parte decimal que no se repite. A partir de ella, las cifras del cociente se repiten periódicamente. Hemos obtenido un **decimal periódico mixto,** $2{,}1\widehat{3}$.

Toda fracción puede expresarse como un número decimal exacto o periódico.

Actividades

1 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla:

FRACCIÓN	86/11	59/30	313/500	3/7	1 267/300
EXPRESIÓN DECIMAL					
CLASE DE NÚMERO DECIMAL					

Paso de decimal exacto o periódico a fracción

Decimales exactos

Expresar como fracción un número decimal exacto es muy fácil. Basta con saber interpretarlo correctamente.

Por ejemplo:

a) $1{,}4 = \dfrac{14}{10}$ b) $7{,}395 = \dfrac{7\,395}{1\,000}$ c) $0{,}0008 = \dfrac{8}{10\,000}$

Decimales periódicos puros

Pasar un decimal periódico a fracción es menos fácil. Observa atentamente el siguiente ejemplo y repítelo, comprendiendo el proceso:

Expresamos $3{,}\widehat{84}$ en forma de fracción:

$$\begin{cases} N = 3{,}848484\ldots \\ 100N = 384{,}848484\ldots \end{cases}$$

$384{,}\widehat{84} - 3{,}\widehat{84} = 381$

Restamos: $100N - N = 384 - 3 \rightarrow 99N = 381 \rightarrow N = 3{,}\widehat{84} = \dfrac{381}{99}$

Decimales periódicos mixtos

Expresamos $1{,}2\widehat{34}$ como fracción:

$N =$	$1{,}2343434\ldots$	Multiplicamos por 10 para obtener un decimal periódico puro.
$10N =$	$12{,}343434\ldots$	Ahora multiplicamos lo anterior por 100 para obtener otro con la misma parte decimal.
$1\,000N =$	$1\,234{,}343434\ldots$	Restando, se suprime la parte decimal y se obtiene un número entero.

$1\,234{,}\widehat{34} - 12{,}\widehat{34} = 1\,222$

$1\,000N - 10N = 1\,234 - 12 \rightarrow 990N = 1\,222 \rightarrow N = 1{,}2\widehat{34} = \dfrac{1\,222}{990}$

Tanto los decimales exactos como los periódicos pueden ponerse en forma de fracción. Es decir, son números **racionales.**

Los decimales con infinitas cifras no periódicas, como 13,04004000400004… no se pueden poner en forma de fracción. Por tanto, no son racionales.

Actividades

2 Completa el proceso para expresar como fracción los siguientes decimales:

a) $5{,}\widehat{8}$ $\begin{cases} N = 5{,}8888\ldots \\ 10N = 58{,}8888\ldots \end{cases}$

b) $0{,}13\widehat{5}$ $\begin{cases} N = 0{,}1355\ldots \\ 100N = 13{,}5555\ldots \\ 1\,000N = 135{,}5555\ldots \end{cases}$

3 Identifica cuáles de los números siguientes son racionales y halla la fracción que les corresponde:

a) 6,78 b) $6{,}\widehat{78}$ c) $6{,}7\widehat{8}$

d) $5{,}\widehat{983}$ e) 0,004 f) $0{,}00\widehat{4}$

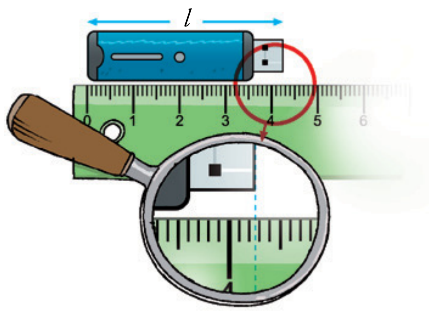
g) 3,101001000100001… h) $0{,}\widehat{004}$

i) $\pi = 3{,}14159265359\ldots$ j) $3{,}14\widehat{16}$

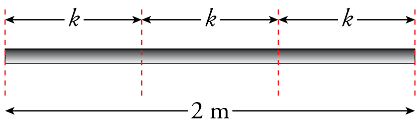
2 Utilización de cantidades aproximadas

Medida real y medida aproximada

Tanto en la medición directa de magnitudes como en los resultados de las mediciones indirectas, se suelen manejar cantidades aproximadas, unas veces por carecer de otra alternativa, y otras porque es más cómodo y práctico.



$l \approx 4{,}2$ cm



$k \begin{cases} \approx 67 \text{ cm} \\ \approx 667 \text{ mm} \end{cases}$

EJEMPLOS

- En la medición del pendrive que ves al margen, la regla no aprecia longitudes menores de un milímetro. Por tanto, no sabemos la medida exacta. Sin embargo, podemos asegurar que:

  $$4{,}2 \text{ cm} < l < 4{,}3 \text{ cm}$$

  Diremos que el pendrive mide, aproximadamente, 4,2 cm o 42 mm.

- Al partir en tres partes iguales una varilla de hierro de 2 metros de longitud, cada trozo mide:

  $$k = 2 : 3 = 0{,}6666\ldots = 0{,}\widehat{6} \text{ m} = 66{,}\widehat{6} \text{ cm}$$

  Diremos que cada trozo mide, aproximadamente, 67 cm, o bien, con más exactitud, 667 mm.

  Las cifras que hemos utilizado para dar la aproximación reciben el nombre de *significativas*.

Se llaman **cifras significativas** las que se usan para expresar un número aproximado.

Solo se deben utilizar aquellas que sean relevantes para la información que se va a transmitir.

Ejercicio resuelto

Expresar, con un número razonable de cifras significativas, las siguientes cantidades:

a) Visitantes de un museo en un año: 183 594.

b) Número de asistentes a una manifestación: 234 590.

c) Número de granos en un saco de arroz: 11 892 583.

a) La cantidad se puede dar con todas sus cifras, pues la entrada a un museo se paga y, lógicamente, se contabiliza.

Suponemos, por tanto, que la cantidad es exacta:

$$\boxed{183\,594} \text{ VISITANTES}$$

No obstante, para cierto tipo de comunicaciones, podría simplificarse: "casi doscientos mil" o "más de ciento ochenta mil".

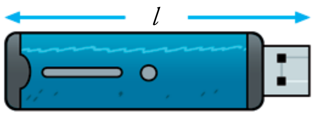
$$\boxed{180\,000} < \text{VISITANTES} < \boxed{200\,000}$$

b) Es imposible que nadie haya contado los manifestantes con tanta precisión. Lo razonable sería decir "más de doscientos mil".

$$\boxed{200\,000} < \text{MANIFESTANTES}$$

c) Una o dos cifras significativas es lo máximo que este tipo de cantidades permite afinar: "unos 12 millones de granos".

$$\text{N.° DE GRANOS} \approx \boxed{12 \text{ MILLONES}}$$



$l \approx 4{,}2$ cm

MEDIDA REAL → Desconocida
APROXIMACIÓN → 4,2 cm
ERROR REAL → Desconocido
COTA DEL ERROR → 1 mm

Error absoluto

Al hacer una aproximación, cometemos un error cuya cuantía debemos tener controlada.

Así, en el ejemplo de la página anterior, cuando decíamos que el pendrive medía 4,2 cm, sabíamos que nos estábamos equivocando en "menos de un milímetro".

Error absoluto de una medida aproximada es la diferencia entre el valor real y el valor aproximado.

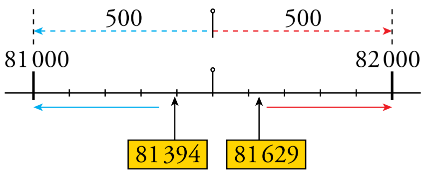
ERROR ABSOLUTO = |VALOR REAL – VALOR APROXIMADO|

El valor exacto, generalmente, es desconocido. Por tanto, también desconocemos el error absoluto. Pero lo importante es poder acotarlo:

El error absoluto es menor que…

En el caso del pendrive, el error está acotado: es menor que 1 mm.

Redondeo y cota del error absoluto



Recuerda que el redondeo consiste en aproximar, en un determinado orden de unidades, al alza o a la baja según que la primera cifra a suprimir esté por encima o por debajo de 5.

Así, cuando redondeamos, por ejemplo, a los millares, el error cometido es inferior a 5 centenas:

$$\left.\begin{array}{l} 81\,394 \xrightarrow{\text{REDONDEO}} 81\,000 \\ 81\,629 \xrightarrow{\phantom{\text{REDONDEO}}} 82\,000 \end{array}\right\} \text{ERROR} < 500$$

El error cometido en el redondeo es menor que 5 unidades del orden de la primera cifra no utilizada.

Entrénate

Calcula el error absoluto cometido al redondear a las centésimas estos números:

a) 15,123 b) 6,175
c) 0,358 d) 12,106

Ejercicio resuelto

Dar una cota del error absoluto en las valoraciones del anterior ejercicio resuelto.

a) Visitantes de un museo:

183 594 → 180 000

b) Manifestantes:

234 590 → 200 000

c) Granos de arroz:

11 892 583 → 12 millones

a) 183 594 → 180 000
Primera cifra suprimida.

La primera cifra no utilizada es del orden de los millares. Por tanto, el error absoluto es inferior a 5 millares:

ERROR < 5 000

b) 234 590 → 200 000
Primera cifra suprimida.

ERROR < 50 000

c) 11 892 583 → 12 millones

ERROR < medio millón → 0,5 millones

Error relativo

El error absoluto no da toda la información necesaria respecto a la "finura" de la medición, como apreciarás en los siguientes ejemplos:

DISTANCIA ENTRE DOS CIUDADES $\rightarrow$ 126 km (ERROR ABSOLUTO < 0,5 km)

ANCHURA DE UN ARROYO $\rightarrow$ 13 m (ERROR ABSOLUTO < 0,5 m)

El error absoluto es mucho más grande en la primera medición (0,5 km > 0,5 m); no obstante, la segunda es mucho más burda, ya que equivocarse en 0,5 m al medir 13 m es errar más que equivocarse en 0,5 km al medir 126 km.

Esto se ve con claridad al dividir el error absoluto entre la distancia, obteniendo así el error por unidad o *error relativo*:

$$\frac{0{,}5}{126} \approx \boxed{0{,}004} \qquad\qquad \frac{0{,}5}{13} \approx \boxed{0{,}04}$$

Como ves, el segundo cociente es más grande que el primero.

Error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real.

$$\text{ERROR RELATIVO} = \frac{\text{ERROR ABSOLUTO}}{\text{VALOR REAL}}$$

El error relativo es tanto menor cuantas más cifras significativas se usen.

EJEMPLOS

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Medida de una varilla} \rightarrow 66{,}\hat{6}\text{ cm}\\ \text{Valoración aproximada} \rightarrow 67\text{ cm}\end{array}\right\}$ ERROR ABSOLUTO < 0,5 cm

ERROR RELATIVO < 0,5/67 < 0,008

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Medida de una varilla} \rightarrow 666{,}\hat{6}\text{ mm}\\ \text{Valoración aproximada} \rightarrow 667\text{ mm}\end{array}\right\}$ ERROR ABSOLUTO < 0,5 mm

ERROR RELATIVO < 0,5/667 < 0,0008

Entrénate

Expresa con un número razonable de cifras significativas el número de asistentes a una exposición: 24 392 personas.

Aproximación $\rightarrow$

Error absoluto =

Error relativo ≈

Ejercicio resuelto

Dar una cota del error relativo en las valoraciones del anterior ejercicio resuelto:

a) Visitantes de un museo:

183 594 $\rightarrow$ 180 000

b) Manifestantes:

234 590 $\rightarrow$ 200 000

c) Granos de arroz:

11 892 583 $\rightarrow$ 12 millones

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Valoración} \rightarrow 180\,000\\ \qquad\qquad\downarrow\\ \text{ERROR ABSOLUTO} < 5\,000\end{array}\right\}$ E. RELATIVO < 5 000/180 000 < 0,028

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Valoración} \rightarrow 200\,000\\ \qquad\qquad\downarrow\\ \text{ERROR ABSOLUTO} < 50\,000\end{array}\right\}$ E. RELATIVO < 50 000/200 000 < 0,25

c) $\left.\begin{array}{l}\text{Valoración} \rightarrow 12\text{ millones}\\ \text{ERROR ABSOLUTO} < 0{,}5\text{ millones}\end{array}\right\}$ E. RELATIVO < 0,5/12 < 0,042

3 La notación científica

$A = 634000000000000000$

$B = 92800000000000000$

ÓRDENES DE MAGNITUD

giga	10^9
mega	10^6
kilo	10^3
hecto	10^2
deca	10
deci	10^{-1}
centi	10^{-2}
mili	10^{-3}
micro	10^{-6}
nano	10^{-9}

¿Sabrías decidir, a bote pronto, cuál de los dos números anotados al margen es mayor?

Está claro que se hace necesario contar los ceros, y que la tarea es lenta y molesta, mostrando lo poco práctica que resulta la notación habitual de los números para expresar cantidades grandes.

Contando las cifras, podemos expresar los números del siguiente modo:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{A = 6{,}34 \cdot 10^{17}} \\ \\ \boxed{B = 9{,}28 \cdot 10^{16}} \end{array}\right\} \to \text{Ahora es claro que } A > B.$$

Los números se han expresado en *notación científica*, que resulta mucho más práctica y manejable.

La notación científica se utiliza, también, con números muy pequeños:

$$M = 0{,}000000000098 = \frac{9{,}8}{100\,000\,000\,000} = \frac{9{,}8}{10^{11}}$$

$$\boxed{M = 9{,}8 \cdot 10^{-11}} \to \text{Notación científica}$$

Un número en **notación científica** consta de dos factores: un número decimal y una potencia de base 10.

- El número decimal es mayor o igual que 1 y menor que 10.
- La potencia de base 10 tiene exponente entero.

En los números con muchas cifras, suele ser razonable usar solo las primeras, lo que facilita la expresión de las aproximaciones en notación científica.

EJEMPLOS

- Número de granos en un saco de arroz: 11 892 583 granos

APROXIMACIÓN → 12 millones → 12 000 000 → $1{,}2 \cdot 10^7$

↓

ERROR ABSOLUTO < 0,5 millones → 500 000 → $5 \cdot 10^5$

- Población de China: 1 330 140 000 habitantes

APROXIMACIÓN → 1 300 millones → $1{,}3 \cdot 10^9$

↓

ERROR ABSOLUTO < 50 millones → $5 \cdot 10^7$

En la notación científica, el exponente sirve para interpretar cómo de grande o de pequeño es el número, pues indica la cantidad de cifras que tiene.

Entrénate

1. Expresa con todas sus cifras.

   a) $2{,}63 \cdot 10^8$ b) $5{,}8 \cdot 10^{-7}$

2. Expresa en notación científica, con tres cifras significativas.

   a) 262 930 080 080 000

   b) $2\,361 \cdot 10^9$

   c) 0,000000001586

   d) $0{,}256 \cdot 10^{-10}$

3. Expresa en gramos, utilizando la notación científica.

   a) La masa de la Tierra: 5 974 trillones de toneladas

   b) La masa de un electrón: $9{,}10 \cdot 10^{-31}$ kilos

Notación científica y calculadora

La siguiente potencia se obtiene fácilmente mediante cálculo mental:

$$5\,000^3 = 5\,000 \cdot 5\,000 \cdot 5\,000 = 125\,000\,000\,000$$

Sabiendo el resultado, compáralo con el que se obtiene en la calculadora:

5 000 $\boxed{\times}\boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}$ → $\boxed{1.25^{11}}$

5 000 $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{=}$ → $\boxed{1.25^{11}}$

Si el número no cabe en la pantalla, la máquina lo da en notación científica.

$\boxed{1.25^{11}}$ significa $\rightarrow$ $1{,}25 \cdot 10^{11}$

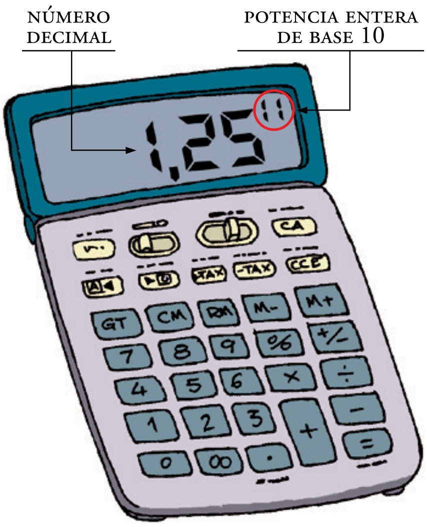
Y lo mismo ocurre con los números muy pequeños. Para comprobarlo, vamos a calcular $1/5\,000^3$:

$$\frac{1}{5\,000^3} = \frac{1}{1{,}25 \cdot 10^{11}} = (1 : 1{,}25) \cdot 10^{-11} = 0{,}8 \cdot 10^{-11} = 8 \cdot 10^{-12}$$

Para hacerlo con la calculadora, primero, guarda en la memoria el resultado obtenido arriba, y, después, divide 1 entre la memoria:

$5\,000^3$ → $\boxed{1.25^{11}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Min}}$ $\rightarrow$ 1 $\boxed{\div}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{=}$ $\rightarrow$ $\boxed{8.^{-12}}$ ← $\dfrac{1}{5\,000^3}$

El resultado significa $8 \cdot 10^{-12}$; es decir, "ocho billonésimas".



Entrénate

Halla con calculadora.

a) $1/300^5$

b) $(3{,}145 \cdot 10^{-7}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{18})$

Ejercicio resuelto

Calcular manualmente y con la calculadora.

$$\mathbf{\frac{(4{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{-8})}{1{,}34 \cdot 10^{12} - 9{,}2 \cdot 10^{11}}}$$

Cálculo manual

$$\frac{(4{,}5 \cdot 2{,}1) \cdot (10^{12} \cdot 10^{-8})}{13{,}4 \cdot 10^{11} - 9{,}2 \cdot 10^{11}} = \frac{9{,}45 \cdot 10^4}{4{,}2 \cdot 10^{11}} = (9{,}45 : 4{,}2) \cdot 10^{4-11} = 2{,}25 \cdot 10^{-7}$$

Con la calculadora

Operamos primero el denominador y lo guardamos en la memoria:

1,34 $\boxed{\text{EXP}}$ 12 $\boxed{-}$ 9,2 $\boxed{\text{EXP}}$ 11 $\boxed{=}\ \boxed{\text{Min}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{M}\ \ 4.2^{11}}$

Operamos el numerador:

4,5 $\boxed{\text{EXP}}$ 12 $\boxed{\times}$ 2,1 $\boxed{\text{EXP}}$ 8 $\boxed{+/-}\ \boxed{=}$ $\rightarrow$ $\boxed{94500}$

Dividimos lo que tenemos en pantalla entre la memoria:

$\boxed{94500}$ $\rightarrow$ $\boxed{\div}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{=}$ $\rightarrow$ $\boxed{2.25^{-07}}$

Actividades

1 Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a) $(2 \cdot 10^5) \cdot (1{,}5 \cdot 10^4)$

b) $6 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$

c) $(3 \cdot 10^3)^2$

d) $(6 \cdot 10^8) : (1{,}6 \cdot 10^{-2})$

2 Expresa en notación científica y calcula.

a) $(12\,000)^3 \cdot (1\,300)^2$

b) $\dfrac{125\,000\,000 - 2\,500\,000}{0{,}00005 + 0{,}00017}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Relación entre número decimal y fracción

1 ▼▽▽ Transforma en número decimal.

a) $\frac{121}{9}$ b) $\frac{753}{4}$ c) $\frac{1}{18}$ d) $\frac{2}{11}$ e) $\frac{49}{8}$

2 ▼▼▽ Expresa en forma de fracción irreducible.

a) $2,\widehat{4}$ b) $0,008$ c) $5,\widehat{54}$ d) $0,0\widehat{36}$ e) $0,11\widehat{6}$

Números aproximados. Errores

3 ▼▽▽ Aproxima a las centésimas.

a) 0,318 b) 3,2414 c) 18,073

d) $\frac{100}{71}$ e) $\frac{25}{13}$ f) $\frac{65}{7}$

4 ▼▽▽ Calcula:

a) El error absoluto cometido en cada una de las aproximaciones realizadas en el ejercicio anterior.

b) Una cota del error relativo cometido en cada caso.

5 ▼▼▽ Expresa con un número adecuado de cifras significativas.

a) Audiencia de cierto programa de televisión: 3 017 849 espectadores.

b) Tamaño de un virus: 0,008375 mm.

c) Precio de un coche: 18 753 €.

6 ▼▽▽ Calcula, en cada uno de los apartados del ejercicio anterior, el error absoluto y el error relativo de las cantidades dadas como aproximaciones.

Notación científica

7 ▼▽▽ Expresa con una potencia de base 10.

a) 1 000 b) 1 000 000

c) 1 000 000 000 d) 0,001

e) 0,000001 f) 0,000000001

8 ▼▽▽ Expresa con todas las cifras.

a) $6,25 \cdot 10^{8}$ b) $2,7 \cdot 10^{-4}$ c) $3 \cdot 10^{-6}$

d) $5,18 \cdot 10^{14}$ e) $3,215 \cdot 10^{-9}$ f) $-4 \cdot 10^{-7}$

9 ▼▽▽ Escribe en notación científica.

a) 4 230 000 000 b) 0,00000004

c) 84 300 d) 0,000572

10 ▼▽▽ Expresa en notación científica.

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Diámetro, en metros, de una punta de alfiler: 0,1 mm.

c) Presupuesto destinado a Sanidad: 525 miles de millones.

d) Diámetro de las células sanguíneas: 0,00075 mm.

11 ▼▽▽ Reduce a una potencia de base 10.

a) $10^3 \cdot 10^5 \cdot 10$ b) $10^{-4} \cdot 10^6$ c) $10^8 : 10^3$

d) $10^5 : 10^8$ e) $10^{-2} : 10^{-5}$ f) $10^{-6} : 10^{-2}$

12 ▼▽▽ Reduce.

a) $\frac{10^5 \cdot 10^2}{10^6}$ b) $\frac{10^2 \cdot 10^4}{10^8}$

c) $\frac{10^5 \cdot 10^7}{10^4 \cdot 10^8}$ d) $\frac{10^0 \cdot 10^1}{10^2 \cdot 10^3}$

13 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) $(1,5 \cdot 10^7) \cdot (2 \cdot 10^5)$ b) $(3 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3})$

c) $(4 \cdot 10^{-12}) : (2 \cdot 10^{-4})$ d) $\sqrt{9 \cdot 10^4}$

e) $(2 \cdot 10^{-3})^3$ f) $\sqrt[3]{8 \cdot 10^{-6}}$

14 ▼▽▽ Calcula con lápiz y papel, da el resultado en notación científica y compruébalo con la calculadora.

a) $(3,5 \cdot 10^7) \cdot (4 \cdot 10^8)$ b) $(5 \cdot 10^{-8}) \cdot (2,5 \cdot 10^5)$

c) $(1,2 \cdot 10^7) : (5 \cdot 10^{-6})$ d) $(6 \cdot 10^{-7})^2$

15 ▼▼▽ Utiliza la calculadora para efectuar las siguientes operaciones y expresa el resultado con dos y con tres cifras significativas.

a) $(4,5 \cdot 10^{12}) \cdot (8,37 \cdot 10^{-4})$

b) $(8,4 \cdot 10^{11}) : (3,2 \cdot 10^{-6})$

Aplica lo aprendido

16 ▼▽▽ En un supermercado se venden 735 unidades de un detergente a 10,95 € la unidad.

a) ¿Cuánto dinero se ha recaudado con la venta? Aproxima la cantidad obtenida dando dos cifras significativas.

b) ¿Cuál es el error absoluto que se comete al hacer la aproximación? Da una cota de este error.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

17 ▼▽▽ Escribe una aproximación de los siguientes números con un error menor que cinco milésimas:

a) 5,7468 b) 12,5271 c) 8,0018

18 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

A una manifestación van 850 000 personas.

a) Expresar la cantidad en notación científica.

b) ¿Es una cantidad exacta o aproximada?

c) Dar una cota del error absoluto y otra del error relativo que se comete tomando tres cifras significativas.

a) $850\,000 = 8{,}5 \cdot 10^5$

b) Es aproximada, pues es imposible calcular con precisión el número de personas que acuden a una manifestación tan numerosa.

c) Tres cifras significativas indican que el primer 0 que aparece está controlado $\rightarrow$ $8{,}50 \cdot 10^5$ en notación científica.

Medición $\rightarrow$ 850 miles de personas

ERROR ABSOLUTO $< 0{,}5$ miles

ERROR RELATIVO $< 0{,}5/850 < 0{,}0006$

19 ▼▼▽ El presupuesto destinado a infraestructuras para cierta región es de 3 430 millones de euros.

a) Expresa la cantidad en notación científica.

b) Da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido al tomar dos cifras significativas.

Resuelve problemas

20 ▼▼▽ El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g, y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Con cuántos virus igualaríamos el peso de una ballena?

21 ▼▼▽ En 50 kg de arena hay unos $3 \cdot 10^6$ granos. ¿Cuántos granos habrá en una tonelada?

22 ▼▼▽ La dosis de una vacuna es 0,05 cm^3. Si tiene 100 000 000 bacterias por cm^3, ¿cuántas bacterias hay en una dosis? Exprésalo en notación científica.

23 ▼▼▽ Si la velocidad de crecimiento del cabello humano es $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ km/h, ¿cuántos centímetros crece el pelo en un mes? ¿Y en un año?

Autoevaluación

¿Sabes obtener el número decimal asociado a una fracción, y viceversa?

1 Calcula el número decimal asociado a estas fracciones:

a) $\frac{11}{4}$ b) $\frac{347}{100}$ c) $\frac{19}{3}$ d) $\frac{85}{11}$ e) $\frac{134}{5}$

2 Calcula la fracción generatriz de cada uno de estos números decimales:

a) 0,05 b) $5{,}\widehat{36}$ c) $0{,}2\widehat{7}$

¿Sabes expresar una cantidad con un número adecuado de cifras significativas y valorar el error cometido?

3 Expresa con un número adecuado de cifras significativas y calcula los errores absoluto y relativo cometidos.

a) Precio de una plaza de garaje: 29 350 €.

b) Oyentes de un programa de radio: 2 970 350.

¿Manejas con agilidad la notación científica?

4 Expresa con todas sus cifras.

a) $5{,}2 \cdot 10^8$ b) $1{,}7 \cdot 10^{-6}$

5 Expresa en notación científica.

a) 1 283 000 b) 0,000273

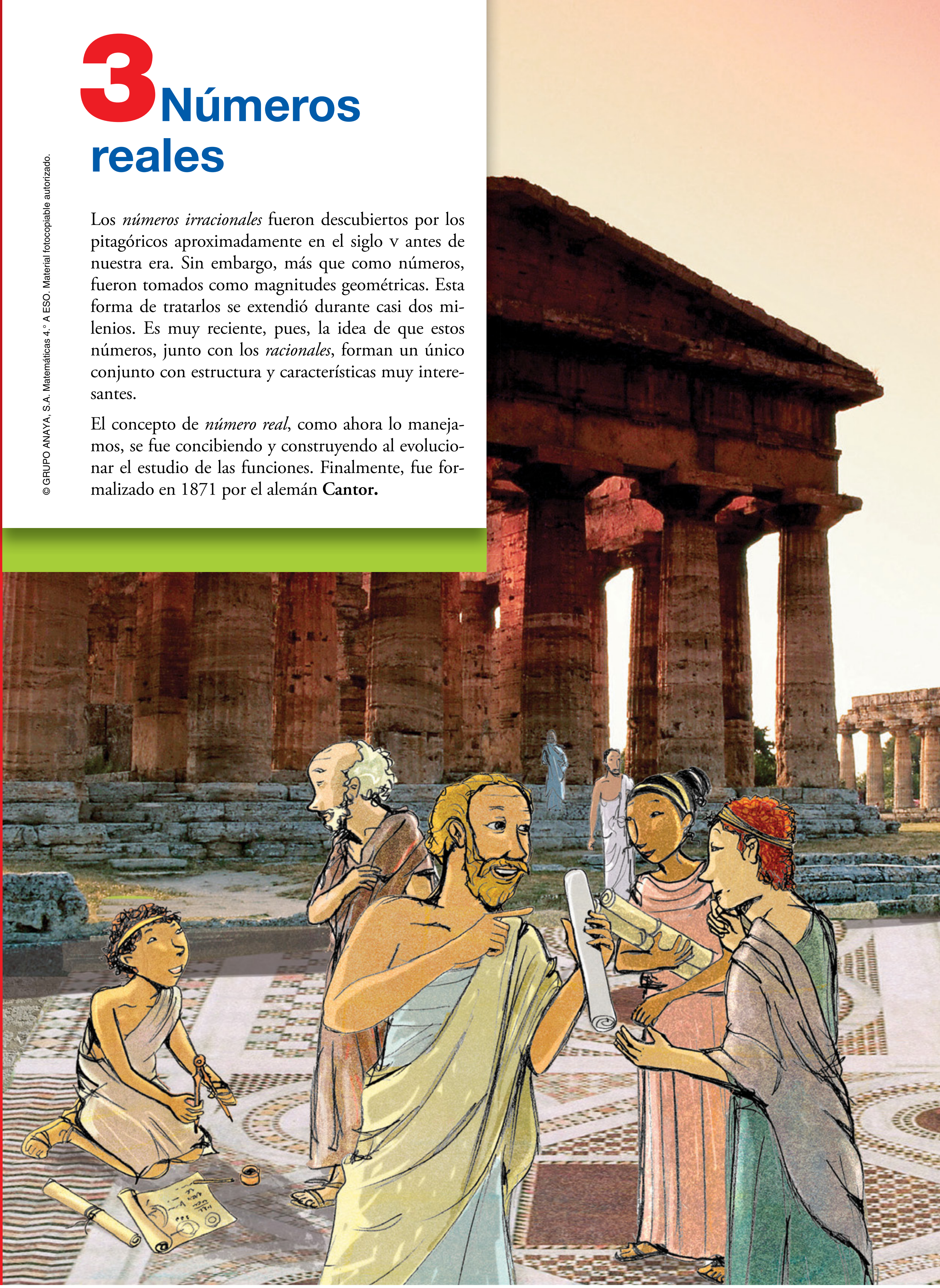
6 En 18 g de agua hay $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas de este compuesto.

¿Cuál es la masa, en gramos, de una molécula de agua?

3 Números reales

Los *números irracionales* fueron descubiertos por los pitagóricos aproximadamente en el siglo v antes de nuestra era. Sin embargo, más que como números, fueron tomados como magnitudes geométricas. Esta forma de tratarlos se extendió durante casi dos milenios. Es muy reciente, pues, la idea de que estos números, junto con los *racionales*, forman un único conjunto con estructura y características muy interesantes.

El concepto de *número real*, como ahora lo manejamos, se fue concibiendo y construyendo al evolucionar el estudio de las funciones. Finalmente, fue formalizado en 1871 por el alemán **Cantor.**

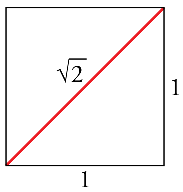


Números irracionales

Números racionales son los que se pueden poner como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es exacta o periódica.

Números irracionales son los no racionales, es decir, los que no pueden obtenerse como cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es infinita no periódica. Por ejemplo, $\pi = 3{,}14159265359\ldots$

Hay infinitos números irracionales, algunos de los cuales son especialmente interesantes. Veamos algunos.



La diagonal del cuadrado: el número $\sqrt{2}$

El teorema de Pitágoras nos proporciona el valor de la diagonal de un cuadrado de lado 1:

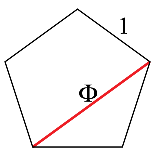
$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{es un número irracional.}$$

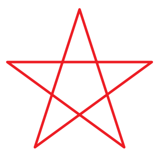
Otros irracionales expresados mediante radicales

Los números $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \ldots, \sqrt[3]{4}, \sqrt[5]{10}, \ldots$ son irracionales.

En general, si p no es una potencia n-ésima, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional.

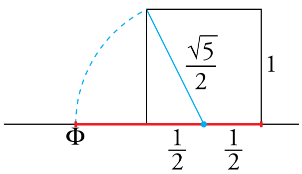
El número de oro: $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$





SÍMBOLO DE LOS PITAGÓRICOS

La diagonal de un pentágono de lado unidad es el número $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Históricamente es el primer número del que se tuvo conciencia de su irracionalidad. En el siglo v a.C., los griegos pitagóricos descubrieron con sorpresa (y casi con espanto) que la diagonal del pentágono y su lado no guardaban una proporción exacta. Hasta entonces se creía que todo el universo se regía por los números naturales y las *razones* entre ellos (fracciones). Pero al descubrir que no era así, les pareció que el caos se asomaba a su mundo. Por eso, llamaron **irracional** (contraria a la razón) a esta relación entre diagonal y lado del pentágono.

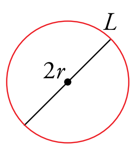


Construcción del número Φ.

Posteriormente, los artistas griegos consideraron que la proporción $\Phi : 1$ resultaba especialmente armoniosa, por lo que la llamaron **razón áurea,** y al número Φ, **número áureo.**

El nombre, Φ (**fi,** letra griega correspondiente a la F), es la inicial de **Fidias,** escultor griego que utilizó asiduamente esta razón.

El número π



$$\frac{L}{2r} = \pi$$

Como sabes, π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Este número lo conoces y lo utilizas desde hace muchos cursos. Has hecho uso de las siguientes aproximaciones suyas: 3,14 o 3,1416. Su verdadero valor tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

π es la letra griega correspondiente a la “p”. ¿Por qué este nombre? La palabra griega *perifereia* significa “circunferencia” (la periferia del círculo).

2 Números reales

Entrénate

1 a) ¿Cuáles de los siguientes números no pueden expresarse como cociente de dos números enteros?

$-2;\ 1{,}7;\ \sqrt{3};\ 4{,}\widehat{2};\ -3{,}7\widehat{5};$

$3\pi;\ -2\sqrt{5}$

b) Expresa como fracción aquellos que sea posible.

c) ¿Cuáles son irracionales?

2 a) Clasifica en racionales o irracionales los siguientes números:

$\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0{,}8\widehat{7};\ -\sqrt{4};\ -\frac{7}{3};$

$\frac{1}{\sqrt{2}};\ 2\pi$

b) Ordénalos de menor a mayor.

c) ¿Cuáles son números reales?

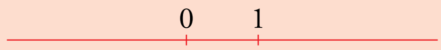
El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama **conjunto de números reales** y se designa por $\mathbb{R}$. De modo que la tabla sobre números, que ya conocemos, puede ampliarse y completarse del siguiente modo:

- REALES $\mathbb{R}$
  - RACIONALES $\mathbb{Q}$
    - ENTEROS $\mathbb{Z}$
      - NATURALES $\mathbb{N}$ → $0,\ 4,\ \frac{24}{6},\ \sqrt{121}$
      - ENTEROS NEGATIVOS → $-11,\ -\frac{27}{3},\ \sqrt[3]{-8}$
    - FRACCIONARIOS → $5{,}84;\ \frac{1}{2};\ 5{,}\widehat{83};\ -\frac{3}{10}$
  - IRRACIONALES → $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \Phi,\ \pi,\ -\sqrt{5}+2,\ \frac{2+\sqrt{3}}{5}$

Con los números reales podemos realizar las mismas operaciones que se hacen con los racionales: suma, resta, multiplicación y división (salvo por el cero) y se mantienen las mismas propiedades.

También podemos extraer raíces de cualquier índice (salvo raíces de índice par de números negativos) y el resultado sigue siendo un número real. Eso no ocurría con los números racionales.

La recta real



Si en una recta situamos un origen (el cero, 0) y marcamos la longitud unidad, a cada punto le corresponde un número racional o un número irracional. Es decir, *a cada punto de la recta le corresponde un número real*. Por eso, a la recta numérica la llamamos **recta real.**

Ejercicio resuelto

Situar cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Cada uno puede estar en más de un casillero:

$$\mathbf{24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;\ \frac{3}{5};\ \sqrt{7};\ -\sqrt{9};\ \frac{28}{7};\ \pi-1}$$

NATURALES, $\mathbb{N}$	$24;\ 28/7 = 4$
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	$24;\ -5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
FRACCIONARIOS	$0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ 3/5$
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	$24;\ 0{,}71;\ 0{,}7\widehat{1};\ -5;\ 3/5;\ -\sqrt{9} = -3;\ 28/7 = 4$
IRRACIONALES	$\sqrt{7};\ \pi - 1$

Actividades

1 Sitúa cada uno de los siguientes números en los casilleros correspondientes. Ten en cuenta que cada número puede estar en más de un casillero. (HAZLO EN TU CUADERNO).

$107;\ 3{,}95;\ 3{,}\widehat{95};\ -7;\ \sqrt{20};\ \frac{36}{9};\ \sqrt{\frac{4}{9}};\ -\sqrt{36};\ \frac{7}{3};\ \pi-3$

NATURALES, $\mathbb{N}$	
ENTEROS, $\mathbb{Z}$	
FRACCIONARIOS	
RACIONALES, $\mathbb{Q}$	
IRRACIONALES	

3 Raíces y radicales

Cálculo mental

1. Di el valor de k en cada caso:
   a) $\sqrt[3]{k} = 2$ b) $\sqrt[k]{-243} = -3$
   c) $\sqrt[4]{k} = \frac{2}{3}$ d) $\sqrt[k]{1\,024} = 2$
2. Calcula las raíces siguientes:
   a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[5]{32}$
   c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[8]{0}$
   e) $\sqrt[4]{81}$ f) $\sqrt[3]{125}$
3. Calcula estas raíces:
   a) $\sqrt[4]{10\,000}$ b) $\sqrt[5]{10^{10}}$
   c) $\sqrt[3]{\frac{1}{100}}$ d) $\sqrt[3]{0{,}001}$
   e) $\sqrt{10^6}$ f) $\sqrt[4]{0{,}0016}$

Se llama **raíz *n*-ésima** de un número a, y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical;** a, **radicando,** y n, **índice** de la raíz.

Cuando manejes expresiones como esta, habrá ocasiones en las que debes calcular el valor numérico. Para ello, deberás tener en cuenta la definición, como en las que se proponen en este margen, o bien recurrir a la calculadora. Pero en otros casos deberás mantener el radical, simplificarlo, operar con otros radicales, etcétera. Nos dedicaremos a esto en el próximo epígrafe.

Algunas peculiaridades de las raíces

- Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n.
- Si $a < 0$, solo existen sus raíces de índice impar.
- Aunque 4 tiene dos raíces cuadradas, con $\sqrt{4}$ nos referimos a la positiva: $\sqrt{4} = 2$.

  En general, un número positivo, a, tiene dos raíces cuadradas: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Forma exponencial de los radicales

Los radicales se pueden expresar como potencias:

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \text{ pues } (a^{\frac{1}{2}})^2 = a^{\frac{2}{2}} = a$$

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}, \text{ pues } (a^{\frac{2}{3}})^3 = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{5} = 5^{1/2}; \qquad \sqrt[5]{2^3} = 2^{3/5}; \qquad \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

Actividades

1 Expresa en forma exponencial.
a) $\sqrt[5]{x}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[15]{a^6}$
d) $\sqrt{a^{13}}$ e) $\sqrt[6]{a^5}$ f) $\sqrt[4]{a^8}$

2 Calcula.
a) $4^{1/2}$ b) $125^{1/3}$ c) $625^{1/4}$
d) $8^{2/3}$ e) $64^{5/6}$ f) $36^{3/2}$

3 Expresa en forma radical.
a) $x^{7/9}$ b) $n^{2/3}$ c) $b^{3/2}$ d) $a^{4/5}$

4 Expresa en forma exponencial.
a) $\sqrt[5]{x^2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{10^6}$ d) $\sqrt[4]{20^2}$
e) $\sqrt[5]{(-3)^3}$ f) $\sqrt[4]{a}$ g) $\left(\sqrt[5]{x^{-2}}\right)^3$ h) $\sqrt[15]{a^5}$

5 Pon en forma de raíz.
a) $5^{1/2}$ b) $(-3)^{2/3}$ c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}$
d) $(a^3)^{1/4}$ e) $(a^{1/2})^{1/3}$ f) $(a^{-1})^{3/5}$

4 Potencias y raíces con la calculadora

Potencias y raíces sencillas: [x^2] [$\sqrt{\ }$] [x^3] [$\sqrt[3]{\ }$]

Todas las calculadoras científicas tienen las teclas [x^2] y [$\sqrt{\ }$]. Muchas tienen también [x^3] y [$\sqrt[3]{\ }$], aunque estas suelen aparecer como **segunda función** (es decir, fuera de la tecla y, por tanto, deben ser precedidas por [SHIFT]).

Por ejemplo:

$247^2 \rightarrow$ 247 [x^2] [61009] $4{,}8^3 \rightarrow$ 4,8 [x^3] [110.592]

$\sqrt{247} \rightarrow$ [$\sqrt{\ }$] 247 [=] [15.71623364]

$\sqrt[3]{4{,}8} \rightarrow$ [$\sqrt[3]{\ }$] 4,8 [=] [1.6868653306]

Si hay en la pantalla un número cuya raíz cuadrada quieres calcular, antes de dar a la tecla [$\sqrt{\ }$] pulsa [=].

Por ejemplo: [58403] [=] [$\sqrt{\ }$] [=] [241.667126436]

Atención

Hay calculadoras antiguas que proceden al revés:

$\sqrt{247} \rightarrow$ 247 [$\sqrt{\ }$] [15.7162336]

Potencias de índice cualquiera: [x^y] (o bien [$x^{\blacksquare}$])

$17{,}84^5 \rightarrow$ 17,84 [x^y] 5 [=] [1807066.97984]

$4^{2,5} \rightarrow$ 4 [x^y] 2,5 [=] [32]

Raíces de índice cualquiera: [$\sqrt[x]{\ }$] (o bien [$\sqrt[\blacksquare]{\square}$])

Atención, aquí el orden en que intervienen el índice, el radicando y la tecla dependen mucho de la calculadora. Por ejemplo:

$\sqrt[5]{32}$

- 5 [$\sqrt[x]{\ }$] 32 [=] [2]   PANTALLA SENCILLA
- [$\sqrt[\blacksquare]{\square}$] 5 ▶ 32 [=] [$\sqrt[5]{32}$ 2]   PANTALLA DESCRIPTIVA

Atención

En algunas calculadoras, en vez de llamar a esta función $\sqrt[x]{\ }$ se le llama $x^{1/y}$, y actúa así:

32 [$x^{1/y}$] 5 [=] [2]

Incluso hay calculadoras con la tecla [$\sqrt[y]{x}$]. Con ellas se procede así:

$\sqrt[5]{32} \rightarrow$ 32 [$\sqrt[y]{x}$] 5 [=] [2]

Cálculo de raíces con la tecla de potencia

$\sqrt[5]{32} = 32^{1/5} \rightarrow$ 32 [x^y] 5 [1/x] [=] [2]

$\sqrt[5]{32^3} = 32^{3/5} \rightarrow$ 32 [x^y] 3 [a b/c] 5 [=] [8]

Actividades

Halla con la calculadora:

1 a) $\sqrt{541}$ b) 327^2 c) $\sqrt[3]{8{,}53}$

2 a) $\sqrt[5]{8{,}24}$ b) $\sqrt[6]{586}$ c) $\sqrt[4]{79{,}46}$

3 a) $\sqrt[5]{37^2}$ b) $\sqrt[4]{2{,}1^5}$ c) $\sqrt[3]{0{,}008^2}$

4 Calcula las raíces del ejercicio 2 utilizando la tecla [x^y].
(Por ejemplo: 8,24 [x^y] 5 [1/x] [=]).

5 Calcula las raíces del ejercicio 3 utilizando la tecla [x^y].
(Por ejemplo: 37 [x^y] 2 [a b/c] 5 [=]).

5 Propiedades de los radicales

Los radicales tienen una serie de propiedades que debes conocer y utilizar con soltura. Todas ellas son consecuencias de propiedades de las potencias.

Entrénate

1. Simplifica:

   $\sqrt[4]{5^2}$; $\sqrt[6]{2^3}$; $\sqrt[8]{3^4}$; $\sqrt{7^4}$; $\sqrt[3]{5^6}$; $\sqrt[4]{118}$

2. Extrae factores:

   $\sqrt{12}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{24}$

   $\sqrt{175}$; $\sqrt[4]{80}$; $\sqrt{180}$; $\sqrt{300}$

3. Multiplica y simplifica:

   $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}$

   $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$; $\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$

4. Efectúa:

   $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$; $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{10}$; $\left(\sqrt{7}\right)^3$

   $\left(\sqrt[6]{2^3}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^2$; $\left(\sqrt[4]{2^2}\right)^3$

Simplificación de radicales

Si el radicando está en forma de potencia, o puede ponerse así, es posible que el radical pueda simplificarse. Para ello, conviene expresarlo en forma de potencia.

Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{3^2} = 3^{2/4} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{6/4} = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

Extracción de factores fuera de una raíz

Si el radicando descompuesto en factores tiene potencias de exponente igual o mayor que el índice de la raíz, algunos de ellos pueden salir fuera de la raíz.

Por ejemplo:

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2\cdot 2} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5} = \sqrt{2^4}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5} = 2^{4/2}\cdot 3\cdot\sqrt{5} =$$

$$= 2^2\cdot 3\cdot\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3\cdot 3} = \sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Producto de radicales del mismo índice

Por ejemplo:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{3\cdot 2} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{20} = \sqrt{15\cdot 20} = \sqrt{300} = \sqrt{100\cdot 3} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2\cdot 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{5\cdot 50} = \sqrt[3]{5^3\cdot 2} = \sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

Potencia de un radical

Por ejemplo:

$$\left(\sqrt{2^3}\right)^4 = \sqrt{2^{3\cdot 4}} = \sqrt{2^{12}} = 2^{12/2} = 2^6$$

$$\left(\sqrt[5]{4}\right)^3 = \left(\sqrt[5]{2^2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^{2\cdot 3}} = \sqrt[5]{2^6} = 2\sqrt[5]{2}$$

$$\left(\sqrt[6]{7^2}\right)^3 = \sqrt[6]{7^{2\cdot 3}} = \sqrt[6]{7^6} = 7$$

Entrénate

5. Escribe con solo una raíz.

$\sqrt{\sqrt{3}}$; $\sqrt[3]{\sqrt[3]{7}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{10}}$

6. Suma si es posible.

a) $\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{7} + \sqrt{7}$

c) $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

d) $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

7. Elimina el radical del denominador.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Raíz de un radical

Por ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt{5}} = \sqrt[4]{5}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{11}} = \sqrt[6]{11}$$

Suma y resta de radicales

Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Solo pueden sumarse radicales idénticos. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3} + \sqrt{2}\\ \sqrt{7} - \sqrt[3]{7}\end{array}\right\}$$ Solo pueden realizarse de forma aproximada, o bien hay que dejarlas indicadas.

Sí puede simplificarse la expresión siguiente:

$$7\sqrt{5} + 11\sqrt{5} - \sqrt{5} = 17\sqrt{5}$$

Hay casos en los que la posibilidad de simplificar una suma de radicales queda oculta. Previamente, deberemos sacar los factores que podamos fuera de las raíces, o simplificarlas. Por ejemplo:

$$\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{2^5} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{5^2 \cdot 2} =$$
$$= 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Eliminación de un radical del denominador

Es costumbre en los resultados matemáticos en los que intervienen radicales evitar que estos estén en el denominador. Veamos unos casos en los que esto se consigue de forma sencilla:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

Observa

Se multiplica el denominador por el radical necesario para que desaparezca la raíz:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$; $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7$

Lógicamente, el numerador se multiplica por la misma expresión.

Actividades

1 Simplifica.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ b) $\sqrt[12]{x^8}$ c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ e) $\sqrt[9]{64}$ f) $\sqrt[8]{81}$

2 Saca del radical los factores que sea posible.

a) $\sqrt{x^3}$ b) $\sqrt[3]{a^5}$ c) $\sqrt{b^5}$

d) $\sqrt[3]{32x^4}$ e) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ f) $\sqrt[5]{64}$

3 Multiplica y simplifica.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}$

c) $\sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[6]{x^2}$ d) $\sqrt[4]{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$

4 Extrae factores y suma si esposible.

a) $\sqrt{12} + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{18} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{45} - \sqrt{20}$ d) $2\sqrt{6} - \sqrt{8}$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Números reales

1 ▼▽▽ a) Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales:

$$\frac{41}{13};\ \sqrt{49};\ 53,\widehat{7};\ 3,2;\ \sqrt{12};\ \sqrt[3]{5};\ \frac{\pi}{2}$$

b) ¿Alguno de ellos es entero?

c) Ordénalos de menor a mayor.

2 ▼▽▽ Clasifica estos números en naturales, enteros, racionales y reales:

3	$-\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$	$7,23$
-2	$\pi + 1$	0	-4
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{-1}$	$\frac{11}{9}$	$\sqrt{5}$
2	$2,48$	18	$1 + \sqrt{2}$
-1	$\sqrt[5]{-2}$	1	$1,010203\ldots$

Potencias y raíces

3 ▼▽▽ Expresa en forma exponencial.

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[5]{a^2}$ c) $\sqrt[8]{a^5}$ d) $\sqrt[3]{x}$

e) $\sqrt{a^{-1}}$ f) $\sqrt[4]{a^2}$ g) $\sqrt{a}$ h) $\sqrt{2}$

4 ▼▽▽ Expresa en forma de raíz.

a) $3^{2/5}$ b) $2^{3/4}$ c) $a^{1/3}$ d) $a^{1/2}$

e) $x^{1/4}$ f) $a^{3/2}$ g) $x^{-1/2}$ h) $x^{-3/2}$

5 ▼▽▽ Calcula.

a) $25^{1/2}$ b) $27^{1/3}$ c) $125^{2/3}$ d) $81^{3/4}$

e) $\sqrt[4]{16}$ f) $\sqrt[5]{-1}$ g) $\sqrt[3]{-27}$ h) $\sqrt[6]{15\,625}$

6 ▼▼▽ Di el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[k]{243} = 3$ b) $\sqrt[3]{k} = -2$ c) $\sqrt[4]{k} = \frac{3}{2}$

d) $\sqrt[k]{-125} = -5$ e) $\sqrt[3]{k} = -1$ f) $\sqrt[k]{\frac{49}{64}} = \frac{7}{8}$

7 ▼▽▽ Obtén con la calculadora.

a) $\sqrt[5]{9}$ b) $\sqrt[3]{-173}$ c) $\sqrt[4]{14^3}$

d) $0,8^{3/5}$ e) $12^{5/2}$ f) $3,5^{1/5}$

Radicales

8 ▼▽▽ Simplifica.

a) $\sqrt[6]{9}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt[15]{2^{12}}$

d) $\sqrt[4]{49}$ e) $\sqrt[6]{125}$ f) $\sqrt[5]{3^{15}}$

9 ▼▼▽ Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[10]{a^8}$ b) $\sqrt[4]{a^{12}}$ c) $\sqrt[12]{a^3}$

d) $\sqrt[8]{a^2b^2}$ e) $\sqrt[3]{a^6b^6}$ f) $\sqrt[6]{a^2b^4}$

10 ▼▽▽ Multiplica y simplifica el resultado.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3}$

11 ▼▼▽ Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{28}$ c) $\sqrt[4]{2^{10}}$

d) $\sqrt{8}$ e) $\sqrt{200}$ f) $\sqrt{300}$

12 ▼▽▽ Reduce a un solo radical.

a) $\sqrt{\sqrt{13}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{15}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}$ e) $\sqrt{\sqrt{3^3}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt{11}}$

13 ▼▼▽ Calcula y simplifica en cada caso:

a) $(\sqrt{2})^{10}$ b) $(\sqrt[3]{2})^4$ c) $(\sqrt[4]{3^2})^8$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$ e) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10}$ f) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^6$

14 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Expresa como un solo radical:

$$\sqrt{63} - 5\sqrt{28} + \sqrt{112}$$

Descomponemos en factores cada radicando:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{63} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} \\ \sqrt{28} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = 2\sqrt{7} \\ \sqrt{112} = \sqrt{2^4 \cdot 7} = 4\sqrt{7} \end{array}\right\} \to 3\sqrt{7} - 5 \cdot 2\sqrt{7} + 4\sqrt{7} =$$

$$= 3\sqrt{7} - 10\sqrt{7} + 4\sqrt{7} =$$

$$= -3\sqrt{7}$$

15 ▼▼▽ Expresa como un solo radical.

a) $2\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$ b) $5\sqrt{48} + \sqrt{12}$

c) $3\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$ d) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{24}$

16 ▼▼▽ Efectúa.

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ b) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

c) $\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{8}$ d) $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$

17 ▼▽▽ Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{a^5}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Aplica lo aprendido

18 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Expresa como potencia única:

a) $5\sqrt{5}$ **b)** $a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}$ **c)** $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

a) $5\sqrt{5} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5^3} = 5^{3/2}$

b) $a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{a^8} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{a^8 \cdot a^3} = \sqrt[4]{a^{11}} =$
$= a^{11/4}$

c) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$

19 ▼▼▽ Expresa como potencia única.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ b) $2\sqrt[3]{4}$ c) $a\sqrt{a}$

d) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ f) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a}$

20 ▼▼▽ Expresa en forma exponencial.

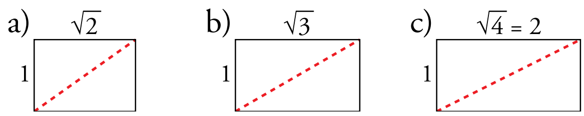
a) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3$ b) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$ d) $\left(\sqrt[4]{a}\right)^3$

e) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2$ f) $\left(\sqrt{a}\right)^5$

Resuelve problemas

21 ▼▼▽ Calcula el valor de la diagonal en cada caso e indica si es un número racional o irracional:



22 ▼▼▽ Indica si el número que se obtiene en cada caso es racional o irracional:

a) La diagonal de un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm.

b) El área de un círculo de radio 2 cm.

c) El cateto de un triángulo rectángulo cuyos lados miden 24 cm y 25 cm.

Autoevaluación

¿Sabes clasificar los números en los distintos conjuntos numéricos?

1 Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales y reales:

$$7{,}53;\ \sqrt{64};\ \frac{\sqrt{7}}{2};\ -5;\ \frac{\pi}{4};\ 3{,}2\widehat{3};\ \frac{7}{11}$$

¿Sabes identificar una raíz con una potencia y manejar las operaciones con radicales?

2 Halla el valor de k en cada caso:

a) $\sqrt[3]{k} = 7$ b) $\sqrt[k]{-125} = -5$ c) $\sqrt{625} = k$

3 Completa en tu cuaderno.

FORMA DE RAÍZ	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{x^2}$		
FORMA DE POTENCIA			$a^{3/4}$	$x^{1/3}$

4 Simplifica.

a) $\sqrt[4]{25}$ b) $\sqrt[6]{x^4}$

5 Simplifica.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{25}}$

6 Extrae factores fuera de la raíz.

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{x^4}$

7 Opera.

$$\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{75}$$

8 Suprime el radical del denominador y simplifica.

a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{7}}$

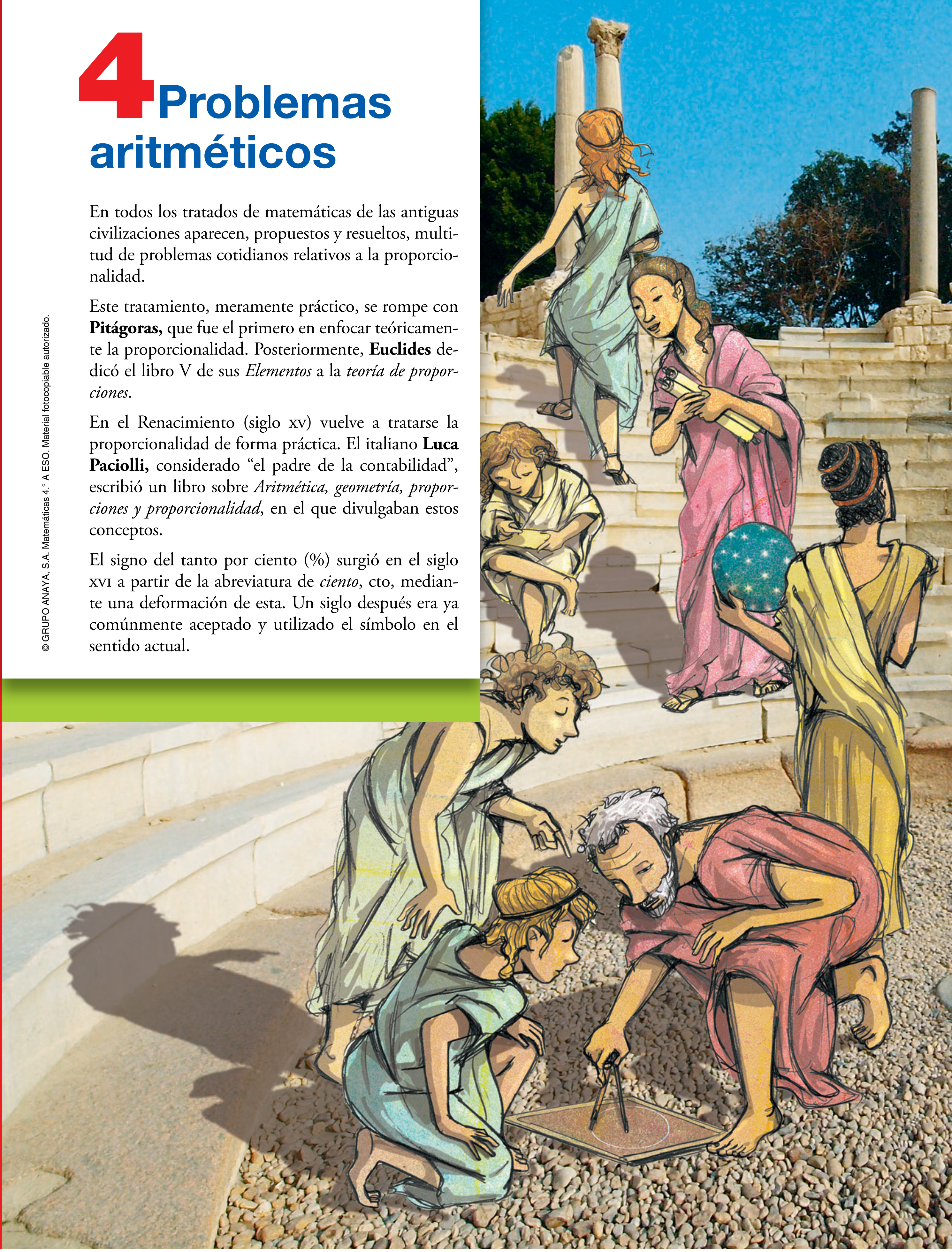
4 Problemas aritméticos

En todos los tratados de matemáticas de las antiguas civilizaciones aparecen, propuestos y resueltos, multitud de problemas cotidianos relativos a la proporcionalidad.

Este tratamiento, meramente práctico, se rompe con **Pitágoras,** que fue el primero en enfocar teóricamente la proporcionalidad. Posteriormente, **Euclides** dedicó el libro V de sus *Elementos* a la *teoría de proporciones*.

En el Renacimiento (siglo XV) vuelve a tratarse la proporcionalidad de forma práctica. El italiano **Luca Paciolli,** considerado "el padre de la contabilidad", escribió un libro sobre *Aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidad*, en el que divulgaban estos conceptos.

El signo del tanto por ciento (%) surgió en el siglo XVI a partir de la abreviatura de *ciento*, cto, mediante una deformación de esta. Un siglo después era ya comúnmente aceptado y utilizado el símbolo en el sentido actual.



1 Proporcionalidad simple

Cálculo mental

1. 5 m de cierto tipo de tela han costado 35 €. ¿Cuánto costarán 4 m?

   ☞ *¿Cuánto cuesta 1 m?*

2. Un albañil tarda 6 h en hacer 3 m^2 de muro. ¿Cuánto tardará en hacer 13 m^2 de muro?

Proporcionalidad directa

Cinco metros y medio de cable eléctrico han costado 4,51 €. ¿Cuánto costarán 8 m 35 cm del mismo tipo de cable?

A más metros, más dinero.
A menos metros, menos dinero. } El coste de un trozo de cable es directamente proporcional a su longitud.

REGLA DE TRES DIRECTA

LONGITUD (m)	COSTE (€)
5,5	4,51
8,35	x

$$\frac{5,5}{8,35} = \frac{4,51}{x} \rightarrow x = \frac{4,51 \cdot 8,35}{5,5} = 6,85 \text{ €}$$

REGLA DE TRES DIRECTA

Cuando las magnitudes son directamente proporcionales.

MAGNITUD A		MAGNITUD B
□	⟶	○
■	⟶	x

$$x = \frac{○ \cdot ■}{□}$$

Entrénate

1. 5 entradas para el cine cuestan 45 €. ¿Cuánto cuestan 3 entradas?
2. 5 operarios descargan un camión en 45 min. ¿Cuánto tardarían 3 trabajadores?
3. 10 cajas de galletas pesan 1 500 g. ¿Cuánto pesan 3 cajas?
4. Una furgoneta, a 60 km/h, tarda 20 min en ir de un pueblo al pueblo vecino. ¿Cuánto tardaría si fuera a 80 km/h?

Proporcionalidad inversa

Un ganadero tiene reservas de pasto para alimentar a 35 vacas durante 60 días. ¿Cuánto le durarán sus reservas si vende 15 vacas?

A más vacas, menos días.
A menos vacas, más días. } El tiempo que dura el pasto es inversamente proporcional al número de vacas.

REGLA DE TRES INVERSA

N.° DE VACAS	TIEMPO (DÍAS)
35	60
35 – 15 = 20	x

$$\frac{35}{20} = \frac{x}{60} \rightarrow x = \frac{60 \cdot 35}{20} = 105 \text{ días}$$

REGLA DE TRES INVERSA

Cuando las magnitudes son inversamente proporcionales.

MAGNITUD A		MAGNITUD B
□	⟶	○
■	⟶	x

$$x = \frac{○ \cdot □}{■}$$

Actividades

1 Una sandía de 3,4 kg ha costado 2,21 €. ¿Cuánto costará otra sandía de 4,8 kg?

2 Si cada día gasto 3,60 €, mis ahorros durarán 15 días. ¿Cuánto durarían si gastase 4,50 € diarios?

3 Un hortelano tiene agua almacenada para regar un campo de dos hectáreas durante tres días. ¿Cuánto le duraría el agua si decidiera regar solamente 1,2 ha?

4 En el comedor del colegio se han consumido 132 barras de pan durante tres días. Si una barra cuesta 0,35 €, ¿qué presupuesto debe destinar el administrador del comedor para la compra de pan cada semana?

5 Ricardo compra en la pescadería tres cuartos de kilo de calamares a 8,60 €/kg y una pescadilla de 650 gramos a 6,20 €/kg. ¿Cuánto le devolverán si paga con un billete de 20 euros?

2 Proporcionalidad compuesta

Llamamos de **proporcionalidad compuesta** a aquellas situaciones en las que intervienen más de dos magnitudes ligadas por la relación de proporcionalidad.

Problemas resueltos

1. Un granjero ha necesitado 294 kilos de pienso para alimentar a 15 vacas durante una semana.

¿Cuántos kilos de pienso se necesitarán para alimentar a 10 vacas durante 30 días?

ANALIZA EL PROBLEMA:

- Identifica las magnitudes que intervienen.
- Ordena las magnitudes, los datos y la incógnita.
- Identifica el tipo de proporcionalidad (directa-inversa) que liga cada magnitud con la que lleva la incógnita.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. DIRECTA

VACAS		DÍAS		KILOS
15	⟶	7	⟶	294
10	⟶	30	⟶	x

Para facilitar el proceso que viene a continuación, conviene colocar en último lugar la magnitud que lleva la incógnita.

RESUELVE:

VACAS		DÍAS		KILOS
15 vacas	⟶	durante 7 días	⟶	consumen 294 kg
15 vacas	⟶	en 1 día	⟶	consumen 294 : 7 = 42 kg
1 vaca	⟶	en 1 día	⟶	consume 42 : 15 = 2,8 kg
10 vacas	⟶	en 1 día	⟶	consumen 2,8 · 10 = 28 kg
10 vacas	⟶	en 30 días	⟶	consumen 28 · 30 = 840 kg

AUTOMATIZA EL PROCESO:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. DIRECTA

VACAS		DÍAS		KILOS
15	⟶	7	⟶	294
10	⟶	30	⟶	x

PROPORCIÓN

$$\rightarrow \frac{15}{10} \cdot \frac{7}{30} = \frac{294}{x}$$

$$x = \frac{294 \cdot 10 \cdot 30}{15 \cdot 7} = 840$$

Solución: Para alimentar a 10 vacas durante 30 días, el granjero necesita 840 kilos de pienso.

2. **Una cuadrilla de albañiles, trabajando 8 horas diarias, construye 400 metros cuadrados de pared en 15 días. ¿Cuánto tardaría la misma cuadrilla en construir 600 metros cuadrados de pared, si deciden trabajar 10 horas cada día?**

PROPORCIONALIDAD DIRECTA (METROS CUADRADOS — DÍAS)
PROP. INVERSA (HORAS/DÍA — DÍAS)

METROS CUADRADOS		HORAS/DÍA		DÍAS
400	→	8	→	15
600	→	10	→	x

Observa que ahora interviene una relación de proporcionalidad inversa.

METROS CUADRADOS		HORAS/DÍA		DÍAS
Para construir…		trabajando…		se necesitan…
400 m^2	→	8 h/día	→	15 días
400 m^2	→	1 h/día	→	$15 \cdot 8 = 120$ días
100 m^2	→	1 h/día	→	$120 : 4 = 30$ días
100 m^2	→	10 h/día	→	$30 : 10 = 3$ días
600 m^2	→	10 h/día	→	$3 \cdot 6 = 18$ días

AUTOMATIZA EL PROCESO:

PROPORCIONALIDAD DIRECTA (M. CUAD — DÍAS)
PROP. INVERSA (H/DÍA — DÍAS)

M. CUAD		H/DÍA		DÍAS		PROPORCIÓN
400	→	8	→	15	→	$\frac{400}{600} \cdot \frac{10}{8} = \frac{15}{x}$
600	→	10	→	x		

Observa que la magnitud HORAS/DÍA es inversamente proporcional a la magnitud DÍAS.

Por eso, al formar la proporción, en lugar de la razón $\frac{8}{10}$ tomamos su inversa, $\frac{10}{8}$.

$$\frac{400 \cdot 10}{600 \cdot 8} = \frac{15}{x} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 600 \cdot 8}{400 \cdot 10} = 18$$

Solución: Para construir 600 m^2 de pared, trabajando 10 horas diarias, necesitan 18 días.

Actividades

1 Una cuadrilla de albañiles, trabajando 10 horas al día, han construido 600 m^2 de pared en 18 días. ¿Cuántos metros cuadrados construirán en 15 días, trabajando 8 horas diarias?

2 Un granjero ha necesitado 294 kilos de pienso para alimentar a 15 vacas durante 7 días. ¿Durante cuántos días podría alimentar a 10 vacas si dispusiese de 840 kilos de pienso?

3 Una excavadora, trabajando 10 horas al día, abre una zanja de 1 000 metros en 8 días. ¿Cuánto tardaría en abrir una zanja de 600 m, trabajando 12 horas al día?

4 Si se abren tres bocas de riego con un caudal de 1,5 litros por segundo cada una, un aljibe se vacía en 8 horas. ¿Durante cuánto tiempo daría servicio el aljibe si se abrieran cuatro bocas de riego con un caudal de 0,9 litros por segundo cada una?

3 Repartos proporcionales. Problemas de mezclas

Entrénate

Dos hermanas compran cinco juegos de toallas por 175 €. Una se queda con tres juegos, y la otra, con dos.

¿Cuánto debe pagar cada una?

Tres socios invierten 1 millón, 2 millones y 5 millones de euros, respectivamente, en un negocio que al cabo de un año rinde un beneficio de 600 000 €. ¿Qué cantidad de los beneficios corresponde a cada uno?

Podemos considerar el negocio dividido en 1 + 2 + 5 = 8 partes. Ahora no tenemos más que dividir los beneficios en otras ocho partes, de las que el primer socio se llevará una; el segundo, dos; y el tercero, cinco.

El beneficio correspondiente a cada parte es 600 000 : 8 = 75 000 €.

$$\text{El reparto será: } \begin{cases} 1.^{\text{er}} \text{ socio: } & 75\,000 \text{ €} \cdot 1 = 75\,000 \text{ €} \\ 2.^{\text{o}} \text{ socio: } & 75\,000 \text{ €} \cdot 2 = 150\,000 \text{ €} \\ 3.^{\text{er}} \text{ socio: } & 75\,000 \text{ €} \cdot 5 = 375\,000 \text{ €} \end{cases}$$

En los repartos proporcionales, las distintas fracciones en que se parte el total, además de ser proporcionales a los valores señalados, deben sumar 1.

Valores $\longrightarrow$ $a, b, c, \dots$ Suma $\rightarrow$ $a + b + c + \dots = S$

Fracciones $\rightarrow$ $\frac{a}{S}, \frac{b}{S}, \frac{c}{S}, \dots$ Suma $\rightarrow$ $\frac{a}{S} + \frac{b}{S} + \frac{c}{S} + \dots = \frac{S}{S} = 1$

Entrénate

Si un comerciante mezcla 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de café de 7,40 €/kg, ¿cuál será el precio de la mezcla?

Se muelen conjuntamente 50 kg de café de 8,80 €/kg y 30 kg de otro café de inferior calidad, de 6,40 €/kg. ¿A cómo resulta el kilo de la mezcla obtenida?

Para resolverlo, situamos los datos en una tabla:

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ SUPERIOR	50 kg	8,80 €/kg	50 · 8,80 = 440 €
CAFÉ INFERIOR	30 kg	6,40 €/kg	30 · 6,40 = 192 €
MEZCLA	80 kg		632 €

$$\text{Precio de la mezcla} = \frac{\text{Coste total}}{\text{Peso total}} = \frac{632 \text{ €}}{80 \text{ kg}} = 7{,}90 \text{ €/kg}$$

Solución: El kilo de la mezcla obtenida costará 7,90 €.

Observemos que el promedio deseado (en este caso, el precio de la mezcla) se obtiene repartiendo el valor total (suma de los costes) entre el peso total (suma de los pesos).

La tabla en la que se exponen los parciales y el total es fundamental para resolver este tipo de ejercicios.

Actividades

1 Dos manantiales vierten sus aguas en un depósito de 345 litros de capacidad.

Si el caudal del primero es de 50 *l*/min, y el del segundo, 40 *l*/min, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el depósito?

2 Una balsa contiene 28 600 *l* de agua para riego. Se abren simultáneamente el desagüe de la balsa, que emite 360 *l*/min, y un grifo que alimenta a la balsa con 140 *l*/min.

¿Cuánto tarda la balsa en vaciarse?

4 Problemas de móviles

Encuentros

Dos poblaciones A y B distan 350 km. A las nueve de la mañana sale de A hacia B un camión a una velocidad de 80 km/h. Simultáneamente, un coche sale de B hacia A a 120 km/h. ¿A qué hora se cruzan?

ENCUENTROS

$\overrightarrow{v_1}$ $\overleftarrow{v_2}$

VELOCIDAD DE APROXIMACIÓN $\Big\}$ $v_1 + v_2$

Idea clave: Se aproximan a razón de 80 + 120 = 200 km/h.

¿Cuánto tardarán, a 200 km/h, en recorrer los 350 km que les separan?

Tiempo en encontrarse:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{350}{200} = \frac{7}{4} \text{ de hora} = 1 \text{ h } 45 \text{ min}$$

Se cruzan a las once menos cuarto de la mañana.

> Si dos móviles marchan en sentidos opuestos, la velocidad a la que se acercan es la suma de sus velocidades.

Alcances

ALCANCES

$\overrightarrow{v_1}$

$\overrightarrow{v_2}$

VELOCIDAD DE APROXIMACIÓN $\Big\}$ $v_1 - v_2$

Un ciclista profesional, entrenándose, avanza por una carretera a una velocidad de 38 km/h. Más adelante, a 22 km, un cicloturista avanza en la misma dirección a 14 km/h. ¿Cuánto tarda el uno en alcanzar al otro?

Idea clave: Se aproximan a razón de 38 – 14 = 24 km/h.

¿Cuánto tardarán, a 24 km/h, en recorrer los 22 km que les separan?

Tiempo hasta el encuentro:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12} \text{ de hora} = 55 \text{ min}$$

> Si dos móviles marchan en el mismo sentido, el más rápido al alcance del otro, la velocidad de aproximación es la diferencia de sus velocidades.

Actividades

1 Un coche va a 120 km/h y un camión a 90 km/h.

a) Si el coche sigue al camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo?

b) Si están a 504 km y se dirigen uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

2 Un tren que avanza a una velocidad de 70 km/h lleva una ventaja de 90 km a otro tren que avanza por una vía paralela a 110 km/h. Calcula el tiempo que tarda el segundo en alcanzar al primero y la distancia recorrida hasta lograrlo.

5 Cálculos con porcentajes

Tanto por ciento de una cantidad

Marina compró hace meses una moto por 1 800 € y ha pagado ya el 65% de su deuda. ¿Qué porcentaje le queda aún pendiente? ¿Cuánto le falta por pagar?

Ha pagado el 65% $\rightarrow$ 100 – 65 = 35% $\rightarrow$ le queda pendiente un 35%

La cantidad que adeuda es el 35% de 1 800:

$$35\% \text{ de } 1\,800 = 1\,800 \cdot \frac{35}{100} = 1\,800 \cdot 0{,}35 = 630$$

Le faltan por pagar 630 €.

Para hallar un tanto por ciento de una cantidad, se expresa el porcentaje en forma decimal y se multiplica por la cantidad.

Cálculo mental

Halla:

a) 10% de 500 b) 20% de 500

c) 1% de 1 000 d) 200% de 40

e) 50% de 240 f) 25% de 240

TOTAL	PORCENTAJE	PARTE CORRESPONDIENTE AL %
1 800	35%	1 800 · 0,35

Porcentaje correspondiente a una proporción

Marina compró hace meses una moto por 1 800 €, de los que aún le quedan pendientes de pago 630 €. ¿Qué porcentaje tiene aún pendiente? ¿Qué porcentaje ha pagado ya?

De un total de 1 800 €, le quedan por pagar 630 €.

De un total de 100, le queda por pagar x.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{TOTAL} & \text{PARTE} \\ 1\,800 & 630 \\ 100 & x \end{array}\right\} \frac{1\,800}{100} = \frac{630}{x} \rightarrow x = \frac{630 \cdot 100}{1\,800} = 35$$

Le queda por pagar un 35%. Por tanto, ya ha pagado un 65%.

Para hallar qué tanto por ciento representa una parte (P) respecto de un total (C) se efectúa $\frac{P}{C} \cdot 100$.

Cálculo mental

¿Qué tanto por ciento representa cada cantidad respecto de su total?

a) 45 respecto de 90.

b) 10 respecto de 40.

c) 20 respecto de 200.

d) 7 respecto de 10.

TOTAL	PARTE	% CORRESPONDIENTE A LA PARTE
1 800	630	$\frac{630}{1\,800} \cdot 100$

Actividades

1 Calcula:

a) El 32% de 500. b) El 86% de 60.

c) El 11% de 4 000. d) El 140% de 900.

e) El 150% de 398. f) El 400% de 740.

2 Calcula el tanto por ciento que representa:

a) 192 respecto de 800. b) 30 800 respecto de 35 000.

c) 434 respecto de 1 240. d) 10 080 respecto de 8 400.

e) 495 respecto de 900. f) 1 820 respecto de 520.

3 Dos hermanos compran un balón que cuesta 42 €. El mayor paga el 60%. ¿Qué porcentaje paga el pequeño? ¿Cuánto ha de pagar?

4 Elena tenía en su cuenta 5 000 € y ha adquirido un televisor por 750 €. ¿Qué porcentaje de sus ahorros ha gastado?

5 Alejandro quiere comprar una bicicleta que cuesta 360 €. Su padre se compromete a pagar el 50%, y su abuela, el 30%. ¿Cuánto pagará Alejandro?

Aumentos porcentuales

Un especulador compró el año pasado un terreno por 5 400 €, y desde entonces el precio ha subido un 15%. ¿Cuál es el valor actual del terreno?

El terreno vale ahora: $\left\{\begin{array}{l}\text{Lo que valía antes} \rightarrow 100\% \\ \qquad\text{más} \\ \text{lo que ha aumentado} \rightarrow 15\%\end{array}\right\}$ 100% + 15% = 115%. Es decir, el precio actual es el 115% del precio antiguo.

Valor actual: 115% de 5 400 = 5 400 · 1,15 = 6 210 €

El número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final se llama **índice de variación.**

En **aumentos porcentuales,** el índice de variación es 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla, pues, el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial:

VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

¿Qué índices de variación corresponden a estos aumentos porcentuales?

a) 15% b) 6% c) 30%
d) 90% e) 100% f) 200%

CANTIDAD INICIAL	AUMENTO PORCENTUAL
C	$C \cdot 1,15$ (+15% → 1 + 0,15 = 1,15)

Disminuciones porcentuales

Un trabajador tiene un salario bruto de 1 400 € al mes, del que le retienen un 15% de impuestos. ¿Qué salario neto percibe?

El salario neto es: $\left\{\begin{array}{l}\text{El salario bruto} \rightarrow 100\% \\ \qquad\text{menos} \\ \text{la retención} \rightarrow 15\%\end{array}\right\}$ 100% – 15% = 85%. Es decir, el salario neto es el 85% del salario bruto.

Salario neto: 85% de 1 400 = 1 400 · 0,85 = 1 190 €

En una **disminución porcentual,** el índice de variación es 1 menos la disminución porcentual puesta en forma decimal.

Para **calcular el valor final,** halla el índice de variación y multiplícalo por la cantidad inicial:

VALOR FINAL = VALOR INICIAL · ÍNDICE DE VARIACIÓN

Cálculo mental

¿Qué índices de variación corresponden a estas disminuciones porcentuales?

a) 15% b) 6% c) 30%
d) 90% e) 2% f) 10%

CANTIDAD INICIAL	DISMINUCIÓN PORCENTUAL
C	$C \cdot 0,85$ (–15% → 1 – 0,15 = 0,85)

Actividades

6 En una tienda de informática han subido todos los productos un 7%. Un ordenador valía 840 €; una impresora, 80 €, y un escáner, 60 €.

¿Cuánto valen ahora?

7 En un pantano había 1 840 hm^3 de agua. En el último semestre ha disminuido un 35%.

¿Cuánta agua hay ahora?

8 Hace un año compré un coche que me costó 8 000 €. Si lo vendiera ahora, me darían un 35% menos de su valor inicial. ¿Cuál es el precio actual del coche?

9 Un fontanero cobra 15 € por hora en horario normal, y un 18% más si se le llama fuera de horario. ¿A cuánto ascenderá la factura para un arreglo que le ha exigido dos horas y media de trabajo en la mañana de un domingo?

6 Interés bancario

Se llama **interés** al beneficio que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo.

Así, por ejemplo, un préstamo al 4% anual significa:

CAPITAL PRESTADO		TIEMPO				BENEFICIO
100 €	⟶	en 1 año	⟶	producen	⟶	4 €
500 €	⟶	en 1 año	⟶	producen	⟶	$4 \cdot 5 = 20$ €
500 €	⟶	en 3 años	⟶	producen	⟶	$20 \cdot 3 = 60$ €

Como puedes ver, se trata de una situación de proporcionalidad compuesta.

Ten en cuenta

El tanto por ciento de beneficio anual se llama **rédito** (r).

$$r = 4\%$$
$$\downarrow$$

Significa que 100 €, en 1 año, producen un beneficio de 4 €.

Problema resuelto

Un banco ofrece un beneficio anual del 4%. ¿Qué beneficio obtendremos si depositamos 750 € durante 3 años?

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. DIRECTA

CAPITAL		TIEMPO				BENEFICIO = INTERÉS
100 €	⟶	en 1 año	⟶	producen	⟶	4 €
1 €	⟶	en 1 año	⟶	produce	⟶	$\frac{4}{100}$ €
750 €	⟶	en 1 año	⟶	producen	⟶	$\frac{750 \cdot 4}{100}$ €
750 €	⟶	en 3 años	⟶	producen	⟶	$\frac{750 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 90$ €

Resumiendo:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \text{CAPITAL} & & \text{TIEMPO} & & \text{INTERÉS} \\ 100 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 4 \\ 750 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & I \end{array}\right\} \to \frac{100}{750} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{I} \to I = \frac{750 \cdot 4 \cdot 3}{100} = 90 \text{ €}$$

Solución: 750 € colocados al 4% anual durante 3 años producen 90 €.

Un capital, C, colocado al $r\%$ anual durante t años produce un beneficio I.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

PROP. DIRECTA

$$\left.\begin{array}{ccccc} \text{CAPITAL} & & \text{TIEMPO} & & \text{INTERÉS} \\ 100 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & r \\ C & \longrightarrow & t & \longrightarrow & I \end{array}\right\} \to \frac{100}{C} \cdot \frac{1}{t} = \frac{r}{I} \to I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Actividades

1 Un banco ofrece un beneficio del 5% anual.

a) ¿Qué beneficio producen 100 euros en 4 años?

b) ¿Qué beneficio producen 600 euros en 1 año?

c) ¿Qué beneficio producen 600 euros en 4 años?

2 Calcula el interés producido por 8 000 euros colocados al 5% durante 3 años.

3 ¿Qué interés debo pagar por un préstamo de 3 000 euros al 8% que devuelvo al cabo de 2 años?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Opera y calcula

1 ▼▽▽ Calcula x en cada caso.

a) $\frac{15}{21} = \frac{20}{x}$

b) $\frac{38}{57} = \frac{x}{81}$

c) $\frac{1,6}{x} = \frac{3}{4,2}$

d) $\frac{x}{2,5} = \frac{204}{136}$

2 ▼▽▽ Calcula mentalmente.

a) 50% de 360 b) 25% de 88

c) 10% de 1 375 d) 20% de 255

e) 75% de 800 f) 30% de 150

3 ▼▽▽ Calcula.

a) 20% de 1 240

b) 12% de 175

c) 87% de 4 000

d) 95% de 60

e) 13% de 2 400

f) 7% de 250

g) 22% de 1 353

h) 5% de 421

4 ▼▽▽ Copia y completa en tu cuaderno.

a) Para calcular el 12%, se multiplica por …

b) Para calcular el 80%, se multiplica por …

c) Para calcular el …, se multiplica por 0,2.

d) Para calcular el …, se multiplica por 0,02.

5 ▼▽▽ Calcula el tanto por ciento que representa:

a) 42 respecto de 200

b) 432 respecto de 960

c) 117 respecto de 650

d) 8 respecto de 50

6 ▼▽▽ Piensa y completa en tu cuaderno.

a) Al multiplicar por 1,3 se aumenta un …%.

b) Al multiplicar por 1,08 se aumenta un …%.

c) Al multiplicar por 0,90 se disminuye un …%.

d) Al multiplicar por 0,65 se disminuye un …%.

Aplica lo aprendido

Problemas de proporcionalidad simple y compuesta

7 ▼▽▽ Sabemos que cierto vehículo consume 6,4 *l* de combustible cada 100 km. ¿Cuánto combustible gastará al recorrer 300 km?

¿Y si recorre 375 km?

8 ▼▽▽ Tres operarios de una empresa de reformas pintan una casa en 20 horas.

a) ¿Cuánto tardarían 4 operarios en pintar esa misma casa?

b) ¿Cuántos pintores se necesitarían para pintar la casa en 5 horas?

9 ▼▽▽ Trabajando 8 horas al día, he tardado 5 días en poner el suelo de una vivienda. ¿Cuántos días habría tardado en poner dicho suelo trabajando 10 horas diarias?

10 ▼▽▽ Un campesino ha obtenido una cosecha de 40 000 kilos de trigo de un campo que tiene una superficie de 2,5 hectáreas. ¿Qué cosecha puede esperar este hombre de un campo próximo de hectárea y media?

11 ▼▽▽ Un grifo con un caudal de 45 litros a la hora llena un depósito de agua en 8 horas. ¿Cuál debería ser el caudal para llenar la mitad del depósito en 6 horas?

Problemas de repartos proporcionales

12 ▼▽▽ Tres vecinos de una aldea deciden alquilar conjuntamente una máquina motosierra durante 12 días. Juan la tiene 2 días; Pedro, 3 días; y Rufino, 7 días. El importe total del alquiler asciende a 264 euros. ¿Cuánto debe pagar cada uno de los hombres?

13 ▼▼▽ Un estudiante ocupa un piso de alquiler el día uno de septiembre con la idea de compartirlo con otros dos compañeros. El día 10 entra el segundo inquilino, y el día 25, el tercero. ¿Cómo deben repartir ese primer mes el recibo del alquiler, que asciende a 605 euros?

Problemas de mezclas

14 ▼▽▽ Un fabricante de churros usa una mezcla de aceite que contiene dos partes de aceite de oliva por cada parte de aceite de girasol. Sabiendo que compra el aceite de oliva a 3,40 euros el litro y el de girasol a 1,60 euros el litro, ¿a cómo le sale el litro de mezcla?

15 ▼▽▽ Para fabricar cierta colonia se mezcla 1 litro de esencia con 5 litros de alcohol y 2 litros de agua destilada. La esencia cuesta 200 euros el litro; el alcohol, 6 euros el litro; y el agua destilada, 1 euro el litro. ¿Cuál es el coste de un litro de esa colonia?

Problemas de móviles, velocidades y tiempos

16 ▼▽▽ Dos poblaciones A y B distan 270 km. A las 12 de la mañana sale de A hacia B un coche a una velocidad de 100 km/h. En el mismo instante, un coche sale de B hacia A a 80 km/h. ¿A qué hora se cruzan?

17 ▼▽▽ Un ciclista sale de un lugar a una velocidad de 18 km/h. Media hora más tarde, sale en su persecución, desde el mismo lugar, otro ciclista a 22 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero?

18 ▼▼▽ En un depósito con 16 800 litros de agua se abren por error, simultáneamente, un grifo con un caudal de 185 litros por minuto y el desagüe, con 335 litros por minuto de caudal. ¿Cuánto tarda el depósito en vaciarse?

Problemas de porcentajes

19 ▼▽▽ Para comprar un piso de 180 000 €, se ha de pagar, además, un 8% de IVA y 5 400 € de gastos de notaría y gestión. ¿Cuál es el gasto total?

20 ▼▽▽ El 65% de las 840 localidades de un cine están ocupadas. ¿Cuántos asientos hay vacíos?

21 ▼▽▽ De 1 232 hombres encuestados, 924 declaran que colaboran en las tareas del hogar. ¿Qué porcentaje de hombres dice trabajar en casa?

22 ▼▽▽ En una tienda se anuncian rebajas del 35%. Una camisa costaba 60 €; un pantalón, 72 €, y un jersey, 46 €. ¿Cuánto costarán con la rebaja?

23 ▼▼▽ En una carrera ciclista, la primera semana abandonan el 20% de los corredores, y en la segunda, el 40% de los que quedaban. ¿Qué porcentaje de los que empezaron permanece en carrera?

Problemas de depósitos y préstamos

24 ▼▽▽ Calcula el interés que produce un capital de 40 000 €, colocados al 3,25% anual durante:

a) Un año.

b) Un mes.

c) Cinco meses.

25 ▼▽▽ Jorge tiene 24 000 €, y pacta mantener el dinero en un banco durante cinco años, cobrando los beneficios cada año, a un interés del 6% anual. ¿Qué beneficio obtiene anualmente? ¿Y en los cinco años del acuerdo?

Resuelve problemas

26 ▼▼▽ Tres socios invierten en un negocio 272 000 €. El primero pone el 65% del capital; el segundo, el 20%, y el tercero, el resto. Si a final de año han conseguido una rentabilidad total del 8% del capital invertido, ¿qué cantidad recibirá cada uno?

27 ▼▼▽ Un automóvil ha ido a 90 km/h durante 20 minutos y a 120 km/h durante los 10 minutos siguientes. ¿Cuál ha sido la velocidad media en ese tiempo?

28 ▼▼▽ Un camión sale de A hacia B a 80 km/h. Un cuarto de hora después sale un coche, en la misma dirección, a 120 km/h, llegando ambos a B simultáneamente. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

29 ▼▼▽ Un comerciante compra 30 sacos de 50 kilos de café a 10,5 €/kg y 15 sacos de 40 kilos de otro café, a 14 €/kg. Después, los envasa en bolsas de 400 gramos. ¿A cómo debe vender la bolsa si desea ganar 1,50 céntimos por cada kilo?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

30 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

En un examen de Matemáticas han aprobado 22 alumnos, lo que supone el 88% del total de la clase. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

88% del TOTAL = 22 alumnos

TOTAL · 0,88 = 22 → TOTAL = 22 : 0,88 = 25

En la clase hay 25 alumnos.

31 ▼▼▽ En la sesión de tarde de un teatro se han ocupado hoy 693 butacas, lo que supone el 77% del total. ¿Cuál es el aforo del teatro?

32 ▼▼▽ El 34% de los asistentes a un congreso sobre la paz son europeos; el 18%, africanos; el 32%, americanos, y el resto, asiáticos. Sabiendo que hay 51 europeos, ¿cuántos hay de cada uno de los demás continentes?

33 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

Gonzalo ha pagado 81,34 € por unos zapatos rebajados un 17%. Calcular el precio de los zapatos antes de la rebaja.

Por tener una rebaja del 17% se ha pagado el 83% del precio inicial de los zapatos.

83% del precio inicial = 81,34

0,83 · precio inicial = 81,34

Precio inicial = 81,34 : 0,83 = 98 €

Los zapatos costaban 98 € antes de la rebaja.

34 ▼▼▽ Ignacio ha pagado 63 € por una camisa que estaba rebajada un 10%. ¿Cuánto costaba la camisa antes de la rebaja?

Autoevaluación

¿Dominas la operativa con porcentajes y la aplicas a la resolución de problemas?

1 Calcula el valor de x en cada caso.

a) 82% de 1 350 = x b) 12% de x = 30

c) x% de 450 = 9

2 Copia en tu cuaderno y completa.

a) Para calcular el 17%, se multiplica por ….

b) Para calcular el …, se multiplica por 0,06.

c) Para aumentar un 30%, se multiplica por ….

d) Para rebajar el …%, se multiplica por 0,85.

3 Un GPS cuesta 556 €. Calcula el precio final que pagará por él un cliente si le hacen una rebaja del 20% y le cargan un 18% de IVA.

4 A una reunión de vecinos asistieron 58 propietarios de un total de 145. ¿Qué porcentaje de vecinos acudió a la reunión?

¿Conoces y aplicas procedimientos específicos para resolver otros tipos de problemas aritméticos?

5 Una motobomba, que aporta un caudal de 5 litros por segundo, llena un depósito de agua en 40 minutos. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si la motobomba se sustituye por otra con un caudal de 8 litros por segundo?

6 Una botella de 2 litros de aceite pesa 1 836 gramos. ¿Cuánto pesará una garrafa de 5 litros?

7 En una tintorería, trabajando 7 horas al día, se ha obtenido un beneficio de 1 932 € en 15 días. ¿Qué beneficio se puede esperar para los próximos 5 días si se aumenta la jornada en una hora diaria?

8 Un ciclista sale de A hacia B a una velocidad de 13 km/h. Simultáneamente, otro ciclista sale de B hacia A a una velocidad de 15 km/h. Calcula cuánto tiempo tardarán en encontrarse sabiendo que A y B distan 21 km.

9 ¿Se coloca un capital de 16 500 € en el banco al 6%, retirando anualmente los intereses que produce. ¿Qué beneficio se obtendrá en 5 años?

10 Para fabricar un brazalete se decide fundir un anillo de oro de 50 gramos y ley 0,89 con una pulsera de 90 gramos y ley 0,75. ¿Cuál será en este caso la ley del brazalete?

5 Expresiones algebraicas

El lenguaje algebraico actual es sencillo, cómodo y operativo. En el largo camino para llegar a él, cabe considerar tres grandes etapas.

Álgebra primitiva o retórica. En ella, todo se describe con lenguaje ordinario. Babilonios, egipcios y griegos antiguos la practicaban; y también los árabes, quienes, entrado ya el siglo IX, retornaron a ella.

Álgebra sincopada. **Diofanto** (s. III) fue el pionero, utilizando una serie de abreviaturas que aliviaban los procesos. Por ejemplo, $7x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ lo escribía **ss7 c2 x5 M s4 u6** (**s** significa cuadrado; **c**, cubo; **x**, incógnita; **M**, menos; **u**, número).

Durante el Renacimiento (ss. XV y XVI), el álgebra sincopada mejoró debido a la incorporación de nuevos símbolos: operaciones, coeficientes, potencias...

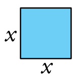
Álgebra simbólica. Consiste en una simbolización completa. **Vieta,** a finales del XVI, mejoró lo que ya había, de modo que su lenguaje algebraico fue predecesor del actual. Y **Descartes,** en el siglo XVII, lo acabó de perfeccionar. Actualmente, escribimos el álgebra tal como lo hacía él, a excepción del signo =, que él lo ponía así: ∞ (parece que este signo proviene de una deformación de æ, iniciales de *aequalis*, igual).

La falta de operatividad del álgebra durante muchos siglos obligó a los matemáticos a agudizar su ingenio para obtener y demostrar relaciones algebraicas. Algunos se valieron, para ello, de figuras geométricas, dando lugar al *álgebra geométrica*.

1 Monomios

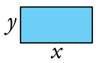
Observa

Hay muchas situaciones en las que aparecen monomios:

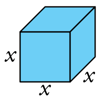


área $\rightarrow x^2$

perímetro $\rightarrow 4x$



área $\rightarrow xy$



volumen $\rightarrow x^3$

superficie $\rightarrow 6x^2$

Las siguientes expresiones algebraicas son monomios:

$$3x^2 \qquad 2y \qquad -5x^2y \qquad -\frac{2}{3}x^3$$

Monomio es el producto indicado de un número por una o más letras:

— Las letras **(parte literal)** representan números de valor desconocido (variables). Por eso, conservan todas las propiedades de los números y sus operaciones.

— **Coeficiente** es el número que interviene.

Se llama **grado** de un monomio al número de factores que forman su parte literal.

Un número puede ser considerado como un monomio de grado 0, pues $x^0 = 1$.

Por ejemplo:

	$3x^2$	$2y$	$-5x^2y$	$-\frac{3}{2}x^3$	x	7
COEFICIENTE	3	2	-5	$-\frac{3}{2}$	1	7
PARTE LITERAL	x^2	y	x^2y	x^3	x	no tiene
GRADO	2	1	3	3	1	0

Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen idéntica la parte literal.

Por ejemplo: $2x,\ -5x,\ \frac{3}{4}x,\ x$ son semejantes.

$5x^2,\ \sqrt{2}x^2,\ \frac{3}{5}x^2,\ x^2$ son semejantes.

Si en un monomio se sustituye cada letra (variable) por un número y se efectúan las operaciones correspondientes, se obtiene el **valor numérico** del monomio para dichos valores de las variables.

Por ejemplo, el valor numérico de $3xy$ para $x = 2,\ y = -5$ es $3 \cdot 2 \cdot (-5) = -30$.

Actividades

1 Indica el coeficiente y el grado de estos monomios:

a) $-2x^7$ b) x^9 c) x d) 5

2 Halla el valor numérico de los siguientes monomios para $x = 3,\ y = -2$:

a) $5x^3$ b) $2xy$ c) xy^2 d) $-xy$

3 Di cuáles de los siguientes monomios son semejantes a $5x^2$:

$$7x^2,\ 5x^3,\ 5x,\ 5xy,\ x^2,\ 3x^2y$$

4 Escribe dos monomios semejantes en cada caso:

a) $-5xy$ b) $2x^3$ c) x

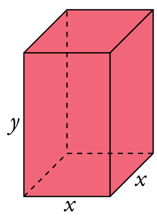
5 La base de un ortoedro es un cuadrado de lado x. Su altura es y. Expresa:

a) El área de la base.

b) El área de una cara lateral.

c) El perímetro de la base.

d) El volumen.



2 Operaciones con monomios

Suma y resta de monomios

La **suma** de monomios semejantes es otro monomio, también semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma de sus coeficientes.

Si dos monomios no son semejantes, su suma no se puede simplificar y hay que dejarla indicada.

La **resta** es un caso particular de la suma.

Por ejemplo: $7x^2 + 11x^2 = 18x^2$

$3xy - 4xy + 7xy = 6xy$

$7x - 2x^2$ no se puede simplificar.

Producto de monomios

El **producto** de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes, y su parte literal, el producto de las partes literales de los factores.

Por ejemplo: $(2x) \cdot (3x^2) = 6x^3$ $\quad 3 \cdot 2xy = 6xy$

$(2x) \cdot (3xy) = 6x^2y$ $\quad 3x^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}y = \dfrac{3}{\sqrt{3}}x^2y = \sqrt{3}x^2y$

$(2x^2)^3 = 2^3 \cdot (x^2)^3 = 8x^6$ $\quad (\sqrt{3}x)^2 = (\sqrt{3})^2x^2 = 3x^2$

Cociente de monomios

El **cociente** de dos monomios se obtiene dividiendo sus correspondientes expresiones y simplificando. El resultado puede ser un monomio o no serlo.

$\dfrac{3x^2}{2x} = \dfrac{3}{2}x$; $\dfrac{2x^2}{xy} = \dfrac{2x}{y}$ no es un monomio (tiene parte literal en el denominador).

Entrénate

1. Suma.
   a) $x + 3x + 2x$
   b) $6x - 3x + x$
   c) $x^2 + 2x^2 + x^2$
2. Multiplica.
   a) $x \cdot 3x$
   b) $2x \cdot 5x^2$
   c) $2x^2 \cdot \dfrac{3}{2}x^2$
3. Divide.
   a) $6x : 3x$
   b) $2x^2 : 5x^2$
   c) $\dfrac{1}{2}x^2 : \dfrac{3}{2}x$

Actividades

1 Efectúa las siguientes sumas de monomios. Cuando el resultado no pueda simplificarse, déjalo indicado:

a) $5x - 3x + 4x + 7x - 11x + x$

b) $8x^2 - 5x^2 + \dfrac{2}{3}x^2 + x^2 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7}{3}x^2$

c) $x + 7x - x^2 + 3x + 5x^2 - 2x^2$

d) $7x^3 - 11x^3 + 3y^3 - y^3 + 2y^3 - 4$

2 Opera.

a) $(3x^2) \cdot (5xy)$ b) $(\sqrt{3}x) \cdot (\sqrt{3}y)$

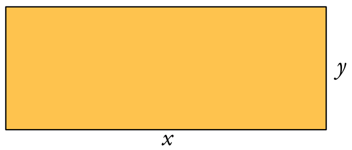
c) $(3xy)^2 : (2x^2)$ d) $(\sqrt{3}x)^2 \cdot (2x)$

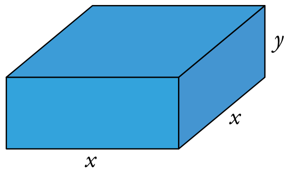
3 $A = 5x^2$, $B = 4x$, $C = -2x^2$. Calcula:

a) $A + C$ b) $A \cdot B$ c) B^3

d) $A^2 - C$ e) $(A \cdot B) : C$ f) $C : B$

3 Polinomios





Área de una base = $x \cdot x = x^2$

Área de una cara lateral = $x \cdot y$

Vamos a escribir en lenguaje algebraico algunos enunciados:

a) El perímetro del rectángulo del margen:

Perímetro $\rightarrow 2x + 2y$

b) El cuadrado de un número más su triple $\rightarrow x^2 + 3x$

c) La superficie del ortoedro del margen:

Superficie $\rightarrow 2x^2 + 4xy$

d) La edad de Elvira más la de Lorena, que le saca tres años:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Elvira} \rightarrow x \\ \text{Lorena} \rightarrow x + 3 \end{array}\right\} x + x + 3 \rightarrow 2x + 3$$

Las expresiones obtenidas en cada uno de los enunciados son *polinomios.*

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. Cada uno de los monomios que lo forman se llama **término.** También los monomios pueden ser considerados polinomios con un solo término.

Es posible que en un polinomio haya algunos monomios semejantes. En tal caso, conviene operar con ellos simplificando la expresión y obteniendo el polinomio en su **forma reducida.**

Por ejemplo: $5x^2 + 4x^4 - 2x^2 - 3x^4 + 1 \rightarrow x^4 + 3x^2 + 1$

$3x^3 - 2x^2 - 2x^3 + x - x^3 - 5 \rightarrow -2x^2 + x - 5$

Se llama **grado** de un polinomio al mayor de los grados de los monomios que lo componen cuando el polinomio está en su forma reducida.

Es necesario reducir el polinomio antes de decir su grado, ya que es posible que los monomios de mayor grado se simplifiquen y desaparezcan.

Por ejemplo: $5x^2y + 5x - 8y^2$ tiene grado 3, pues es el grado de $5x^2y$.

$7x^3 - 5x^2 + 3x^3 - 2x - 10x^3 = -5x^2 - 2x$ tiene grado 2.

Entrénate

Reduce estos polinomios y di su grado:

a) $3x^2 + 2x - 3x + 1 + x^2$

b) $2 - x^2 + 2x + x^2 - 7$

c) $3x + 2 + 2x^3 - 3x^2 + x^2 - 5$

Actividades

1 Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

a) La suma de un número más su cubo.

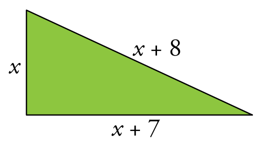
b) La suma de dos números naturales consecutivos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles (llama x al lado desigual e y a los otros dos lados).

d) El área total de un cilindro de 4 m de altura en función del radio de la base, r.

e) El área total de un ortoedro cuya base es un cuadrado de lado l y cuya altura es 5 m.

2 Expresa algebraicamente el perímetro de este triángulo.



3 Di el grado de cada uno de estos polinomios:

a) $x^5 - 6x^2 + 3x + 1$

b) $5xy^4 + 2y^2 + 3x^3y^3 - 2xy$

c) $x^2 + 3x^3 - 5x^2 + x^3 - 3 - 4x^3$

d) $2x^2 - 3x - x^2 + 2x - x^2 + x - 3$

4 Operaciones con polinomios

Suma y resta de polinomios

Para sumar dos polinomios, agrupamos sus términos y simplificamos los monomios semejantes. Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

Por ejemplo: $A = 3x^2 + 5x - 2$, $B = x^3 + 4x^2 - 5$

$$\boxed{\begin{array}{r} A \\ +\ B \\ \hline A + B \end{array}} \rightarrow \begin{array}{rrrr} & 3x^2 & +\ 5x & -\ 2 \\ x^3 & +\ 4x^2 & & -\ 5 \\ \hline x^3 & +\ 7x^2 & +\ 5x & -\ 7 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{r} A \\ -\ B \\ \hline A - B \end{array}} \rightarrow \begin{array}{rrrr} & 3x^2 & +\ 5x & -\ 2 \\ -x^3 & -\ 4x^2 & & +\ 5 \\ \hline -x^3 & -\ x^2 & +\ 5x & +\ 3 \end{array}$$

A veces, escribimos directamente el resultado, quitando paréntesis (si los hay) y agrupando los monomios semejantes. Por ejemplo:

- $(x^2 + 3x + 2) + (2x^2 - 5) = x^2 + 3x + 2 + 2x^2 - 5 = 3x^2 + 3x - 3$
- $(3x + 1) - (2x - 3) = 3x + 1 - 2x + 3 = x + 4$

Definición

Se llama **opuesto** de un polinomio al que resulta de cambiar de signo todos sus términos:

$$-(x^3 + 2x^2 - 5x - 11) =$$
$$= -x^3 - 2x^2 + 5x + 11$$

Producto de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada término del polinomio.

Por ejemplo: $M = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, $N = 3x^2$

$$\boxed{\begin{array}{r} M \\ \times\ N \\ \hline M \cdot N \end{array}} \rightarrow \begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 5x - 1 \\ 3x^2 \\ \hline 3x^5 - 6x^4 + 15x^3 - 3x^2 \end{array}$$

También, en este caso, podemos escribir directamente el resultado. Por ejemplo:

- $(2x^2 - 3) \cdot (2x) = 4x^3 - 6x$
- $7(2x + 5) = 14x + 35$
- $(5x^2)(6x^2 - 4x + 3) = 30x^4 - 20x^3 + 15x^2$

Entrénate

Opera.

a) $(2x^2 + x - 3) + (x^2 - 2x + 1)$

b) $(2x^2 + x - 3) - (x^2 - 2x + 1)$

c) $(x^2 + 2x - 1) \cdot 2x$

d) $3x^2 \cdot (2x - 5)$

Actividades

1 Sean $P = x^4 - 3x^3 + 5x + 3$, $Q = 5x^3 + 3x^2 - 11$. Halla $P + Q$ y $P - Q$.

2 Efectúa.

a) $2x(3x^2 - 4x)$

b) $5(x^3 - 3x)$

c) $4x^2(-2x + 3)$

d) $-2x(x^2 - x + 1)$

e) $-6(x^3 - 4x + 2)$

f) $-x(x^4 - 2x^2 + 3)$

3 Halla los productos siguientes:

a) $x(2x + y + 1)$

b) $ab(a + b)$

c) $5(3x^2 + 7x + 11)$

d) $x^2y(x + y + 1)$

e) $5xy^2(2x + 3y)$

f) $-2(5x^3 + 3x^2 - 8)$

Producto de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de los factores por todos y cada uno de los monomios del otro factor y, después, se suman los monomios semejantes obtenidos.

Por ejemplo: $P = 2x^3 - 4x^2 - 1$, $Q = 3x - 2$

$$
\begin{array}{rl}
2x^3 - 4x^2 \qquad - 1 & \longleftarrow P \\
3x - 2 & \longleftarrow Q \\
\hline
-4x^3 + 8x^2 \qquad + 2 & \longleftarrow \text{producto de } -2 \text{ por } P \\
6x^4 - 12x^3 \qquad - 3x \quad & \longleftarrow \text{producto de } 3x \text{ por } P \\
\hline
6x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 3x + 2 & \longleftarrow P \cdot Q
\end{array}
$$

Ten en cuenta

Esta forma de disponer los cálculos permite multiplicar polinomios de manera ordenada y segura. Cuando falta algún término, hay que dejar un hueco en el lugar correspondiente.

A veces, cuando hay pocos términos, realizamos el producto escribiéndolo directamente. Por ejemplo:

$$(2x^2 - 1)(3x + 4) = 6x^3 + 8x^2 - 3x - 4$$

Sacar factor común

Ten en cuenta

La detección de factores comunes, junto con la aplicación de las "identidades notables", nos permitirá descomponer en factores algunos polinomios.

Cuando todos los términos de un polinomio, $P(x)$, son múltiplos de un mismo monomio, $M(x)$, podemos extraer $M(x)$ como **factor común.**

Por ejemplo:

$$P(x) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$$

El monomio $M(x) = 3x$ es factor común a todos los términos de $P(x)$. Por tanto:

$$P(x) = 3x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1)$$

Para convencernos de que las dos expresiones son iguales y comprobar que no nos hemos equivocado, podemos realizar la multiplicación, quitando el paréntesis:

$$3x(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2 - 3x$$

Actividades

4 Dados los polinomios $P = 3x^2 - 5$, $Q = x^2 - 3x + 2$, $R = -2x + 5$, calcula:

a) $P \cdot R$ b) $Q \cdot R$ c) $P \cdot Q$

5 Opera y simplifica:

a) $2x(3x^2 - 2) + 5(3x - 4)$

b) $(x^2 - 3)(x + 1) - x(2x^2 + 5x)$

c) $(3x - 2)(2x + 1) - 2(x^2 + 4x)$

6 Saca factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x$

b) $B(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2$

c) $C(x) = 20x^3 + 15x$

d) $D(x) = 2x^6 + 4x^3 - 2x$

5 Preparación para ecuaciones

Expresiones de primer grado

Con el fin de prepararte para la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de primer grado, te conviene adquirir agilidad en la operatoria y simplificación de expresiones de primer grado.

Ejercicios resueltos

1. Simplificar esta expresión:

$$\mathbf{3(5x-7)+2(x-1)-5x+3}$$

2. Multiplicar por 12 y simplificar esta expresión:

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{3}{4}$$

3. Multiplicar por 20 y simplificar esta expresión:

$$\frac{3(x-2)}{4}-\frac{2x-4}{5}+1$$

4. En la expresión $4x+3y-3$, sustituir x por $7-4y$ y simplificar.

1. $3(5x-7)+2(x-1)-5x+3=15x-21+2x-2-5x+3=12x-20$

2. $12\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{12x}{2}-\frac{12x}{3}+\frac{36}{4}=6x-4x+9$

3. $20\cdot\left(\frac{3(x-2)}{4}-\frac{2x-4}{5}+1\right)=\frac{60(x-2)}{4}-\frac{20(2x-4)}{5}+20=$

$=15(x-2)-4(2x-4)+20=15x-30-8x+16+20=$

$=7x+6$

4. $4x+3y-3 \rightarrow 4(7-4y)+3y-3=28-16y+3y-3=-13y+25$

Actividades

1 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $3(x-1)+5(x-2)-7x$

b) $2(2x-3)+1-(x-5)$

c) $5x+3(1-x)-12-2(x-5)$

d) $10(x-1)+2(x+9)-4(2+3x)$

e) $3x-1-(2x+1)-1+(x+2)+3$

2 Multiplica por el número indicado y simplifica.

a) $\frac{3(x+2)}{2}+\frac{x-1}{5}-\frac{2(x+1)}{5}-\frac{37}{10}$ por 10

b) $\frac{2x-3}{2}-\frac{x+3}{4}+4+\frac{x-1}{2}$ por 4

c) $x+\frac{2x-3}{9}+\frac{x-1}{3}-\frac{12x+4}{9}$ por 9

d) $\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}-2(x+y)+3$ por 6

e) $\frac{2(x+1)}{3}-\frac{y}{2}-1$ por 6

3 Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión:

a) La suma de un número más su tercera parte.

b) La suma de las edades de Ana y Raquel, sabiendo que Ana tiene 8 años más que Raquel.

c) Invertí una cantidad, x, y ha aumentado un 12%. ¿Qué cantidad tengo ahora?

d) Invertí una cantidad, x, y he perdido el 5%. ¿Qué cantidad tengo ahora?

e) La suma de tres números consecutivos.

f) El triple de un número menos su cuarta parte.

g) La suma de las edades de Alberto y su padre, sabiendo que este tiene 28 años más que aquel.

h) Un ciclista va a una velocidad v. Otro ciclista viene 10 km/h más rápido. ¿A qué velocidad se acerca el uno al otro?

Expresiones de segundo grado

Con vistas a la resolución de ecuaciones de segundo grado, te conviene adquirir agilidad en el manejo de este tipo de expresiones.

Ejercicios resueltos

1. Simplificar esta expresión:

$$(x+5)^2 - 2(x+1)(x-3)$$

1. $(x+5)^2 - 2(x+1)(x-3) =$ (efectuamos las multiplicaciones)

$= x^2 + 10x + 25 - 2(x^2 - 2x - 3) =$ (suprimimos paréntesis)

$= x^2 + 10x + 25 - 2x^2 + 4x + 6 = -x^2 + 14x + 31$

2. Multiplicar por 4 y simplificar esta expresión:

$$\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x+2)(x-2)}{4} - \frac{3}{4}$$

2. $4 \cdot \frac{(x-1)^2}{2} - 4 \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{4} - 4 \cdot \frac{3}{4} =$

$= 2(x-1)^2 - (x+2)(x-2) - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4) - 3 =$

$= 2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 4 - 3 = x^2 - 4x + 3$

3. Expresar algebraicamente el producto de dos números pares consecutivos.

3. Un número par cualquiera: $2x$

El siguiente número par: $2x + 2$

El producto: $2x \cdot (2x+2)$

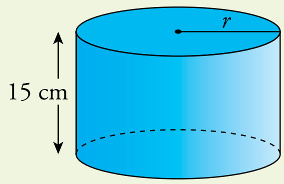
Simplificando: $4x^2 + 4x$

4. Expresar algebraicamente el área total de un cilindro de 15 cm de altura y radio de la base desconocido.

4. $A_{\text{TOTAL}} = 2\,A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$

$h = 15 \;\rightarrow\; A_{\text{TOTAL}} = 2\pi r^2 + 30\pi r$

Es una expresión de 2.° grado con variable r.



Actividades

4 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x-1)(x+1) + (x-2)^2 - 3$

b) $(x+2)(x-3) + x - 3$

c) $(x+1)^2 - 2x(x+2) + 14$

d) $(x+1)^2 - (x-1)^2 + 2 - x^2 - 6$

5 Multiplica por el número indicado y simplifica:

a) $x(2x+1) - \frac{(x-1)^2}{2} - 3$ por 2

b) $\frac{x(x+3)}{2} - \frac{(x+1)^2}{3} + \frac{1}{3}$ por 6

6 Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión:

a) El producto de dos números naturales consecutivos.

b) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden x y $x+5$.

c) El área de un rectángulo cuyas dimensiones (largo y ancho) suman 11 dm.

d) El área de un rectángulo de 200 m de perímetro.

7 La diferencia de dos números es 20. Si al menor lo llamamos x:

a) ¿Cómo se designa al mayor?

b) ¿Cómo se designa su producto?

c) ¿Cómo se designa la suma de sus cuadrados?

Ejercicios y problemas

Practica

Monomios

1 ▼▽▽ Indica cuál es el grado y el coeficiente de los siguientes monomios y di cuáles son semejantes:

a) $2x^2$ b) $-3x^3$ c) $\frac{1}{2}x^2$ d) $\frac{3}{4}x$ e) $-\frac{1}{3}x$ f) x^3

2 ▼▽▽ Calcula el valor numérico de cada uno de estos monomios para $x = -1$ y para $y = 1/2$:

a) $3x^2$ b) $\frac{2}{5}x^3$ c) $-2xy^2$ d) $-x^2y$ e) $\frac{1}{2}x^2$ f) $-\frac{1}{4}x$

3 ▼▽▽ Opera.

a) $-2x^3 + x^3 - 3x^3$ b) $3x^2 - \frac{2}{5}x^2 + 5x^2$

c) $\frac{1}{2}xy - \frac{3}{4}xy + xy$ d) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^2 + x^2$

4 ▼▽▽ Dados los monomios $A = -5x^4$, $B = 20x^4$, $C = 2xy^2$, calcula:

a) $A + B$ b) $A - B$ c) $A \cdot B$

d) $B \cdot C$ e) $B : A$ f) $A : B$

5 ▼▽▽ Expresa mediante un monomio cada uno de estos enunciados:

a) La mitad de un número más su tercera parte.

b) El área de un círculo de radio r.

c) El producto de un número por el triple de otro.

d) El volumen de un ortoedro de dimensiones x, $2x$ y 5 cm.

e) El volumen de una pirámide de altura h y cuya base es un cuadrado de lado l.

Polinomios

6 ▼▽▽ Indica cuál es el grado de los siguientes polinomios (recuerda que deben estar en forma reducida):

a) $2x^4 - 3x^2 + 4x$ b) $x^2 - 3x^3 + 2x$

c) $3x^3 - 2x^2 - 3x^3$ d) $2x + 3$

7 ▼▽▽ Efectúa.

a) $3x(2x^2 - 5x + 1)$ b) $7x^3(2x^3 + 3x^2 - 2)$

c) $-5x(x^4 - 3x^2 + 5x)$ d) $-x^2(x^3 + 4x^2 - 6x + 3)$

8 ▼▽▽ Opera y simplifica.

a) $(5x - 2)(3 - 2x)$ b) $x(x - 3)(2x - 1)$

c) $(x^2 - 5x)(x^3 + 2x)$ d) $(3x^3 + 1)(2x^2 - 3x + 5)$

9 ▼▽▽ Expresa mediante un polinomio.

a) La suma de los cuadrados de dos números consecutivos.

b) El área total de un ortoedro de dimensiones x, $2x$ y 5 cm.

c) La cantidad de leche envasada en "x" botellas de 1,5 l y en "y" botellas de 1 l.

d) El área de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide 3 cm más que el otro.

Factor común e identidades notables

10 ▼▽▽ Saca factor común en cada caso:

a) $9x^2 + 6x - 3$ b) $2x^3 - 6x^2 + 4x$

c) $10x^3 - 5x^2$ d) $x^4 - x^3 + x^2 - x$

11 ▼▽▽ Saca factor común en cada polinomio:

a) $410x^5 - 620x^3 + 130x$ b) $72x^4 - 64x^3$

c) $30x^6 - 75x^4 - 45x^2$ d) $5x - 100x^3$

Expresiones de primer grado

12 ▼▽▽ Opera y simplifica.

a) $6(x + 3) - 2(x - 5)$

b) $3(2x + 1) + 7(x - 3) - 4x$

c) $5(3 - 2x) - (x + 7) - 8$

d) $4(1 - x) + 6x - 10 - 3(x - 5)$

e) $2x - 3 + 3(x - 1) - 2(3 - x) + 5$

f) $2(x + 3) - (x + 1) - 1 + 3(5x - 4)$

13 ▼▽▽ Multiplica por el número indicado y simplifica.

a) $\frac{1 - 2x}{9} - 1 + \frac{x + 4}{6}$ por 18

b) $\frac{x - 3}{2} - \frac{5x + 1}{3} - \frac{1 - 9x}{6}$ por 6

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

14 ▼▽▽ Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-3}{5} - 2x + 6 - \frac{x-8}{5}$

b) $\frac{3x-2}{6} - \frac{4x+1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{2(x-3)}{4}$

Expresiones de segundo grado

15 ▼▽▽ Opera y simplifica.

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) - 25$

b) $2x(x+3) - 2(3x+5) + x$

c) $(2x+1)^2 - 1 - (x-1)(x+1)$

d) $x(x-3) + (x+4)(x-4) - (2-3x)$

16 ▼▼▽ Multiplica por el mín.c.m. de los denominadores y simplifica.

a) $x + \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} - x^2 + 2$

b) $\frac{x(x-1)}{3} - \frac{x(x+1)}{4} + \frac{3x+4}{12}$

Aplica lo aprendido

17 ▼▼▽ Expresa algebraicamente y simplifica cada expresión obtenida:

a) El área de un cuadrado de lado $x + 3$.

b) La diferencia de áreas de dos cuadrados de lados x y $x + 3$, respectivamente.

c) La superficie de un jardín rectangular de base x y perímetro 70 m.

d) El área de un rombo sabiendo que la longitud de una de sus diagonales es el triple que la longitud de la otra.

18 ▼▼▽ En cada expresión, sustituye x o y por lo que se indica; después, opera y simplifica.

a) $2x - 3y + 1$ — x por $1 + 5y$

b) $\frac{x}{4} + \frac{y-1}{5}$ — x por $1 - 3y$

c) $xy + 2y - 2$ — y por $1 - x$

d) $xy - y^2$ — y por $3 - 2x$

Autoevaluación

¿Sabes operar con polinomios?

1 Dados $A = 3x^3 - 5x^2 + 6$ y $B = x^3 - 2x^2 + x + 1$, calcula:

a) $A + B$ b) $A - B$

2 Opera.

a) $3x \cdot (2x^2 - 5x + 1)$ b) $(2x^2 - 5x + 1) \cdot (x - 1)$

3 Saca factor común en cada uno de estos polinomios:

a) $10x^2 - 15x$ b) $6x^3 + 4x^2 + 2x$

¿Manejas los procedimientos para simplificar distintas expresiones algebraicas?

4 Simplifica estas expresiones:

a) $x^2 - 5 + 2x^2 - 3x + 6$

b) $2x^2 - 3(x-2) + 2(2x^2 + 1) - 3$

5 Opera y simplifica.

a) $(3x-1)(x-1) - x(2x-1) - x^2$ b) $\frac{10x^2 - 15x}{5x}$

6 Simplifica las siguentes expresiones:

a) $\frac{x}{2} - \frac{2x}{5} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{2x-3}{4} - \frac{x-1}{3}$

¿Sabes traducir un enunciado al lenguaje algebraico?

7 Expresa algebraicamente y simplifica.

a) La diferencia de los cuadrados de dos números que suman 7 unidades.

b) Precio final de un producto que costaba x euros después de una subida del 8%.

c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que un cateto mide la mitad del otro.

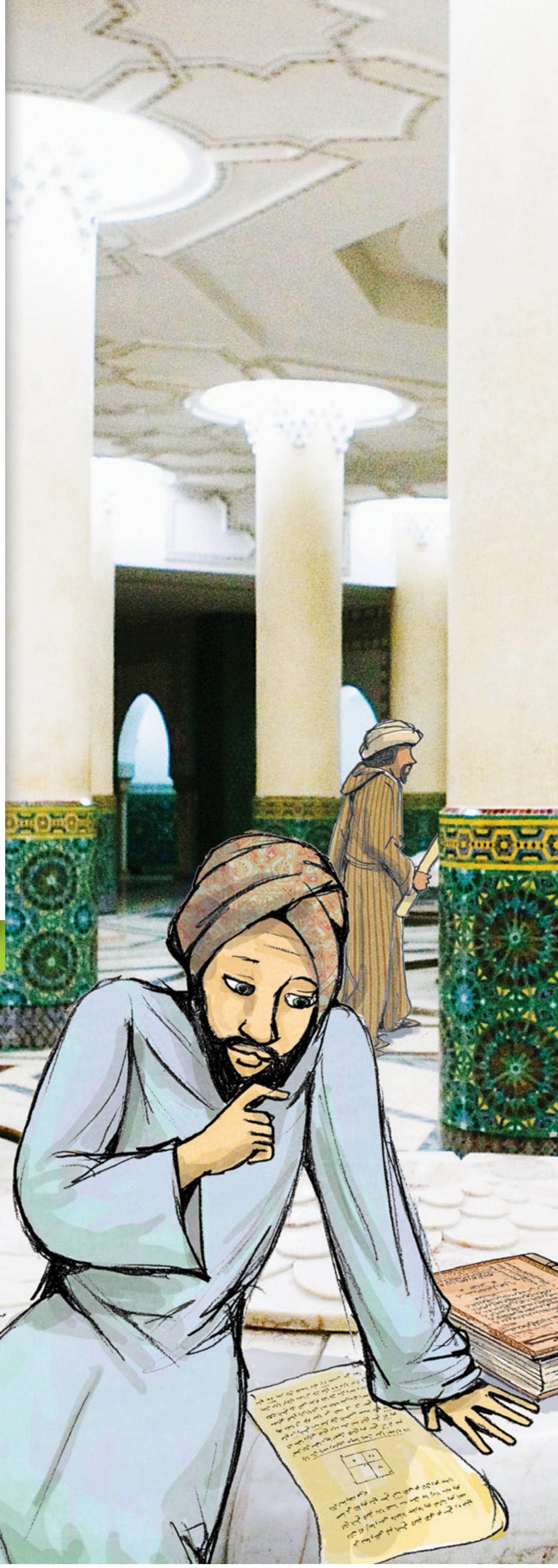
d) Lo que pago por tres bocadillos y cinco refrescos.

6 Ecuaciones e inecuaciones

Diofanto (siglo III) propuso problemas algebraicos complejos y los resolvió por métodos originales y muy interesantes. Pero su aportación careció de método y tuvo poco valor pedagógico.

Al-Jwarizmi (siglo IX) fue quien, por primera vez, realizó un tratamiento sistemático y completo de la resolución de ecuaciones de primero y segundo grados. Su libro *Al-jabr wa-l-muqabala,* elemental, didáctico y exhaustivo, fue muy conocido y estudiado y, posteriormente, traducido a todos los idiomas. El comienzo de su título, *al-jabr,* da nombre a esta ciencia *(álgebra)*.

En el siglo XVI, varios algebristas italianos (Tartaglia, Cardano, Ferrari, Fior) mantuvieron unas interesantísimas, agitadas y fecundas discusiones sobre la resolución de distintos tipos de ecuaciones cúbicas (de tercer grado). Sus diatribas, en muchos casos, se dilucidaban en debates públicos a los que se retaban mediante pasquines. A pesar de que el tono de estos y de aquellas (pasquines y diatribas) distaba mucho de ser correcto, sirvieron para dar un gran impulso a la resolución de ecuaciones de grado superior.




1 Ecuación. Soluciones

Identidades y ecuaciones

Cada una de las siguientes igualdades es una identidad o una ecuación. Di cuáles son las ecuaciones y da una solución de cada una de ellas (encuéntrala *a ojo*).

a) $3(x-5)-2x=x-15$

b) $3(x-5)=6$

c) $2^x \cdot 2^3 = 2^{x+3}$

d) $2^x \cdot 2^3 = 32$

e) $2^x \cdot 2^3 = 2^8$

f) $(x+3)^2 = x^2+6x+9$

g) $(x+3)^2 = 9$

- La igualdad $3x(x+5) = 3x^2 + 15x$ es una **identidad,** porque es cierta para cualquier valor de x.
- La igualdad $3x(x+5) = 0$ es cierta para $x=0$ y para $x=-5$. Pero no se cumple para ningún otro valor de x.

  La igualdad $3x(x+5)=0$ es una *ecuación,* y $x=0$ y $x=-5$ son sus *soluciones.*

Una **ecuación** es una *propuesta de igualdad.* De ella pretendemos averiguar el valor, o los valores, de la incógnita para los cuales es cierta la igualdad. A estos valores se les llama **soluciones** de la ecuación.

Resolver una ecuación es hallar su solución (o soluciones) o llegar a la conclusión de que no tiene.

En esta unidad vamos a repasar los métodos de resolución de ecuaciones que ya conoces y a aprender algunos nuevos.

Hay ecuaciones que se pueden resolver *a ojo.* ¡Estupendo! El único inconveniente es que, acaso, tengan varias soluciones y solo seamos capaces de ver una de ellas.

Y hay otras ecuaciones para las cuales no tenemos ningún procedimiento de resolución. Se puede intentar llegar a una solución *tanteando.*

Ejercicio resuelto

Encontrar, tanteando, alguna solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 5 = 69$

b) $x^x = 3\,125$

c) $x^4 = 1\,000$

(Usa la calculadora)

a) Probamos para $x = 2, 3, 4, \dots$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \;\rightarrow\; 2^3+5=13. \text{ NO ES SOLUCIÓN.} \\ x=3 \;\rightarrow\; 3^3+5=32. \text{ NO ES SOLUCIÓN.} \\ x=4 \;\rightarrow\; 4^3+5=69. \text{ SÍ ES SOLUCIÓN.} \end{array}\right\} \text{Hemos obtenido la solución } x=4.$$

b) Probando con $x = 3, 4, 5$ se llega a que 5 es solución, pues $5^5 = 3\,125$.

c) $$\left.\begin{array}{l} 5^4 = 625 \\ 6^4 = 1\,296 \end{array}\right\} \text{Por tanto, la solución está entre 5 y 6. Probamos con 5,3; 5,4; 5,5; 5,6; 5,7; …}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5{,}6^4 = 983{,}\dots \\ 5{,}7^4 = 1\,055{,}\dots \end{array}\right\} \text{La solución es 5,6… Si quisiéramos afinar más, probaríamos con 5,61; 5,62; 5,63; …}$$

Actividades

1 Las siguientes ecuaciones tienen alguna solución entera. Hállala tanteando:

a) $5^x = 25$

b) $(x-5)^2 = 4$

c) $3^x = 81$

d) $3^{x-1} = 81$

e) $\sqrt{x+3} = 4$

f) $x^x = 256$

2 Las siguientes ecuaciones no tienen solución entera.

Tanteando, obtén la solución de cada una de ellas aproximando hasta las décimas.

a) $x^4 = 5\,000$

b) $4^x = 200$

2 Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado es aquella en la que solo aparecen expresiones algebraicas de grado 1. Después de simplificarlas, llegaremos a una expresión del tipo $ax + b = 0$.

Recordemos los pasos que conviene dar para resolver una ecuación de primer grado que tenga una fisonomía complicada:

Ten en cuenta

A veces, conviene dar estos pasos en otro orden. Con práctica y sentido común, sabrás qué hacer en cada caso.

1.° **Quitar paréntesis,** si los hay.	$\frac{-x-1}{6} - \frac{3(x+5)}{12} = \frac{2(11-x)}{9} - 6$ $\frac{-x-1}{6} - \frac{3x+15}{12} = \frac{22-2x}{9} - 6$
2.° **Quitar denominadores,** si los hay. Para ello, multiplicaremos los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.	mín.c.m. (6, 12, 9) = 36 $\frac{36(-x-1)}{6} - \frac{36(3x+15)}{12} = \frac{36(22-2x)}{9} - 216$ $6(-x-1) - 3(3x+15) = 4(22-2x) - 216$ $-6x - 6 - 9x - 45 = 88 - 8x - 216$
3.° **Pasar los términos** en x a un miembro y los números al otro.	$-6x - 9x + 8x = 88 - 216 + 6 + 45$
4.° **Simplificar** en cada miembro.	$-7x = -77$
5.° **Despejar la** x.	$x = \frac{-77}{-7} = 11$
6.° **Comprobar la solución,** sustituyendo en cada miembro y viendo que coinciden los resultados.	$\frac{-11-1}{6} - \frac{3(11+5)}{12} = \frac{-12}{6} - \frac{48}{12} = -2 - 4 = -6$ $\frac{2(11-11)}{9} - 6 = 0 - 6 = -6$

Actividades

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x + 5) = x + 1$

b) $3(x - 1) + 5(x - 2) = 7x$

c) $2(2x - 3) + 1 = x - 5$

d) $3(5x - 7) + 2(x - 1) = 5x - 3$

e) $5x + 3(1 - x) = 12 + 2(x - 5)$

f) $4(2 + 3x) = 10(x - 1) + 2(x + 9)$

g) $2(x - 3) - 5x + 7 = 13 - 11x$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x - 2) + 5(x - 1) = 2x - 2(x + 3) + 11$

b) $3x - 1 - (2x + 1) = 1 - (x + 2) - 3$

c) $\frac{3(x+2)}{2} + \frac{x-1}{5} = \frac{2(x+1)}{5} + \frac{37}{10}$

d) $\frac{2x-3}{2} - \frac{x+3}{4} = -4 - \frac{x-1}{2}$

e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4}$

f) $x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} = \frac{12x+4}{9}$

Problemas resueltos

1. La suma de un número más su tercera parte es 48. ¿De qué número se trata?

1. Elegimos la incógnita: x es el número buscado.

La tercera parte del número es $\frac{x}{3}$.

Planteamos la ecuación y la resolvemos:

$$x + \frac{x}{3} = 48 \rightarrow 3x + x = 3 \cdot 48 \rightarrow x = 36$$

Solución: El número buscado es 36.

2. Ana tiene 8 años más que Raquel y entre las dos suman 40 años. ¿Qué edad tiene cada una?

2. Edad de Raquel, x; edad de Ana, $x + 8$

La ecuación sería:

$$x + (x + 8) = 40 \rightarrow 2x = 40 - 8 \rightarrow x = 16$$

Solución: Raquel tiene 16 años y Ana tiene 24.

3. Rodrigo tiene 54 000 €. Invierte una parte en un negocio y el resto en un banco. En el negocio gana el 12%; y en el banco, el 3%. Al final ha ganado 4 320 €. ¿Cuánto invirtió en cada sitio?

3. Invierte en el negocio x; invierte en el banco $54\,000 - x$

Gana en el negocio el 12% de $x \rightarrow 0{,}12x$

Gana en el banco el 3% de $(54\,000 - x) \rightarrow 0{,}03 \cdot (54\,000 - x)$

$$0{,}12x + 0{,}03(54\,000 - x) = 4\,320$$

$$0{,}12x - 0{,}03x + 0{,}03 \cdot 54\,000 = 4\,320$$

$$0{,}09x = 2\,700 \rightarrow x = 2\,700 : 0{,}09 = 30\,000$$

Solución: Invierte 30 000 € en el negocio y 24 000 € en el banco.

4. La suma de tres números consecutivos es 87. ¿Cuáles son los números?

4. El primer número es x. Los siguientes, $x + 1$ y $x + 2$.

Planteamos la ecuación:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 87 \rightarrow 3x + 3 = 87 \rightarrow x = 28$$

Solución: Los números son 28, 29 y 30.

Actividades

3 Si al doble de un número le sumamos la cuarta parte de dicho número, el resultado es 189.

¿Cuál es el número?

4 Eloísa tiene 25 años menos que su madre. Entre las dos tienen medio siglo.

¿Qué edad tiene cada una?

5 Hace dos años compré una bicicleta y un equipo de música por 260 €. Los acabo de vender por un total de 162 €, habiendo perdido el 30% con la bicicleta y el 40% con el equipo de música. ¿Cuánto me costó cada cosa?

6 La suma de tres números consecutivos es cuatro veces el menor de ellos. ¿Qué números son?

3 Ecuaciones de segundo grado

Cálculo mental

Resuelve sin utilizar la fórmula y, si es posible, a ojo:

a) $x^2 = 9$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $5x^2 - 20 = 0$

d) $3x^2 - 300 = 0$

e) $(x-5)^2 = 25$

f) $(x-5)^2 = 4$

g) $3(x-2)^2 = 3$

h) $3(x-2)^2 - 3 = 0$

i) $7(x-4)^2 = 63$

j) $7(x-4)^2 - 63 = 0$

Las ecuaciones de segundo grado son de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

Ecuaciones completas

Cuando $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es completa y se resuelve aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } b^2 - 4ac > 0, \text{ hay dos soluciones.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac = 0, \text{ hay una solución.} \\ \text{Si } b^2 - 4ac < 0, \text{ no hay ninguna solución.} \end{cases}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$ es completa. En ella, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$. La resolvemos aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{Tiene dos soluciones.}$$

Ecuaciones incompletas

Si $b = 0$ o $c = 0$, la ecuación se llama incompleta y se puede resolver con mucha sencillez, sin necesidad de aplicar la fórmula anterior:

- **Si $b = 0$** $\rightarrow$ Despejamos directamente x^2. Por ejemplo:

  $3x^2 - 48 = 0 \rightarrow 3x^2 = 48 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

- **Si $c = 0$** $\rightarrow$ Factorizamos sacando factor común. Por ejemplo:

  $$2x^2 - x = 0 \rightarrow x(2x-1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1/2 \end{cases}$$

Ten en cuenta

Las ecuaciones incompletas también se pueden resolver por la fórmula anterior, pero es mucho más cómodo resolverlas mediante el procedimiento adjunto.

Ejercicio resuelto

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ **b) $5x^2 - 7x + 3 = 0$** **c) $5x^2 + 45 = 0$**

a) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = \frac{-6}{18} = \frac{-1}{3}$. Solución única.

b) $x = \frac{7 \pm \sqrt{49-60}}{10} = \frac{7 \pm \sqrt{-11}}{10}$. Sin solución.

c) $5x^2 + 45 = 0 \rightarrow 5x^2 = -45 \rightarrow x^2 = -9 \rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$. Sin solución.

Actividades

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $10x^2 - 3x - 1 = 0$ b) $x^2 - 20x + 100 = 0$

c) $3x^2 + 5x + 11 = 0$ d) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2x^2 - 50 = 0$ b) $3x^2 + 5 = 0$

c) $7x^2 + 5x = 0$ d) $2x^2 + 10x = 0$

Ejercicios resueltos

1. El producto de dos números naturales consecutivos es 210. ¿Qué números son?

1. Llamamos x y $x + 1$ a los dos números.

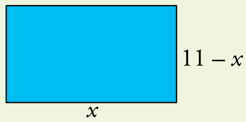
Ecuación: $x(x + 1) = 210 \rightarrow x^2 + x - 210 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 840}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{-1 \pm 29}{2} \begin{cases} x_1 = -15 \\ x_2 = 14 \end{cases}$$

Como los dos números son naturales, solo nos vale la solución positiva. Los números buscados son 14 y 14 + 1 = 15. (Efectivamente, $14 \cdot 15 = 210$).

2. La superficie de un rectángulo es 28 cm², y su perímetro, 22 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

2. Si el perímetro mide 22 cm, la suma de los dos lados desiguales es 11 cm.



Llamamos x a la longitud de un lado y $11 - x$ a la del otro.

El área de un rectángulo es el producto de sus lados:

$$x(11 - x) = 28 \rightarrow 11x - x^2 = 28 \rightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \rightarrow$$

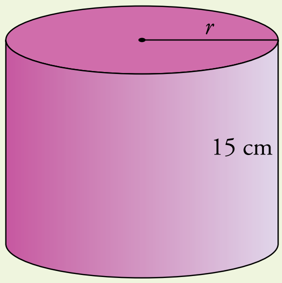
$$\rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 28}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Si $x = 7$, entonces $11 - x = 4$. Los dos lados miden 7 cm y 4 cm.

Si $x = 4$, entonces $11 - x = 7$. Se llega a la misma solución.

3. El área total de un cilindro de 15 cm de altura es 500π cm². Hallar el radio de su base.

3.



Recordemos que $A_{\text{TOTAL}} = 2A_{\text{BASE}} + A_{\text{LATERAL}}$

$A_{\text{BASE}} = \pi r^2$

$A_{\text{LATERAL}} = 2\pi r \cdot \text{h} = 2\pi r \cdot 15 = 30\pi r$

El área total, según nos dicen, es 500π cm². Con todos estos resultados, construimos la ecuación $2 \cdot \pi r^2 + 30\pi r = 500\pi$. Dividiendo todo por 2π:

$$r^2 + 15r - 250 = 0 \rightarrow r = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 4 \cdot 250}}{2} = \frac{-15 \pm 35}{2} \begin{cases} r_1 = -25 \\ r_2 = 10 \end{cases}$$

La única solución válida es 10. Es decir, el radio es de 10 cm.

Actividades

3 El producto de dos números naturales consecutivos es 90. ¿Qué números son?

4 La superficie de un rectángulo es 150 cm², y su perímetro, 50 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?

5 El producto de dos números es 10, y su suma, 6,5. ¿Qué números son?

6 El área total de un cilindro de 22 m de altura es 1 110π m². Halla su radio.

4 Otros tipos de ecuaciones

Hay ecuaciones que no son de primer ni de segundo grado, pero que podrás resolver aplicando lo que ya sabes. Veamos algunos ejemplos.

Ecuaciones con la x en el denominador

Resolvamos la ecuación $\dfrac{200}{x} + 5 = \dfrac{200}{x-2}$:

- Para suprimir los denominadores, multiplicamos todo por $x \cdot (x-2)$:

$$200(x-2) + 5x(x-2) = 200x \to 200x - 400 + 5x^2 - 10x = 200x \to$$

$$\to 5x^2 - 10x - 400 = 0 \to x^2 - 2x - 80 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{2 \pm \sqrt{4+320}}{2} \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -8 \end{cases}$$

- Comprobamos en la ecuación inicial y vemos que ambas soluciones son válidas.

Por tanto, la ecuación inicial tiene dos soluciones: $x = -8$ y $x = 10$.

No lo olvides

Si en una ecuación aparecen denominadores algebraicos, se suprimen multiplicando los dos miembros por ellos.

Las soluciones obtenidas hay que comprobarlas en la ecuación inicial.

Problemas resueltos

1. Un vendedor callejero lleva un cierto número de relojes, por los que piensa sacar 200 €. Pero comprueba que dos de ellos están deteriorados. Aumentando el precio de los restantes en 5 €, consigue recaudar la misma cantidad. ¿Cuántos relojes llevaba?

1. Llevaba x relojes. El precio de cada uno iba a ser $\dfrac{200}{x}$.

Le quedan $x-2$ relojes. Los vende a $\dfrac{200}{x-2}$. Este precio es 5 € superior al anterior:

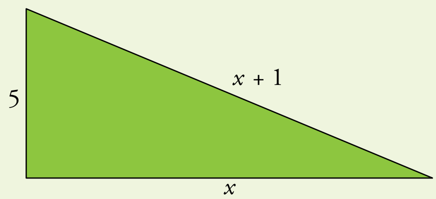
$\dfrac{200}{x-2} = \dfrac{200}{x} + 5$ Esta ecuación es la misma que hemos resuelto arriba.

La ecuación tiene dos soluciones: –8 y 10. Solo la positiva es válida, teniendo en cuenta el contexto del problema.

Solución: Llevaba 10 relojes.

2. El lado menor de un triángulo rectángulo mide 5 cm. Calcular el otro cateto sabiendo que la hipotenusa mide 1 cm más que él.

2.



$$x^2 + 25 = (x+1)^2 \to$$

$$\to x^2 + 25 = x^2 + 2x + 1 \to$$

$$\to 2x = 25 - 1 \to x = 12$$

Solución: El otro cateto mide 12 cm.

Actividades

1 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{10}{x+3} + 5 = 4x - 1$

b) $\dfrac{2\,000}{x} + 25 = \dfrac{2\,000}{x-4}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{4}$

2 Un grupo de amigos alquilan un autocar por 2 000 € para una excursión. Fallan 4 de ellos, por lo que los restantes deben pagar 25 € más cada uno. ¿Cuántos había al principio?

3 En un triángulo rectángulo, un cateto mide 8 cm. Calcula la longitud del otro cateto sabiendo que la hipotenusa mide 2 cm más que él.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Ecuaciones: soluciones por tanteo

1 ▼▽▽ Busca por tanteo una solución exacta.

a) $2^{x+3} = 32$ b) $\sqrt{2x+1} = 9$

c) $x^{x+1} = 8$ d) $(x-1)^3 = 27$

2 ▼▽▽ Busca por tanteo sus soluciones enteras.

a) $(x+1)^2 = 4$ b) $(x+1)(x-3) = 0$

c) $x^2 = 2x$ d) $3(x-2)^2 = 3$

Ecuaciones de primer grado

3 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1-2x}{9} = 1 - \dfrac{x+4}{6}$

b) $\dfrac{3x+2}{5} - \dfrac{4x-1}{10} + \dfrac{5x-2}{8} = \dfrac{x+1}{4}$

c) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{5x+1}{3} = \dfrac{1-9x}{6}$

4 ▼▼▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{1+12x}{4} + \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

b) $\dfrac{3x-2}{6} - \dfrac{4x+1}{10} = -\dfrac{2}{15} - \dfrac{2(x-3)}{4}$

c) $\dfrac{2x-3}{6} - \dfrac{3(x-1)}{4} - \dfrac{2(3-x)}{6} + \dfrac{5}{8} = 0$

Ecuaciones de segundo grado

5 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

c) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ d) $x^2 + x + 2 = 0$

6 ▼▽▽ Resuelve:

a) $4x^2 - 64 = 0$ b) $3x^2 - 9x = 0$

c) $2x^2 + 5x = 0$ d) $2x^2 - 8 = 0$

7 ▼▽▽ Resuelve:

a) $(x-3)(x+3) + (x-4)(x+4) = 25$

b) $(x+1)(x-3) + (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 1$

c) $x(x-3) + (x+4)(x-4) = 2 - 3x$

d) $3x(x+4) - x(x-1) = 13x + 8$

8 ▼▽▽ Estas ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general:

a) $(3x+1)(3x-1) + \dfrac{(x-2)^2}{2} = 1 - 2x$

b) $\dfrac{x^2+2}{3} - \dfrac{x^2+1}{4} = \dfrac{x+5}{12}$

c) $\dfrac{(2x-1)(2x+1)}{3} = \dfrac{3x-2}{6} + \dfrac{x^2}{3}$

Otros tipos de ecuaciones

9 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Resolver la ecuación $(x-2)(x^2-4x+3) = 0$.

Para que un producto de factores valga cero, basta con que valga cero uno de los factores. Por tanto, las soluciones de la ecuación son los valores de x que anulan cada uno de los factores.

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Solución: 1, 2, 3

10 ▼▽▽ Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(2x-5)(x+7) = 0$ b) $(x-2)(4x+6) = 0$

c) $(x+2)(x^2+4) = 0$ d) $(3x+1)(x^2+x-2) = 0$

11 ▼▼▽ Di cuáles son las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(x-2)(x+3)(2x-5) = 0$

b) $x^2(x-6)(3x-1) = 0$

c) $(2-x)(x-7)(x^2-9) = 0$

d) $x(x^2+1)(6x-3) = 0$

12 ▼▼▼ Resuelve estas ecuaciones:

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x} = \dfrac{3x}{2}$ b) $\dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{2x-4}{x+4}$

Aplica lo aprendido

13 ▼▽▽ Calcula la edad de Alberto sabiendo que dentro de 22 años tendrá el triple de su edad actual.

14 ▼▽▽ El área de un rectángulo son 60 cm^2 y su base mide 5/3 de su altura. Halla sus dimensiones.

15 ▼▼▽ Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €, y los vende, después de algún tiempo, por 2 157,5 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?

Resuelve problemas

16 ▼▼▽ **Problema resuelto**

Un grupo de chicos sale a cenar, y pagan 18 € cada uno. Si hubieran sido dos menos, habrían pagado, por la misma cuenta, 6 € más cada uno. ¿Cuántos han ido a cenar? ¿Cuánto les ha costado en total?

x = "número de chicos que han salido a cenar"

x chicos a 18 € c.u. $\to$ $18x$ es el coste total.

$(x-2)$ chicos tocarían a $18+6=24$ € cada uno; luego $24(x-2)$ es el coste total.

Los dos costes obtenidos han de ser iguales:

$$18x = 24(x-2) \to 18x = 24x - 48 \to$$
$$\to 48 = 6x \to x = 8$$

Salen a cenar 8 chicos por $18 \cdot 8 = 144$ €.

17 ▼▼▽ Un granjero quiere vender una partida de botellas de leche a 0,50 € la botella. Se le rompen 60 botellas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,05 € el precio de cada botella. ¿Cuántas botellas tenía? ¿Cuánto dinero pretende ganar?

18 ▼▼▽ En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide los 3/5 de la hipotenusa, y el otro cateto mide 5 cm menos que esta. Halla su perímetro.

19 ▼▼▽ Un tipo de aceite de 3,2 €/*l* se obtiene mezclando un 60% de aceite virgen de 4 €/*l* y el resto con otro más barato. ¿Cuál es el precio de ese otro?

20 ▼▼▼ Un profesor de lengua calcula la nota final de sus alumnos mediante un examen escrito, que es el 75% de la nota final, y otro de lectura, que es el 25%. Ana obtiene en el de lectura un 6. ¿Qué tiene que sacar en el escrito para obtener como nota final al menos un notable (a partir de 7)?

Problemas "+"

21 ▼▼▼ Una persona tarda 4 horas más que otra en hacer un trabajo. Si lo hacen entre las dos, tardan una hora y media en acabarlo. ¿Cuánto tarda cada una por separado?

Autoevaluación

¿Dominas la resolución de ecuaciones de primer grado?

1 Resuelve.

a) $3(2x-5)+2x = 6-(3x-1)$

b) $\dfrac{2(x+2)}{3} - 4(x-4) = \dfrac{3x-4}{2}$

¿Sabes resolver ecuaciones de segundo grado incompletas?

2 Encuentra las soluciones de la siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - 2x = 0$ b) $3x^2 - 12 = 0$

¿Sabes resolver ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general?

3 Resuelve.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$ b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

¿Identificas otros tipos de ecuaciones y las resuelves?

4 Resuelve.

a) $(x+3)(2x-5)=0$

b) $\dfrac{3}{2x} - \dfrac{3}{4x} = \dfrac{x+1}{8}$

¿Has adquirido destreza en el planteamiento y la resolución de problemas con ecuaciones?

5 Se sabe que Jorge tiene 5 años menos que su hermana Berta, y que entre los dos suman 35 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

6 La superficie de un rectángulo es de 36 cm^2, y su perímetro es de 26 cm. Averigua cuánto miden sus lados.

7 Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones se plantearon y resolvieron de forma simultánea a las ecuaciones, ya que el paso de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a una ecuación con una incógnita no supone ningún problema especial.

Diofanto, original e ingenioso, resolvía los problemas que podrían dar lugar a un sistema de ecuaciones, mediante una única ecuación con una sola incógnita, escogida esta hábilmente para conseguir su propósito.

Históricamente, los sistemas de ecuaciones lineales no han sido un reto especialmente difícil. Ya en el siglo II a.C., los chinos resolvían sistemas lineales de varias ecuaciones con el mismo número de incógnitas, mediante un método elegante y potente, similar al que se usa en la actualidad.

1 Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Ten en cuenta

Para nombrar las incógnitas, no es necesario usar las letras x e y; podemos utilizar otras.

Una ecuación lineal con dos incógnitas se puede escribir de la forma:

$$ax + by = c, \text{ donde } a, b \text{ y } c \text{ son números reales.}$$

Solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es todo par de valores que hacen cierta la igualdad.

Por ejemplo, $x + 2y = 4$ es una ecuación lineal con dos incógnitas. El par de valores $x = 2$, $y = 1$ es una solución, pues verifica la igualdad:

$$x = 2,\ y = 1 \rightarrow x + 2y = 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$$

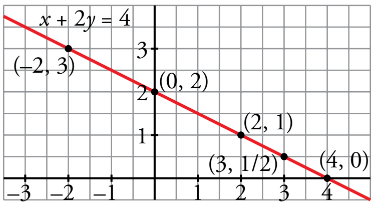
También podemos escribir esta solución como (2, 1).

Pero esta ecuación tiene muchas otras soluciones; por ejemplo:

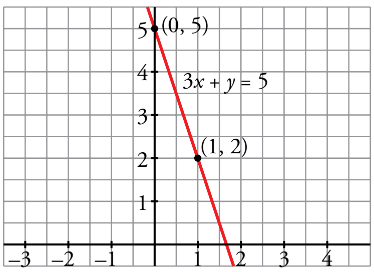
$(0, 2), (4, 0), \left(3, \frac{1}{2}\right), (–2, 3), \ldots$ De hecho, tiene infinitas soluciones.

Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Representación gráfica



Si interpretamos las soluciones de una **ecuación lineal con dos incógnitas** como puntos del plano y los representamos, obtenemos **una recta.** Por ejemplo, si consideramos la ecuación $x + 2y = 4$ y representamos las soluciones que habíamos obtenido, vemos que todas están en la misma recta. Además, cualquier otro punto de esa recta es solución de la ecuación.



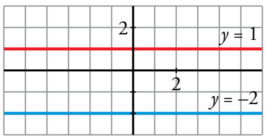
Recuerda que para representar una recta, basta con conocer dos de sus puntos. Para obtenerlos fácilmente, a veces resulta conveniente despejar una de las incógnitas y dar valores a la otra. Por ejemplo:

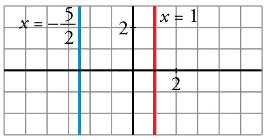
$$3x + y = 5 \rightarrow y = 5 - 3x$$

x	0	1
y	5	2

La recta pasa por (0, 5) y por (1, 2). Su gráfica es la que ves al margen.

Las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{y = k}$ se representan mediante rectas horizontales, y las de la forma $\boldsymbol{x = k}$, mediante rectas verticales:





Actividades

1 Obtén dos soluciones de cada ecuación y representa las rectas correspondientes:

a) $2x + y = 3$ b) $x + y = 4$

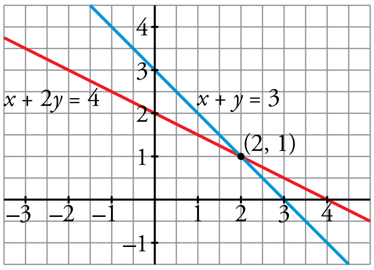
2 Representa gráficamente:

a) $y = 3$ b) $y = -\frac{1}{2}$ c) $x = -2$ d) $x = \frac{3}{2}$

2 Sistemas de ecuaciones lineales

Varias ecuaciones forman un **sistema** cuando pretendemos encontrar las soluciones comunes a todas ellas.

Vamos a centrarnos en los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Como hemos visto en la página anterior, podemos representar cada una de las ecuaciones mediante una recta.



Gráficamente, la **solución** de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es el punto de corte de las rectas que lo forman.

Por ejemplo, consideremos el sistema:

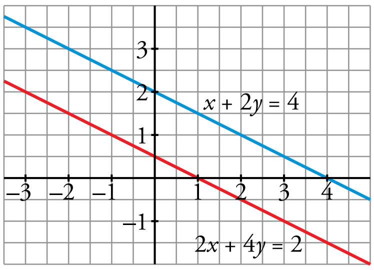
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Representando las dos rectas en los mismos ejes, vemos que se cortan en el punto (2, 1).

La solución del sistema es: $x = 2$, $y = 1$

Número de soluciones de un sistema

En general, un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene una solución (el punto de corte de las dos rectas), pero, a veces, no ocurre así. Veamos qué otros casos pueden darse:



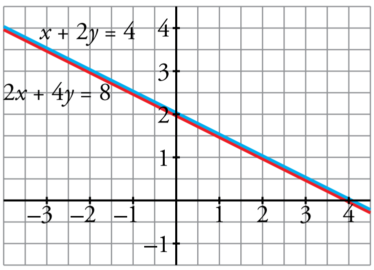
- **Sistemas incompatibles (sin solución)**

  Intentemos resolver el siguiente sistema:

  $$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

  Representando las dos rectas, vemos que no se cortan en ningún punto; son paralelas.

  El sistema no tiene solución. (Las ecuaciones son contradictorias: si $x + 2y = 4$, entonces $2x + 4y$ tendría que ser igual a 8, no a 2).



- **Sistemas indeterminados (con infinitas soluciones)**

  Consideremos ahora el siguiente sistema:

  $$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$$

  Observa que las dos ecuaciones dicen lo mismo (la segunda es el doble de la primera).

  Se trata de la misma recta. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones (cualquier punto de la recta es solución del sistema).

Actividades

1 Representa las rectas en cada caso y di si el sistema tiene una solución, si es indeterminado (tiene infinitas) o si es incompatible (no tiene solución). En el caso de que tenga una solución, di cuál es:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

3 Resolución de sistemas de ecuaciones

Al representar un sistema de ecuaciones lineales, no siempre es fácil ver cuál es la solución (en especial, cuando no son valores enteros).

Vamos a recordar los tres métodos que conocemos para resolver un sistema de ecuaciones lineales de forma algebraica.

Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones y se sustituye en la otra. Se obtiene así una ecuación con una incógnita. La resolvemos y, después, hallamos el valor de la otra incógnita.

Ten en cuenta

El método se **sustitución** es especialmente útil cuando una de las incógnitas tiene coeficiente 1 o –1 en alguna de las ecuaciones.

Ejercicio resuelto

Resolver por el método de sustitución este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 15} \end{cases}$

1.° Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones. En este caso, la más fácil de despejar es la x de la segunda ecuación:

$$x = 15 - 2y$$

2.° Sustituimos este valor de x en la otra ecuación:

$$3(15 - 2y) - 5y = 1$$

3.° Resolvemos la ecuación que hemos obtenido, que tiene una sola incógnita:

$$45 - 6y - 5y = 1 \rightarrow -11y = -44 \rightarrow y = -44/-11 \rightarrow \mathbf{y = 4}$$

4.° Sustituimos este valor de y en la ecuación en la que aparecía la x despejada (paso 1.°):

$$x = 15 - 2y = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7 \rightarrow \mathbf{x = 7}$$

5.° La solución del sistema es: $x = 7$, $y = 4$

6.° Comprobamos que la solución es correcta, sustituyendo en el sistema inicial los valores obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 1 \rightarrow 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 = 21 - 20 = 1 \\ x + 2y = 15 \rightarrow 7 + 2 \cdot 4 = 7 + 8 = 15 \end{array}\right\} \text{La solución es válida.}$$

Actividades

1 Resuelve gráficamente el sistema del ejercicio resuelto anterior:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

Comprueba que las dos rectas se cortan en el punto (7, 4), solución que hemos obtenido.

2 Resuelve, por el método de sustitución, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 4y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y + 2 = 5 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

Método de igualación

El segundo de los métodos que estamos recordando, el método de igualación, consiste básicamente en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los resultados.

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan los dos resultados, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita. Se halla el valor de esta incógnita resolviendo la ecuación obtenida. Para hallar el valor de la otra incógnita, se sustituye en cualquiera de las expresiones en las que estaba despejada.

Ten en cuenta

El método de **igualación** se suele utilizar cuando ya aparece despejada una misma incógnita en ambas ecuaciones. En tal caso, es como si aplicáramos el método de sustitución.

Ejercicio resuelto

Resolver por el método de igualación este sistema: $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 15} \end{cases}$

1.° Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones. En este caso, la más fácil de despejar es la x:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \;\rightarrow\; 3x = 1 + 5y \;\rightarrow\; x = \dfrac{1 + 5y}{3} \\ x + 2y = 15 \;\rightarrow\; x = 15 - 2y \end{cases}$$

2.° Igualamos los resultados:

$$\frac{1 + 5y}{3} = 15 - 2y$$

3.° Resolvemos la ecuación obtenida, que solo tiene una incógnita:

$$1 + 5y = 3(15 - 2y) \;\rightarrow\; 1 + 5y = 45 - 6y \;\rightarrow\; 11y = 44 \;\rightarrow\; \mathbf{y = 4}$$

4.° Para hallar el valor de la otra incógnita, sustituimos el valor de y en una de las expresiones del primer paso, en las que la x aparece despejada:

$$x = 15 - 2y = 15 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7 \;\rightarrow\; \mathbf{x = 7}$$

5.° La solución del sistema es: $x = 7$, $y = 4$

6.° Comprobamos que la solución es correcta, sustituyendo en el sistema inicial los valores obtenidos (igual que hicimos en la página anterior, con el método de sustitución).

Actividades

3 Resuelve, por el método de igualación, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 5y = 4 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = \dfrac{3x + 1}{2} \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 2x + 6y = 3 \end{cases}$

Método de reducción

Se preparan las dos ecuaciones (multiplicando por los números que convenga) para que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en ambas pero con distinto signo. Al sumarlas, desaparece esa incógnita y podemos obtener fácilmente el valor de la otra. El valor hallado se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve. Obtenemos, así, la solución.

Ten en cuenta

El método de **reducción** es muy cómodo de aplicar cuando una incógnita tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones, o bien sus coeficientes son uno múltiplo del otro.

Ejercicios resueltos

1. Resolver por el método de reducción: $\begin{cases} \mathbf{3x - 5y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 15} \end{cases}$

1.° Multiplicamos la segunda ecuación por –3 y sumamos:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{2em}} \\ \xrightarrow{\cdot(-3)} \end{array} \begin{array}{r} 3x - 5y = 1 \\ -3x - 6y = -45 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad -11y = -44 \to \mathbf{y = 4}$$

2.° Sustituimos este valor de y en una de las ecuaciones iniciales para obtener el valor de x. En este caso, es más fácil en la segunda ecuación:

$$x + 2y = 15 \to x + 8 = 15 \to \mathbf{x = 7}$$

3.° La solución del sistema es: $x = 7$, $y = 4$

2. Resolver $\begin{cases} \mathbf{8x + 11y = -18} \\ \mathbf{12x + 7y = -8} \end{cases}$**, aplicando dos veces el método de reducción.**

- Obtenemos el valor de x:

$$\begin{cases} 8x + 11y = -18 \\ 12x + 7y = -8 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-7)} \\ \xrightarrow{\cdot 11} \end{array} \begin{array}{r} -56x - 77y = 126 \\ 132x + 77y = -88 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad 76x = 38 \to \mathbf{x = \frac{38}{76} = \frac{1}{2}}$$

- Obtenemos el valor de y:

$$\begin{cases} 8x + 11y = -18 \\ 12x + 7y = -8 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(3)} \\ \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{array} \begin{array}{r} 24x + 33y = -54 \\ -24x - 14y = 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Sumando:} \quad 19y = -38 \to \mathbf{y = \frac{-38}{19} = -2}$$

- La solución es: $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$

Actividades

4 Resuelve, por el método de reducción, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 7x + 2y = 25 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases}$

4 Sistemas no lineales

Ten en cuenta

Los sistemas de ecuaciones no lineales se resuelven de forma esencialmente igual a los sistemas lineales.

Son aquellos en los que una de las dos ecuaciones, o ambas, son no lineales, es decir, tienen monomios de segundo grado (x^2, y^2, $x \cdot y$) o de grado superior, o radicales, o alguna incógnita en el denominador…

Para resolverlos, podemos despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en la otra (método de sustitución) o eliminar una incógnita simplificando entre las dos ecuaciones (método de reducción) o cualquier otro método por el que podamos pasar a una ecuación con una incógnita.

Ejercicio resuelto

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

a) Aplicamos el método de sustitución:

$$\begin{cases} y - x = 1 & \to \quad y = 1 + x \\ x^2 + y^2 = 5 & \to \quad x^2 + (1 + x)^2 = 5 \ \to \ x^2 + 1 + x^2 + 2x = 5 \ \to \end{cases}$$

$$\to \ 2x^2 + 2x - 4 = 0 \ \to \ x^2 + x - 2 = 0 \ \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 = 1 \ \to \ y_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_2 = -2 \ \to \ y_2 = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 1, \ y_1 = 2$

$x_2 = -2, \ y_2 = -1$

b) Aplicamos el método de reducción:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

Sumando: $2x^2 = 98 \ \to \ x^2 = 49 \ \to \ x = \pm 7$

Si $x = 7 \ \to \ 49 + y^2 = 58 \ \to \ y^2 = 9 \ \to \ y = \pm 3$

Si $x = -7 \ \to \ 49 + y^2 = 58 \ \to \ y^2 = 9 \ \to \ y = \pm 3$

Hay cuatro soluciones: $x_1 = 7, \ y_1 = 3$

$x_2 = 7, \ y_2 = -3$

$x_3 = -7, \ y_3 = 3$

$x_4 = -7, \ y_4 = -3$

No lo olvides

Si hay raíces o incógnitas en el denominador, al resolver la ecuación puede aparecer alguna solución falsa. Por eso, en tales casos, es necesario comprobar todas las soluciones sobre el sistema inicial.

Actividades

1 Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$

5 Resolución de problemas mediante sistemas

Para resolver problemas mediante ecuaciones o sistemas de ecuaciones, traducimos al lenguaje algebraico los datos que nos dan.

Hay muchos problemas que se pueden resolver mediante ecuaciones con una incógnita, pero resultan más fáciles de plantear si los resolvemos mediante sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Problemas resueltos

1. Elvira ha pagado 14 € por 4 bocadillos de jamón y 5 refrescos, y Lorena ha gastado 8,40 € en 3 bocadillos de jamón y 2 refrescos. ¿Cuánto cuesta un bocadillo de jamón? ¿Y un refresco?

- Tenemos dos incógnitas: $\begin{cases} x = \text{precio de un bocadillo de jamón} \\ y = \text{precio de un refresco} \end{cases}$
- Planteamos un sistema con los datos que nos dan y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Elvira} \to & 4x + 5y = 14 \\ \text{Lorena} \to & 3x + 2y = 8{,}40 \end{array}\right\} \text{ Su solución es: } x = 2;\; y = 1{,}2$$

- *Solución*: Un bocadillo de jamón cuesta 2 €, y un refresco, 1,20 €.

2. Un inversor dispone de 100 000 €. Invierte una parte en un banco que le paga el 4% anual y el resto en unas acciones que le producen un 5% al final del año. En total, gana 4 700 €. ¿Qué cantidad ha destinado a cada operación?

	CAPITAL	PORCENTAJE	INTERESES
BANCO	x	4%	4% de $x = 0{,}04x$
ACCIONES	y	5%	5% de $y = 0{,}05y$
TOTAL	100 000		4 700

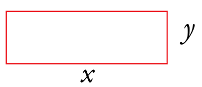
$$\left.\begin{array}{l} x + y = 100\,000 \\ 0{,}04x + 0{,}05y = 4\,700 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x + 4y = 400\,000 \\ 4x + 5y = 470\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Restando 2.ª – 1.ª:} \\ y = 70\,000 \end{array}$$

$$x = 100\,000 - y = 100\,000 - 70\,000 = 30\,000$$

Solución: Invirtió 30 000 € en el banco y 70 000 € en acciones.

Actividades

1 Calcular las dimensiones de un rectángulo de perímetro 132 m y área de 1 040 m^2.



2 Tres kilos de peras y dos de naranjas cuestan 6,70 €; un kilo de peras y cinco de naranjas cuestan 7 €. ¿A cómo está el kilo de peras? ¿Y el de naranjas?

3 Jaime tiene 20 000 €. Coloca una parte al 7%, y el resto, al 3%. Gana 760 € en un año. ¿Cuánto puso en cada sitio?

4 Sofía tiene un capital de 200 000 €. Deposita una parte en un banco, al 4% anual. El resto lo invierte en acciones, con las que pierde el 11%. Al final del año ha ganado 4 250 €. ¿Cuánto destinó a cada inversión?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Sistemas lineales

1 ▼▽▽ Busca dos soluciones para cada una de estas ecuaciones y representa las rectas correspondientes:

a) $3x + y = 5$ b) $2x - y = 4$

2 ▼▽▽ Resuelve gráficamente.

a) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

3 ▼▽▽ Resuelve por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8x - 7y = 15 \\ x + 6y = -5 \end{cases}$

4 ▼▽▽ Resuelve por el método de igualación.

a) $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 6y = -2 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

5 ▼▽▽ Resuelve por el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$

6 ▼▽▽ Resuelve por el método que consideres más adecuado:

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3(x + 2) = y + 7 \\ x + 2(y + 1) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 3 \\ 2(x + y) = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{-x + 7}{2} = y + 4 \\ 2x = \dfrac{3y - 10}{5} \end{cases}$

Sistemas no lineales

7 ▼▼▽ Halla las soluciones de estos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$

Aplica lo aprendido

8 ▼▽▽ La suma de dos números es 14. Añadiendo una unidad al mayor se obtiene el doble del menor. Halla los dos números.

9 ▼▽▽ Encuentra dos números tales que añadiendo tres unidades al primero se obtenga el segundo y, en cambio, añadiendo dos unidades al segundo se obtenga el doble del primero.

10 ▼▽▽ Cuatro barras de pan y seis litros de leche cuestan 6,80 €; tres barras de pan y cuatro litros de leche cuestan 4,70 €. ¿Cuánto vale una barra de pan? ¿Cuánto cuesta un litro de leche?

11 ▼▽▽ Una empresa aceitera ha envasado 3 000 *l* de aceite en 1 200 botellas de 2 *l* y de 5 *l*. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

12 ▼▽▽ Un test consta de 48 preguntas. Por acierto se suman 0,75 puntos y por error se restan 0,25. Mi puntuación fue de 18 puntos. ¿Cuántos aciertos y errores tuve, si contesté a todas las preguntas?

13 ▼▼▽ La diferencia de dos números es 6, y la de sus cuadrados, 144. Halla los números.

14 ▼▼▽ Calcula dos números cuya suma sea 24, y su producto, 135.

Resuelve problemas

15 ▼▼▽ **Ejercicio resuelto**

Angelines compró una camisa y un jersey por 76 €. Ahora, Rosa ha pagado 65,80 € por los mismos artículos, pues la camisa tiene un 15% de rebaja, y el jersey, un 12%. ¿Cuánto costaba cada artículo antes de la rebaja?

	ANTES DE LA REBAJA	CON REBAJA
CAMISA	x	$0{,}85x$
JERSEY	y	$0{,}88y$

$$\begin{cases} x + y = 76 \\ 0{,}85x + 0{,}88y = 65{,}8 \end{cases}$$

Resuelve el sistema y expresa la solución en el contexto del problema.

16 ▼▼▽ Una persona compra un equipo de música y un ordenador por 2 500 €. Después de algún tiempo, los vende por 2 157,50 €. Con el equipo de música perdió el 10% de su valor, y con el ordenador, el 15%. ¿Cuánto le costó cada uno?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

17 ▼▼▽ La edad de un padre es hoy el triple que la del hijo y hace 6 años era cinco veces la edad del hijo. ¿Cuántos años tiene cada uno?

☞

	EDAD ACTUAL	EDAD HACE 6 AÑOS
PADRE	x	$y-6$
HIJO	y	$x-6$

18 ▼▼▽ La edad de un padre es hoy siete veces la edad del hijo y dentro de 10 años será solo el triple. Calcula la edad actual de cada uno.

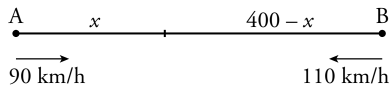
19 ▼▼▽ En una cafetería utilizan dos marcas de café, una de 6 €/kg y otra de 8,50 €/kg. El encargado quiere preparar 20 kg de una mezcla de los dos cuyo precio sea 7 €/kg. ¿Cuánto tiene que poner de cada clase?

☞

	CANTIDAD	PRECIO	COSTE
CAFÉ A	x	6	$6x$
CAFÉ B	y	8,50	$8{,}50y$
MEZCLA	20	7	140

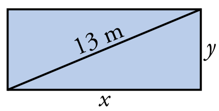
20 ▼▼▽ La distancia entre dos ciudades, A y B, es de 400 km. Un coche sale desde A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Simultáneamente, sale otro coche desde B hacia A a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? ¿A qué distancia de A se producirá el encuentro?

☞



	ESPACIO	VELOCIDAD	TIEMPO
A	x	90 km/h	t
B	$400-x$	110 km/h	t

21 ▼▼▽ Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 34 m, y su diagonal, 13 m.



☞ *Aplica el teorema de Pitágoras.*

22 ▼▼▽ El perímetro de un rectángulo es de 20 cm, y su área, de 21 cm^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Autoevaluación

¿Sabes resolver con soltura sistemas lineales?

1 Resuelve por el método indicado.

a) Sustitución.

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$$

b) Igualación.

$$\begin{cases} 4x+y=9 \\ y=\dfrac{3x+7}{2} \end{cases}$$

c) Reducción.

$$\begin{cases} x-5y=16 \\ 4x+5y=14 \end{cases}$$

¿Reconoces y resuelves un sistema no lineal?

2 Resuelve por el método indicado.

a) Sustitución.

$$\begin{cases} x^2-y=8 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

b) Reducción.

$$\begin{cases} x^2-y^2=34 \\ 2x^2-y^2=-7 \end{cases}$$

¿Has adquirido destreza en el planteamiento y la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones?

3 La suma de dos números es 15. Si a la mitad de uno de ellos le sumamos la tercera parte del otro, obtenemos de resultado 6. Determina de qué números se trata.

4 En una caseta de feria, dos bocadillos y un refresco cuestan 5,35 €; mientras que tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8,60 €. Calcula el precio de un bocadillo y el de un refresco.

5 Alberto le saca 24 años a su hija Rosa, y dentro de 8 años le doblará la edad. ¿Cuántos años tienen padre e hija?

6 La suma de dos números naturales es 18, y la diferencia de sus cuadrados, 72. ¿Cuáles son esos números?

8 Funciones. Características

El concepto de función ha ido evolucionando y perfilándose a lo largo del tiempo. ¿Qué requisitos se le ha ido exigiendo a dicho concepto?

— Una función relaciona dos variables.

— Las funciones describen fenómenos naturales.

— Las relaciones funcionales pueden ser descritas mediante fórmulas (relaciones algebraicas).

— Las funciones pueden ser representadas gráficamente.

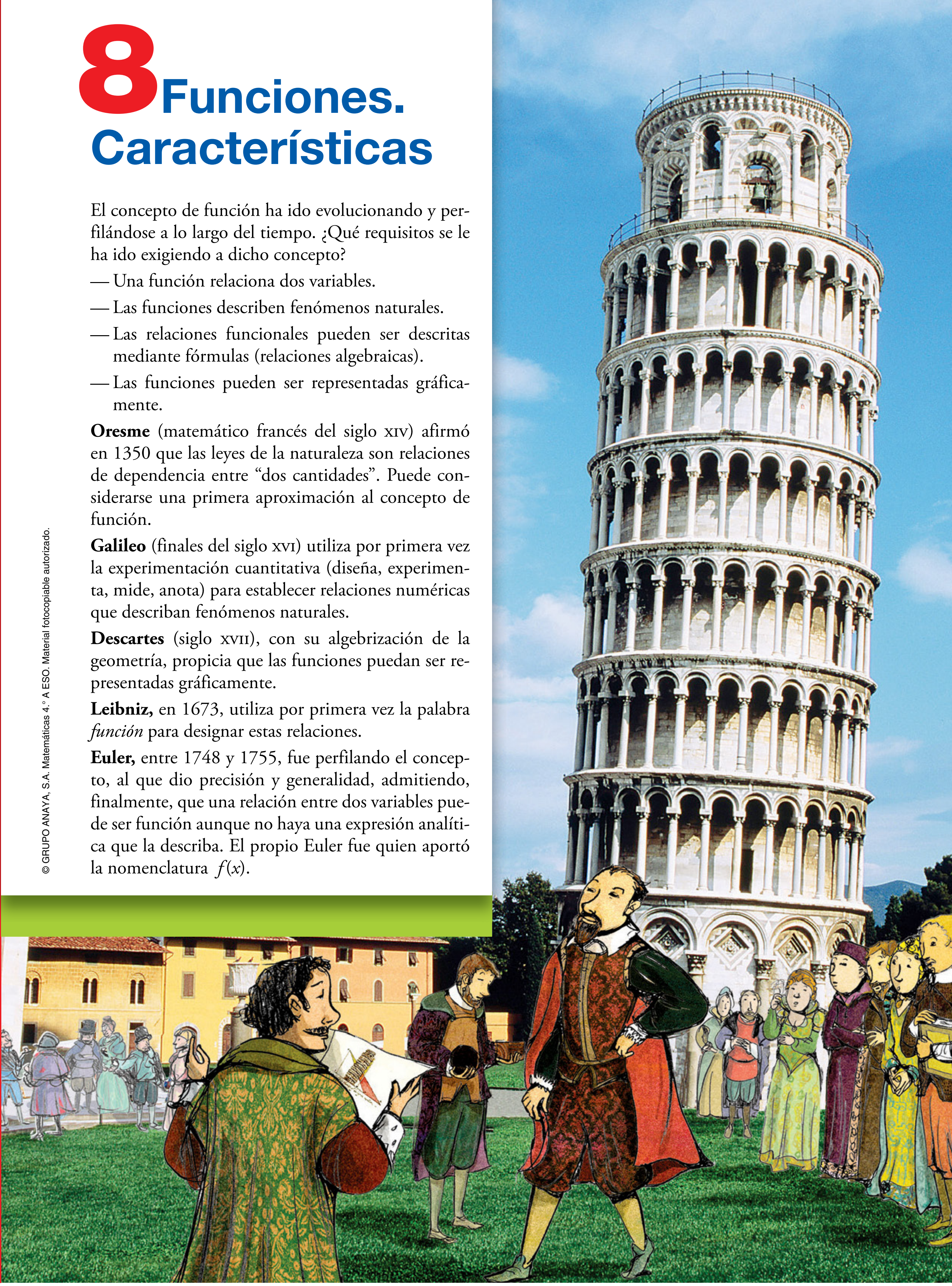
Oresme (matemático francés del siglo XIV) afirmó en 1350 que las leyes de la naturaleza son relaciones de dependencia entre "dos cantidades". Puede considerarse una primera aproximación al concepto de función.

Galileo (finales del siglo XVI) utiliza por primera vez la experimentación cuantitativa (diseña, experimenta, mide, anota) para establecer relaciones numéricas que describan fenómenos naturales.

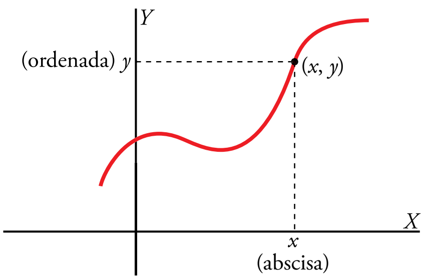
Descartes (siglo XVII), con su algebrización de la geometría, propicia que las funciones puedan ser representadas gráficamente.

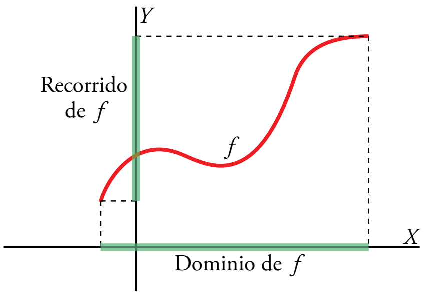
Leibniz, en 1673, utiliza por primera vez la palabra *función* para designar estas relaciones.

Euler, entre 1748 y 1755, fue perfilando el concepto, al que dio precisión y generalidad, admitiendo, finalmente, que una relación entre dos variables puede ser función aunque no haya una expresión analítica que la describa. El propio Euler fue quien aportó la nomenclatura $f(x)$.



1 Conceptos básicos





Una función liga dos variables numéricas a las que, habitualmente, se las llama x e y:

x es la **variable independiente** y es la **variable dependiente**

La función, que se suele denotar por $y = f(x)$, asocia a cada valor de x **un único** valor de y:

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Para visualizar el comportamiento de una función, recurrimos a su representación gráfica: sobre unos ejes cartesianos con sendas escalas, representamos las dos variables:

La x sobre el eje horizontal (eje de **abscisas**).

La y sobre el eje vertical (eje de **ordenadas**).

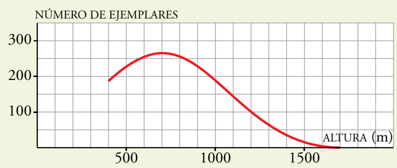
Cada punto de la gráfica tiene dos **coordenadas,** su abscisa, x, y su ordenada, y.

Se llama **dominio de definición** de una función, f, y se designa por $Dom\, f$, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función.

Se llama **recorrido** de f al conjunto de valores que toma la función. Es decir, al conjunto de valores de y para los cuales hay un x tal que $f(x) = y$.

Ejercicio resuelto

En una comarca crece una cierta planta. Analizar la función *n.º medio de ejemplares por hectárea* a distintas *alturas*:



Se ligan dos variables: la *altitud*, a, medida en metros, y el *número medio de ejemplares por ha*, n.

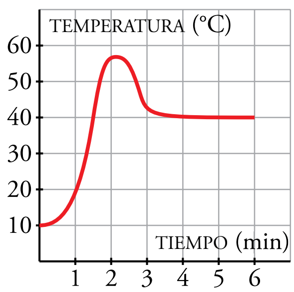
La primera es la variable independiente. La segunda es la variable dependiente.

Para cada valor de a hay un único valor de n. Por tanto, n es una función que depende de a: $n = f(a)$.

El dominio de definición es el intervalo [400, 1 700]. El recorrido es el intervalo [0, 260].

Actividades

1



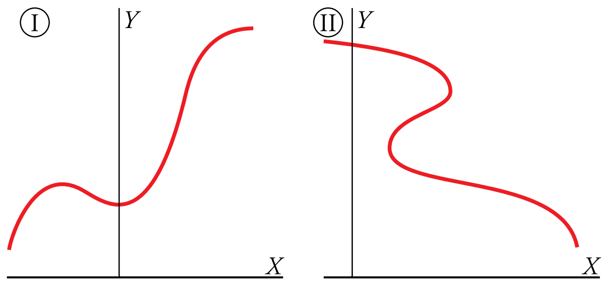
La gráfica describe la temperatura a la que sale el agua de un grifo que está un rato abierto.

a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) Explica por qué es una función.

c) ¿Cuáles son el dominio de definición y el recorrido?

2



Una de estas dos gráficas corresponde a una función, y la otra, no. Identifica cada cual, razonadamente.

2 Cómo se nos presentan las funciones

Tanto para el estudio de las matemáticas como para otras ciencias o en la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con funciones.

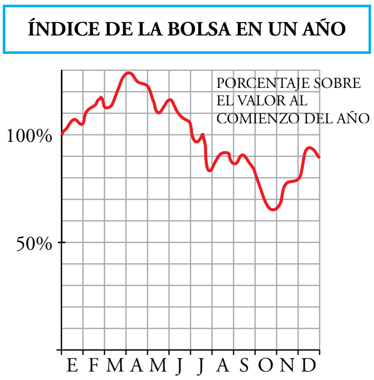
Las funciones nos vienen dadas de muy diversas formas: mediante su *gráfica*, por una *tabla de valores*, por una *fórmula* o mediante una *descripción verbal (enunciado)*.

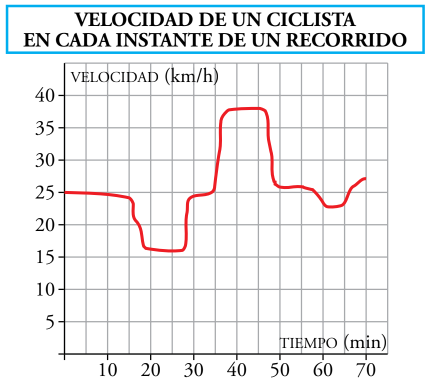
Mediante su expresión gráfica

Las siguientes dos funciones vienen dadas por sus representaciones gráficas:

Observa

La gráfica de una función permite apreciar su comportamiento global con un simple golpe de vista.





Como mejor se puede apreciar el comportamiento global de una función es mediante su **representación gráfica.** Por eso, siempre que pretendamos analizar una función, intentaremos representarla gráficamente, cualquiera que sea la forma en la cual, en principio, nos venga dada.

Mediante un enunciado

Cuando una función viene dada por un enunciado o una descripción (como la que se hace en la siguiente actividad 1 para describir el recorrido de Alberto hasta la escuela), la idea que nos podemos hacer de ella es, casi siempre, cuantitativamente poco precisa.

Actividades

1 Haz una gráfica en la que se vea representado el recorrido de Alberto desde su casa hasta el colegio, en función del tiempo: de casa salió a las 8:30 h y fue seguidito hasta casa de su amigo Íker. Lo esperó un rato sentado en un banco y luego se fueron juntos, muy despacio, hacia el colegio. Cuando ya estaban llegando, se dio cuenta de que se había dejado la cartera en el banco. Volvió corriendo, la recuperó y llegó al colegio a las 9 en punto.

2 Vamos a analizar la gráfica de arriba que describe la velocidad del ciclista:

a) ¿Cuánto tiempo tarda en hacer el recorrido?

b) En los primeros 15 minutos circula en llano. ¿A qué velocidad lo hace? ¿Qué distancia recorre?

c) Entre el minuto 18 y el 27 va cuesta arriba. Di a qué velocidad.

d) Señala un intervalo de 5 minutos en el que marcha cuesta abajo. ¿A qué velocidad lo hace?

Mediante una tabla de valores

Con frecuencia se nos dan los valores de una función mediante una tabla en la cual se obtienen directamente los datos buscados. Sin embargo, en otros casos, como en la tabla siguiente, hay que efectuar complejos cálculos para obtener lo que se busca.

Esta tabla de valores permite calcular lo que cada persona debe pagar a Hacienda un cierto año (cuota íntegra) en función de lo que gana (base liquidable).

BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	CUOTA ÍNTEGRA EUROS	RESTO BASE LIQUIDABLE HASTA EUROS	TIPO APLICABLE %
0	0	4 000	15
4 000	600	10 000	25
14 000	3 000	12 000	28
26 000	6 360	20 000	37
46 000	13 760	en adelante	45

Ejemplo

Alguien que gane 32 500 €:

- Se sitúa en la 4.ª fila.
- Por los primeros 26 000 € paga 6 360 €, y por el resto, el 37%:

  32 500 – 26 000 = 6 500 €

  37% de 6 500 = 6 500 × 0,37 = = 2 405 €

Por tanto, paga 6 500 + 2 405.

Es decir, si gana 32 500 €, ha de pagar 8 905 €.

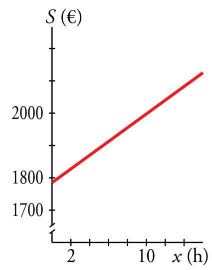
Mediante su expresión analítica o fórmula

La **expresión analítica** es la forma más precisa y operativa de dar una función. Pero requiere un minucioso estudio posterior.

Veamos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1

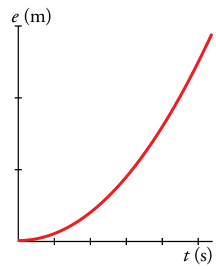
El sueldo, S, de un cierto empleado viene dado en función de las horas extraordinarias trabajadas, x; y se calcula, descontando un 15% de impuestos, mediante la fórmula $S = (2\,100 + 25x) \cdot 0{,}85$.



EJEMPLO 2

Una bola que se deja caer por un plano levemente inclinado lleva una aceleración de 0,2 m/s^2.

La distancia, e, en metros, que recorre en función del tiempo, t, en segundos, viene dada por la fórmula $e = 0{,}1t^2$.



Actividades

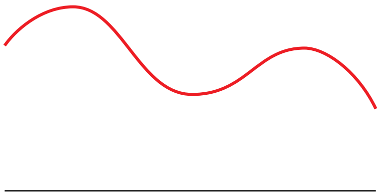
3 Teniendo en cuenta la tabla de arriba, calcula la cuota que corresponde a cada una de las siguientes bases liquidables:

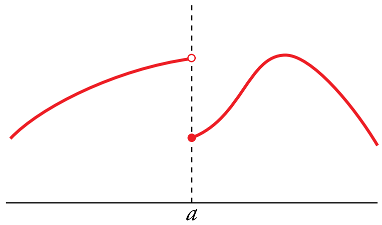
a) 12 640 € b) 25 000 €

4 En el EJEMPLO 1, calcula el sueldo del trabajor un mes en el que hizo 15 horas extraordinarias.

5 En el EJEMPLO 2, calcula la velocidad de la bola a los 5 segundos de ser lanzada.

3 Funciones continuas. Discontinuidades

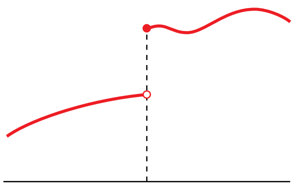




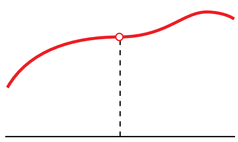
La función de la izquierda es continua en todo su dominio de definición.

La función de la derecha no es continua, porque presenta una discontinuidad en el punto de abscisa a.

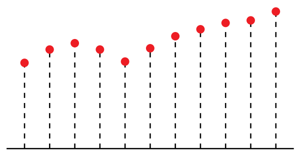
Hay distintos tipos de discontinuidad. Observa algunos:



Hay un salto.



Le falta un punto.



Solo está definida en puntos aislados.

Una función es **continua** cuando no presenta discontinuidades de ningún tipo.

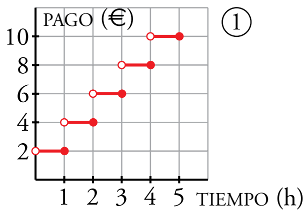
Se puede decir de una función que es **continua en un intervalo** $[a, b]$ si no presenta ninguna discontinuidad en él.

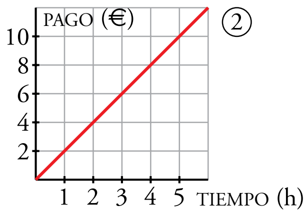
Ejemplos

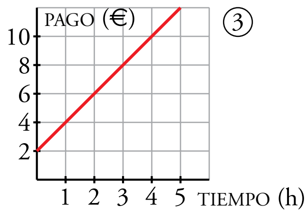
En la página de la izquierda hay tres gráficas continuas. Por ejemplo, la tercera: una pequeña variación en la longitud del péndulo trae como consecuencia una pequeña variación en su periodo.

Sin embargo, en el ejemplo 4 hay un punto de discontinuidad en $d = 2$ cm. Si un objeto estaba a 1,99 cm de la lupa y lo pasamos a 2,01 cm (una pequeña variación en d) el aumento A varía drásticamente.

Hasta hace poco, los aparcamientos cobraban "por horas". Esto quiere decir que solo por entrar ya se pagaba 1 h. Si se estaba 1 h y 10 min se pagaban 2 h. La primera de las tres gráficas siguientes describe esta forma de pago:







Los usuarios prefieren que las tarifas se rijan por la función continua de en medio. Los representantes de los aparcamientos preferirían, si se quiere que la función sea continua, la de la derecha.

Observa

La primera gráfica, discontinua, refleja el pago "por horas" (hora empezada, hora pagada). La segunda consiste en pagar exactamente lo que se gasta. En la tercera, hay un pago inicial (por entrar en el aparcamiento, 2€) y, a continuación, se paga lo que se gasta.

Actividades

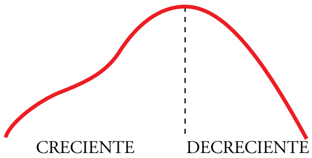
1 a) ¿Cuánto vale aparcar media hora según cada modelo 1, 2 y 3?

b) ¿Cuánto dinero cuesta aparcar 1 h 15 min según cada modelo?

c) ¿Y aparcar 4 h y 6 minutos?

d) Propón un modelo de tarifa que sea intermedio entre la preferencia de los usuarios y la de los representantes de los aparcamientos.

4 Crecimiento, máximos y mínimos



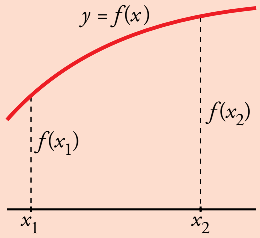
La función f es **creciente** en este tramo porque

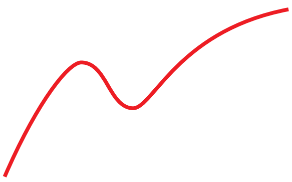
si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Análogamente, una función es **decreciente** en un intervalo cuando

si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Una función puede ser creciente en unos intervalos y decreciente en otros.

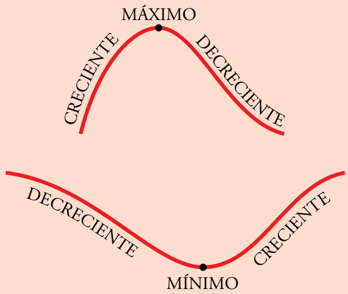




La función puede tomar en otros puntos valores mayores que un máximo relativo y menores que un mínimo relativo.

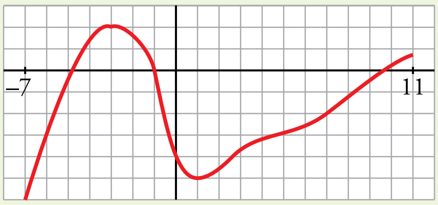
Una función tiene un **máximo relativo** en un punto cuando en él la función toma un valor mayor que en los puntos próximos. En tal caso, la función es creciente hasta el máximo y decreciente a partir de él.

Análogamente, si f tiene un **mínimo relativo** en un punto, es decreciente antes del punto y creciente a partir de él.



Ejercicio resuelto

Decir los intervalos en que es creciente y en los que es decreciente la función dada gráficamente a la derecha. ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos?



La función está definida entre -7 y 11.

Es creciente en los intervalos $(-7, -3)$ y $(1, 11)$.

Es decreciente en el intervalo $(-3, 1)$.

Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa -3. Su valor es 2.

Tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa 1. Su valor es -5.

Hay puntos en los que la función toma valores menores que en el mínimo relativo. Por ejemplo, para $x = -7$, la función toma el valor -6.

Ten en cuenta

$(-7, 11) \longrightarrow$ Intervalo abierto (no incluye los extremos -7 y 11).

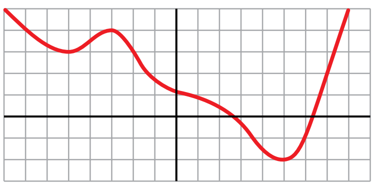
$[-7, 11] \longrightarrow$ Intervalo cerrado (incluye los extremos -7 y 11).

Actividades

1 De la función de la derecha di:

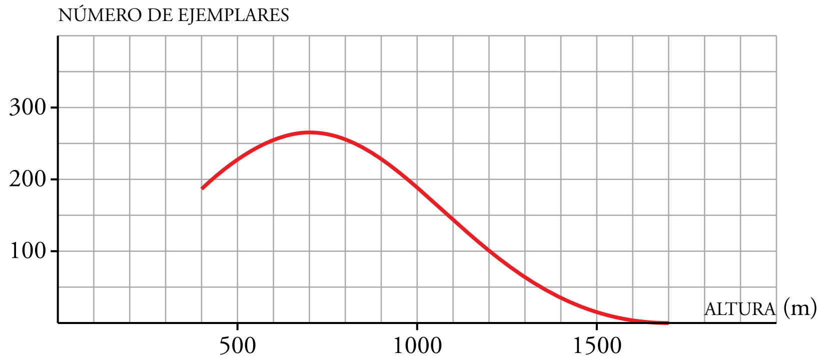
a) En qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.



5 Tendencia y periodicidad

Volviendo al ejemplo del ejercicio resuelto de la página 127, estudiamos la *cantidad media de ejemplares por hectárea* que hay de una cierta especie de planta a distintas *alturas*. El resultado se da en la gráfica siguiente:

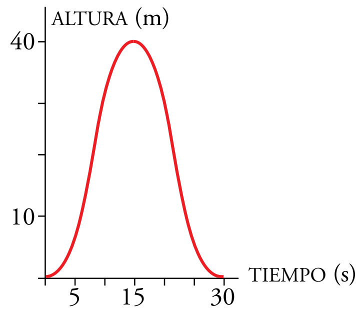


Observamos que, a partir de una cierta altura, cuanto más se sube menos ejemplares se encuentran. Y que, a partir de 1600 m, casi no hay plantas de este tipo. Podemos afirmar que:

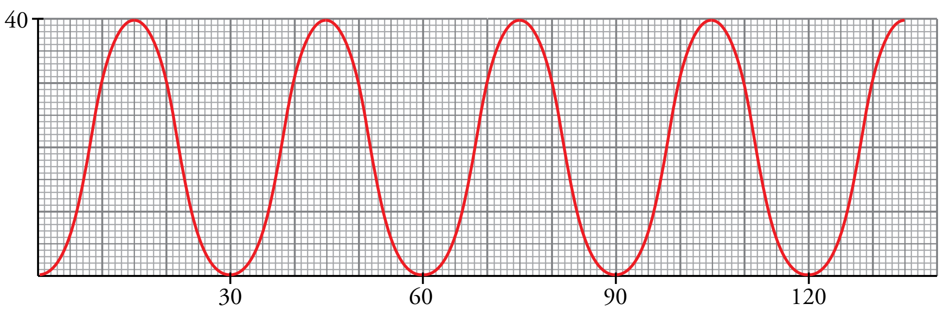
Cuando la altura aumenta por encima de los 1600 m, el número de plantas tiende a cero.

Hay funciones en las que, aunque solo conozcamos un trozo de ellas, podemos predecir cómo se comportarán lejos del intervalo en que han sido estudiadas, porque tienen **ramas** con una **tendencia** muy clara.

Periodicidad



En el margen se ha representado la variación de la altura de un cestillo de una noria cuando esta da una vuelta. Tarda medio minuto (30 segundos), y en ese tiempo sube, llega al punto más alto, baja y llega al suelo. Pero este movimiento se repite una y otra vez. Su representación gráfica es esta:



En esta función, lo que ocurre en el intervalo [0, 30] se repite reiteradamente. Se trata de una *función periódica* de *periodo* 30.

Función periódica es aquella cuyo comportamiento se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. La longitud de ese intervalo se llama **periodo.**

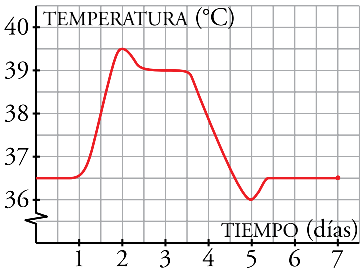
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Interpretación de gráficas

1 ▼▽▽ Esta es la gráfica de la evolución de la temperatura de un enfermo.



a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?

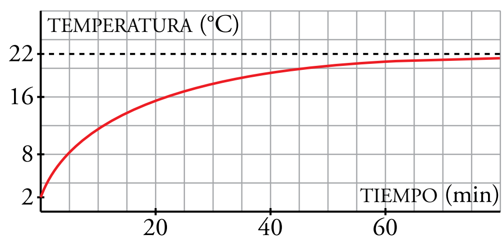
b) ¿En qué día la temperatura alcanza un máximo? ¿Y un mínimo?

c) ¿En qué intervalos de tiempo crece la temperatura y en cuáles decrece?

d) ¿Qué tendencia tiene la temperatura?

e) Elabora un pequeño informe interpretando tus resultados.

2 ▼▽▽ Hemos sacado de la nevera un vaso con agua y lo hemos dejado sobre la mesa de la cocina. Esta gráfica muestra la temperatura del agua en grados centígrados al pasar el tiempo.



a) ¿A qué temperatura está el interior de la nevera?

b) ¿A qué temperatura está la habitación?

c) Imagina que en ese mismo momento sacamos del microondas un vaso con agua a 98 °C y lo dejamos sobre la mesa. Dibuja una gráfica aproximada que muestre la temperatura del agua en este segundo vaso al pasar el tiempo.

Enunciados, fórmulas y tablas

3 ▼▽▽ Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$ definida en $[-2, 3]$. Para ello, completa en tu cuaderno:

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

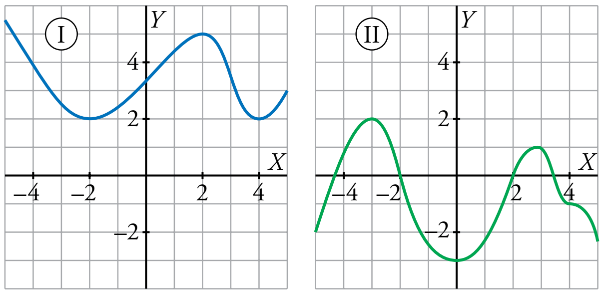
¿Cuál es el recorrido de la función?

Características de una función

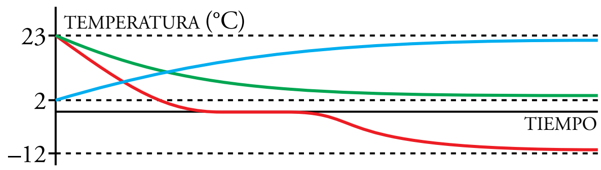
4 ▼▽▽ De cada una de las siguientes funciones di:

a) En qué intervalos crece y en cuáles decrece.

b) Cuáles son sus máximos y sus mínimos relativos.



5 ▼▽▽ Observa las siguientes gráficas de funciones:



a) Relaciona cada curva con uno de estos enunciados.

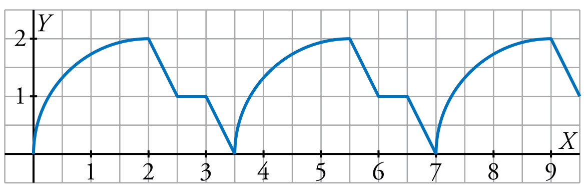
I. Temperatura de un vaso de agua cuando pasa de la mesa a la nevera.

II. Temperatura de un vaso de agua cuando sale de la nevera y se deja en la mesa.

III. Temperatura de un vaso de agua cuando pasa de la mesa al congelador.

b) Determina a qué tiende cada una cuando crece la variable independiente.

6 ▼▽▽ Continúa esta gráfica sabiendo que se trata de una función periódica. Di cuál es su periodo.



7 ▼▼▽ Tres deportistas han estado nadando durante media hora. Su entrenador ha anotado las siguientes distancias recorridas cada 5 minutos:

TIEMPO (min)	5	10	15	20	25	30
DISTANCIA A (m)	95	235	425	650	875	1 100
DISTANCIA B (m)	250	500	750	1 000	1 250	1 500
DISTANCIA C (m)	360	710	1 020	1 300	1 490	1 600

a) Dibuja la gráfica que relaciona la distancia y el tiempo de cada nadador y descríbelas.

b) ¿Ha habido algún adelantamiento durante la media hora?

c) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada una de las tres funciones?

8 ▼▼▽ Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor a un ritmo de un 20% anual.

a) Haz una tabla de valores que dé el valor, en años sucesivos, de un coche que costó 12 000 €.

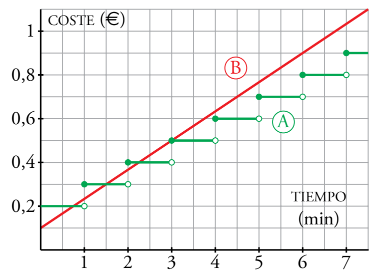
b) Representa gráficamente la función *años transcurridos-valor del coche*.

9 ▼▼▽ Cuando una persona toma 50 g de glucosa en ayunas, su glucemia (% de glucosa en sangre) se eleva, en 1 hora, desde 90 mg/*dl*, nivel normal, hasta 120 mg/*dl*. En las 3 horas siguientes, disminuye hasta valores algo por debajo del nivel normal, y vuelve a la normalidad al cabo de 5 horas.

a) Representa la curva de glucemia de una persona.

b) Di cuál es su máximo, su mínimo y explica su tendencia.

10 ▼▽▽ Dos compañías telefónicas, A y B, tienen diferentes tarifas. Observa las gráficas y contesta:



a) ¿Qué dos variables se relacionan en estas gráficas? ¿Cuál es la independiente? ¿Y la dependiente?

b) Di si cada una de estas funciones es continua. Escribe los puntos de discontinuidad, si los hay.

c) Di cuánto vale una llamada de 3 minutos con cada una de las dos compañías. ¿Y una de media hora?

Autoevaluación

¿Sabes interpretar una función a partir de una gráfica, una fórmula o un enunciado?

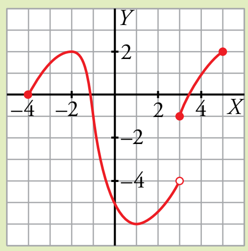
1 Un ciclista hace una excursión a un lugar que dista 30 km de su casa. Al cabo de una hora, cuando ha recorrido 15 km, hace una parada de media hora. Reanuda la marcha con la misma velocidad hasta llegar a su destino, donde descansa otra media hora, y regresa al punto de partida a la misma velocidad que a la ida. Representa la gráfica *tiempo-distancia al punto de partida*.

2 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno y dibuja la gráfica de la función definida por la fórmula $y = x^2 - 4x$.

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y									

¿Reconoces las características de una función?

3 Observa la gráfica y halla:



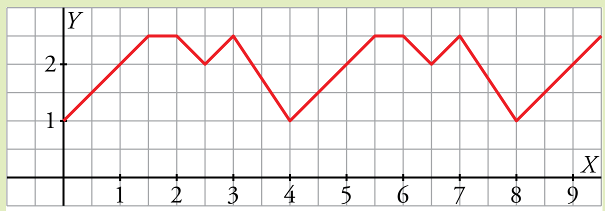
a) Dominio y recorrido.

b) Máximos y mínimos.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Dónde es continua y los puntos de discontinuidad.

4 ▼▼▽ ¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su periodo?



Averigua los valores de la función dada por la gráfica anterior en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 3$, $x = 20$, $x = 23$ y $x = 42$.

9 Las funciones lineales

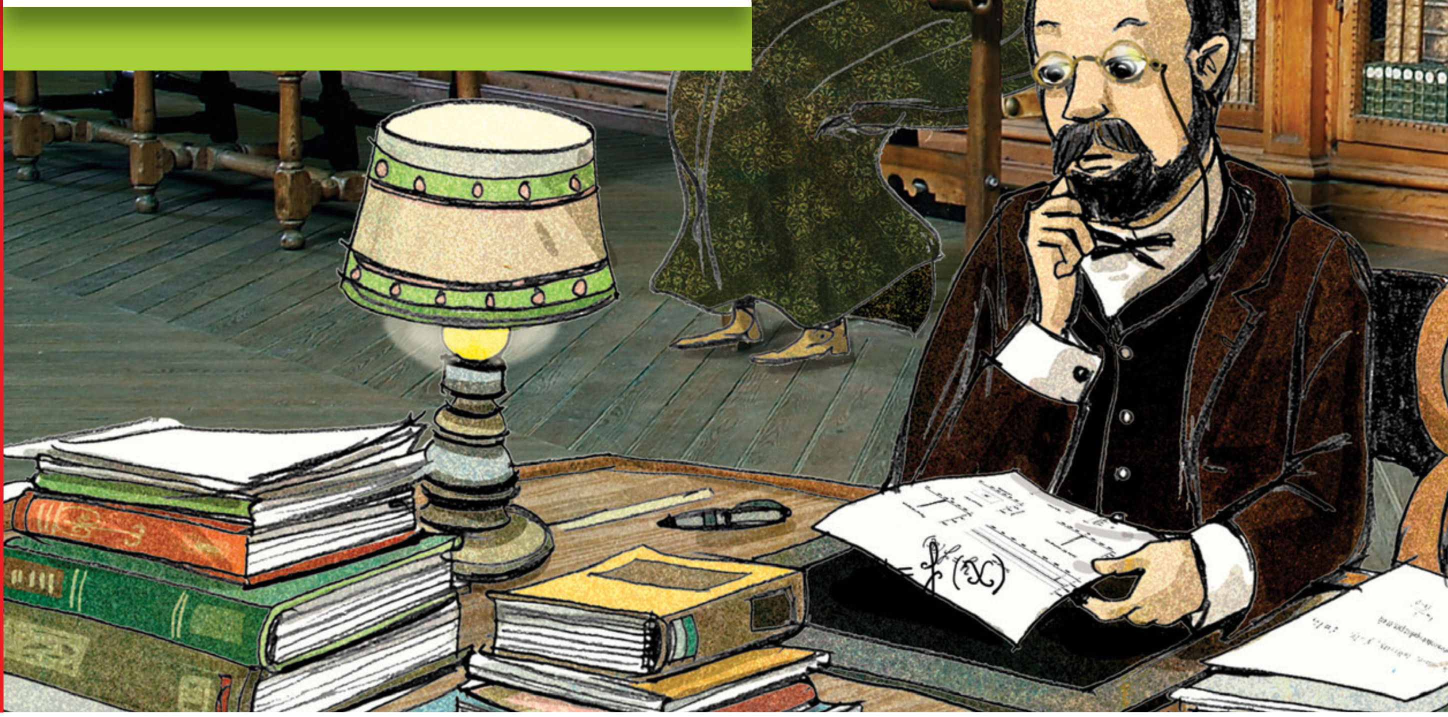
Después de Euler aún siguió, entre los matemáticos, la discusión de qué requisitos eran imprescindibles para definir una función y cuáles no. En 1923 se llegó a la siguiente definición, muy parecida a la que se usa actualmente:

> Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.

Pero en esa búsqueda de la precisión, se generaron una serie de funciones estrafalarias que llevaron a **Poincaré,** en el año 1899, a decir:

> "Durante medio siglo hemos visto una masa de funciones extrañas que parecen forzadas a parecerse lo menos posible a las *funciones honestas* que sirven a algún propósito. Antes, cuando se inventaba alguna función, era con alguna meta práctica. Hoy son inventadas con el fin de mostrar que el razonamiento de nuestros antecesores fue erróneo".

En esta unidad, y en la próxima, vamos a dedicarnos a esas *funciones honestas* que propugnaba el gran Poincaré. Esas funciones que sirven para algo más que para construir o desmontar conceptos.



1 Idea de función lineal. Tipos

La ciencia, la técnica, la economía… están plagadas de funciones en las que *las variaciones de las causas influyen proporcionalmente en las variaciones de los efectos.* Todas estas funciones se llaman **lineales** y se representan mediante rectas. Veamos un ejemplo:

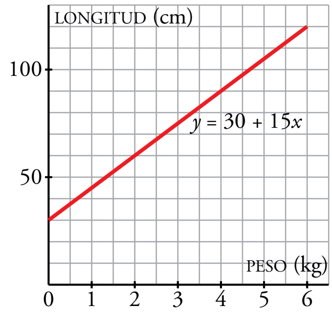
Alargamiento de un muelle

Si de un muelle colgamos distintas pesas, se producen diversos alargamientos. Es decir, la *longitud del muelle* es función del *peso* que se cuelga. Y es interesante destacar que esta función es lineal.

En concreto, supongamos que el muelle sin estirar mide 30 cm y que se alarga 15 cm por cada kilogramo que colguemos. La relación es:

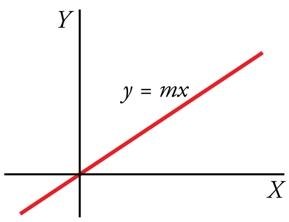
$y = 30 + 15x$ (y: longitud en cm; x: peso en kg)

El dominio de definición de esta función es $[0, 6]$, suponiendo que para pesos de más de 6 kg el muelle se deteriora.



Tipos de funciones lineales

Función de proporcionalidad: $y = mx$



Las funciones de proporcionalidad se representan mediante rectas que pasan por el origen. Describen una proporción entre los valores de las dos variables.

Al número m se le llama pendiente.

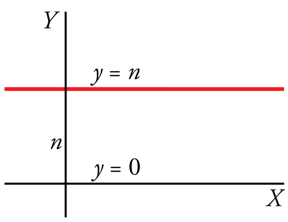
Ejemplo

El espacio recorrido con movimiento uniforme (velocidad constante) en función del tiempo es:

$$e = v \cdot t$$

v es la pendiente de la recta que relaciona e con t.

Función constante: $y = n$



Se representa mediante una recta paralela al eje X. Su pendiente es 0.

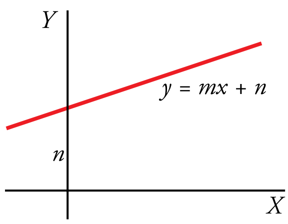
La recta $y = 0$ coincide con el eje X.

En estas rectas, todos los puntos tienen la misma ordenada. Por ejemplo, (2, 5), (6, 5), (11, 5) son puntos de la recta $y = 5$.

Ejemplo

El precio de la comida en algunos restaurantes es constante, no depende de la cantidad que nos sirvamos.

Expresión general: $y = mx + n$

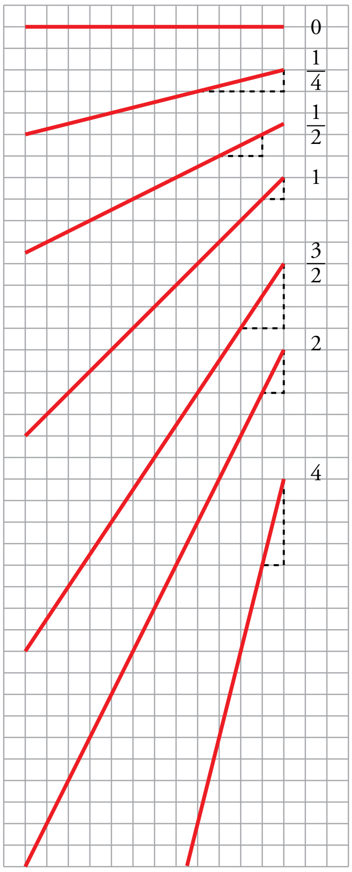


Su representación es una recta de pendiente m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$. Al número n se le llama **ordenada en el origen.**

Ejemplo

La longitud de un muelle en función de la fuerza que lo estira.

2 Funciones lineales. Pendiente



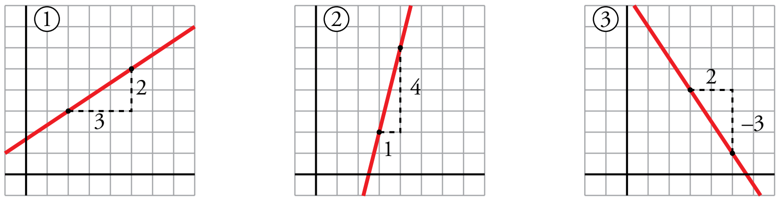
Observa cómo varía el valor de la pendiente al aumentar la inclinación de la recta.

Las funciones lineales, como hemos visto, responden a la ecuación $\boldsymbol{y = mx + n}$, y se representan mediante rectas.

Recuerda que la pendiente de una recta tiene que ver con su inclinación respecto del eje X. Vamos a repasar el significado, la interpretación gráfica y la obtención de la pendiente de una recta.

Pendiente de una recta representada gráficamente

Observa cómo se obtienen las pendientes de las siguientes rectas:



1 Cuando x *avanza* 3, y *sube* 2. Pendiente $= \dfrac{2}{3}$

2 Cuando x *avanza* 1, y *sube* 4. Pendiente $= \dfrac{4}{1} = 4$

3 Cuando x *avanza* 2, y *baja* 3. Pendiente $= -\dfrac{3}{2}$

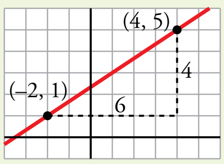
La **pendiente** de una recta es la variación de la y (aumento o disminución) cuando la x aumenta una unidad.

Para hallar la pendiente de una recta mediante su representación gráfica, se señalan dos de sus puntos y se mide la variación de la x y la variación de la y al pasar de un punto al otro. Entonces:

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{variación de la } y}{\text{variación de la } x}$$

Ejercicio resuelto

Hallar gráficamente la pendiente de la recta que pasa por los puntos (–2, 1) y (4, 5).



Representamos los puntos y, contando cuadraditos, hallamos:

La variación de la x es 6; la variación de la y es 4.

Por tanto: pendiente $= \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Podemos observar que, efectivamente, cuando x avanza 3, y sube 2.

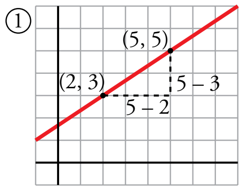
Actividades

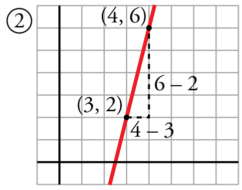
1 Halla gráficamente la pendiente de la recta que pasa por (–3, –2) y (5, 4).

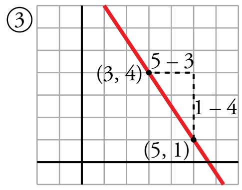
2 Halla gráficamente la pendiente de la recta que pasa por (–2, 6) y (4, 2).

Pendiente de una recta a partir de dos de sus puntos

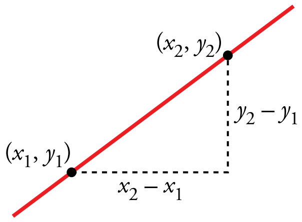
Observa cómo se realiza numéricamente lo que en la página anterior se ha hecho gráficamente:







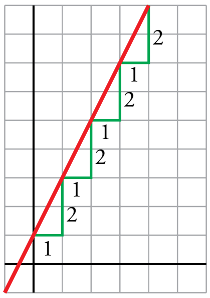
Pendiente $= \dfrac{5-3}{5-2} = \dfrac{2}{3}$ Pendiente $= \dfrac{6-2}{4-3} = 4$ Pendiente $= \dfrac{1-4}{5-3} = \dfrac{-3}{2}$



Si conocemos las coordenadas de dos puntos de la recta, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, para hallar la pendiente, procedemos así:

Pendiente $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $y_2 - y_1$ es la variación de la y. $x_2 - x_1$ es la variación de la x.

Pendiente de una recta dada por su ecuación



La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando está despejada la y.

Por ejemplo, observemos una tabla de valores correspondientes a $y = 2x + 1$:

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

Advertimos que *cuando la x avanza 1, la y sube 2;* es decir, la pendiente de la recta es 2.

Problemas resueltos

1. Hallar las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

a) $P(-1, 3)$, $Q(4, 13)$

b) $A(7, 4)$, $B(2, -5)$

1. a) Pendiente $= \dfrac{13-3}{4-(-1)} = \dfrac{10}{5} = 2$

b) Pendiente $= \dfrac{-5-4}{2-7} = \dfrac{-9}{-5} = \dfrac{9}{5}$

2. Hallar las pendientes de:

a) $y = 3x$

b) $y = -2x + 1$

c) $2x + 3y - 7 = 0$

2. En a) y en b), la pendiente es evidente, pues la y está despejada:

a) $m = 3$ b) $m = -2$

c) Despejamos la y: $3y = 7 - 2x \rightarrow y = \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3}x \rightarrow m = -\dfrac{2}{3}$

Actividades

3 Halla las pendientes de las rectas que pasan por estos pares de puntos:

a) (3, 1) y (7, 5) b) (3, 5) y (7, –2)

c) (3, –2) y (7, 8) d) (1, –5) y (10, 11)

4 Halla las pendientes de:

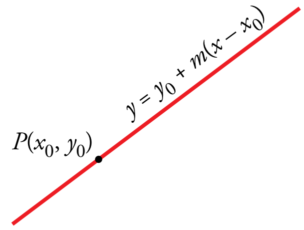
a) $y = -\dfrac{2}{3}x$ b) $y = \dfrac{3x+5}{7}$

c) $4x - 5y + 2 = 0$ d) $-x + 4y + 5 = 0$

3 Ecuación de una recta en la forma punto-pendiente

Atención

Esta fórmula es muy útil. ¡Aprende a usarla!



Con mucha frecuencia hemos de escribir la ecuación de una recta de la cual conocemos un punto y la pendiente. La damos a continuación.

Punto: $P(x_0, y_0)$	Pendiente: m	Ecuación: $y = y_0 + m(x - x_0)$

JUSTIFICACIÓN

- $y = y_0 + m(x - x_0)$ es una expresión de 1.^er^ grado. Por tanto, **es una recta.**
- El coeficiente de la x es m. Por tanto, **su pendiente es m.**
- Si damos a x el valor $x_0 \rightarrow y = y_0 + m(x_0 - x_0) = y_0 + m \cdot 0 = y_0$. Obtenemos $y = y_0$. Si $x = x_0$, entonces $y = y_0$. Es decir, **pasa por (x_0, y_0).**

Recta dada por dos puntos

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, procedemos así:

- A partir de los dos puntos, obtenemos su pendiente.
- Con la pendiente y uno de los puntos, obtenemos la ecuación.

Ejercicio resuelto

Hallar la ecuación de cada una de las rectas siguientes:

a) Pasa por (–5, 7) y tiene una pendiente de $\frac{-3}{5}$.

b) Pasa por (0, 4) y tiene una pendiente de $\frac{7}{3}$.

c) Pasa por (–2, 7) y por (4, 5).

a) Ecuación: $y = 7 - \frac{3}{5}(x + 5)$. Esto ya es la ecuación de la recta.

Podemos simplificarla: $y = 7 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \cdot 5 \rightarrow y = 4 - \frac{3}{5}x$

b) $y = 4 + \frac{7}{3}x$. Observa que (0, 4) está en el eje Y. Es decir, 4 es la ordenada en el origen.

c) Empezamos hallando su pendiente: $m = \frac{5 - 7}{4 - (-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

Ecuación de la recta que pasa por (–2, 7) y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$:

$$y = 7 - \frac{1}{3}(x + 2) \quad (*)$$

También podríamos hallarla a partir del otro punto:

Ecuación de la recta que pasa por (4, 5) y cuya pendiente es $-\frac{1}{3}$:

$$y = 5 - \frac{1}{3}(x - 4) \quad (**)$$

¿Coincidirán? ¡Naturalmente! Puedes comprobarlo simplificando las ecuaciones (*) y (**).

Actividades

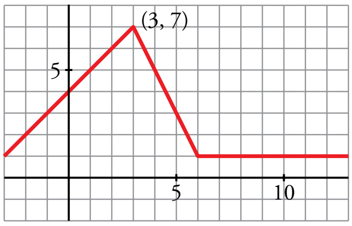
1 Halla la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por (–3, –5) y tiene una pendiente de $\frac{4}{9}$.

b) Pasa por el punto (0, –3) y tiene una pendiente de 4.

c) Pasa por (3, –5) y por (–4, 7).

4 Funciones definidas a trozos



Es frecuente encontrarse con funciones cuyas gráficas están formadas por trozos de rectas. Veamos, por ejemplo, la función representada en el margen:

- El primer tramo pertenece a la recta cuya pendiente es 1 y cuya ordenada en el origen es 4. Su ecuación es, por tanto, $y = x + 4$.
- El segundo tramo pertenece a la recta que pasa por (3, 7) y cuya pendiente es –2. Su ecuación: $y = 7 - 2(x - 3)$. Es decir, $y = -2x + 13$.
- El tercer tramo es la función constante $y = 1$.

La función se describe así: $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \le 3 \\ -2x + 13 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 1 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

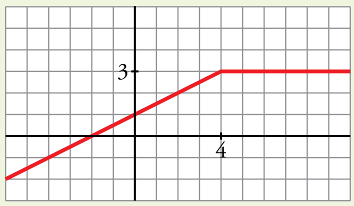
Para describir analíticamente una gráfica formada por trozos de rectas, se dan las ecuaciones de los diversos tramos, enumerados por orden, indicando en cada uno de ellos los valores de x para los que la función está definida.

Ejercicios resueltos

1. Representar la función cuya expresión analítica es:

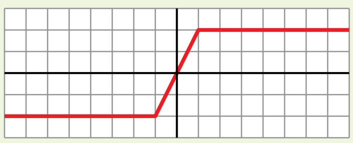
$$y = f(x) = \begin{cases} 0{,}5x + 1 & x < 4 \\ 3 & x \ge 4 \end{cases}$$

1. Es una función muy parecida a la anterior. Por eso, representamos directamente los dos tramos de que consta:



Puesto que ahora los dos tramos empalman en el punto de abscisa 4, no nos ocuparemos de si el punto pertenece a uno o a otro tramo.

2. Poner la ecuación de la siguiente función:



2. 1.^{er} TRAMO: $y = -2$, hasta $x = -1$

2.° TRAMO: $y = 2x$, entre –1 y 1

3.^{er} TRAMO: $y = 2$, a partir de $x = 1$

$$y = f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Actividades

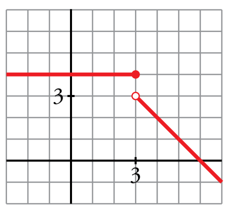
1 Representa las funciones cuyas expresiones analíticas son las siguientes:

a) $y = \begin{cases} 2x - 5, & x < 3 \\ x + 1, & x > 3 \end{cases}$

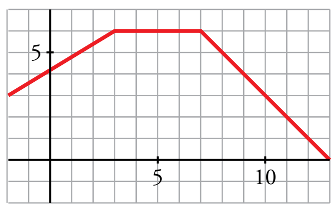
b) $y = \begin{cases} 2x - 5, & x < 3 \\ x - 2, & x \ge 3 \end{cases}$

2 Escribe las ecuaciones de la función que corresponde a cada una de las siguientes gráficas:

a)



b)



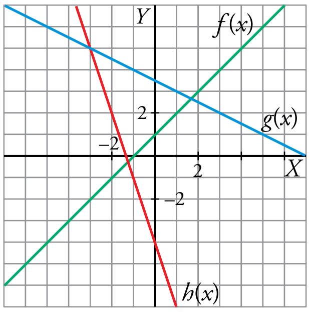
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Pendiente de una recta

1 ▼▽▽ Halla la pendiente de cada una de las rectas dibujadas:



2 ▼▽▽ Halla la pendiente de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

a) (2, 4) y (–1, –2) b) (–3, 5) y (3, –1)

c) (–3, 5) y (2, 1) d) (3, 2) y (5, 2)

3 ▼▽▽ Halla las pendientes de las siguientes rectas:

a) $y = 4x - 2$ b) $y = -\dfrac{4}{5}x$

c) $6x + 3y - 4 = 0$ d) $3y - 12 = 0$

Ecuación y representación de una función lineal

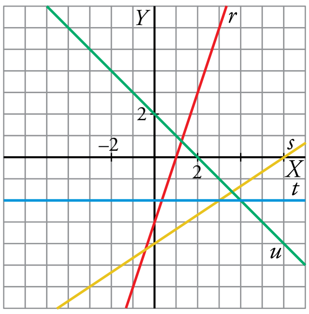
4 ▼▽▽ Asocia a cada recta su ecuación. Di, en cada caso, cuál es su pendiente.

a) $y + 2 = 0$

b) $3x - y = 3$

c) $y = 2 - x$

d) $2x - 3y = 12$



5 ▼▽▽ Representa las siguientes rectas:

a) $y = \dfrac{4}{7}x$ b) $y = 2x - 3$

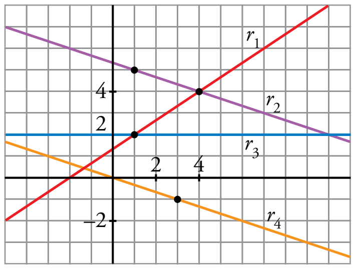
c) $y = \dfrac{-3x + 10}{5}$ d) $y = 2{,}5$

6 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones y dibújalas:

a) Pasa por (5, 3) y tiene una pendiente de 3/5.

b) Pasa por el punto (5, 3) y tiene pendiente –1/2.

7 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 en la forma punto-pendiente.



8 ▼▽▽ Halla la ecuación de las rectas que pasan por los puntos que se indican y represéntalas:

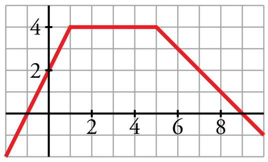
a) (2, 3) y (7, 0) b) (0, 4) y (4, 0)

Funciones definidas a trozos

9 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones:

a) $y = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ 2x - 3, & x \ge 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x + 3, & x < -4 \\ 2x + 7, & -4 \le x \le 0 \\ 7 - x, & x > 0 \end{cases}$

10 ▼▼▽ Queremos hallar la expresión analítica de esta función formada por tres tramos de rectas.



a) Para $x \le 1$, la recta pasa por (0, 2) y (1, 4). Escribe su ecuación.

b) Para $1 \le x \le 5$, es una función constante. Escribe su ecuación.

c) Para $x \ge 5$, la recta pasa por (5, 4) y (9, 0). Escribe su ecuación.

d) Completa, en tu cuaderno, su expresión analítica:

$$y = \begin{cases} \dots & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \le x \ \dots \\ \dots & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

11 ▼▼▽ Un coche teledirigido, en el instante inicial, está a 2 m de Manuela y se aleja de ella a una velocidad constante de 3 m/s.

a) ¿Cuál es la ecuación que ofrece su distancia a Manuela en función del tiempo?

b) ¿A qué distancia de Manuela está el juguete al minuto de empezar a contar? ¿Cuánto recorre en ese tiempo?

c) Representa la función.

12 ▼▼▽ Mientras ascendíamos por una montaña, medimos la temperatura y obtuvimos los datos de esta tabla:

ALTURA (m)	0	360	720	990
TEMPERATURA (°C)	10	8	6	4,5

a) Representa los puntos en una gráfica.

b) Suponiendo que se sigue la misma pauta, halla la expresión analítica de la función *altura-temperatura*.

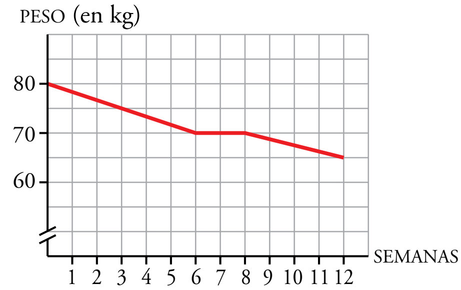
c) ¿A partir de qué altura la temperatura es menor que 0 °C?

13 ▼▼▽ Un fontanero cobra 18 € por el desplazamiento y 15 € por cada hora de trabajo.

a) Haz una tabla de valores de la función *tiempo-coste* y represéntala gráficamente.

b) Si ha cobrado por una reparación 70,50 €, ¿cuánto tiempo ha invertido en la reparación?

14 ▼▼▼ El médico ha puesto a Ricardo un régimen de adelgazamiento y con esta gráfica le explica lo que espera conseguir en las próximas 12 semanas.



a) ¿Cuál era su peso al comenzar el régimen?

b) ¿Cuánto tiene que adelgazar por semana en la primera etapa del régimen? ¿Y entre la sexta y la octava semanas?

c) Halla la expresión analítica de la función anterior.

Autoevaluación

¿Manejas con destreza las funciones lineales?

1 Halla la pendiente de las rectas que pasan por estos pares de puntos:

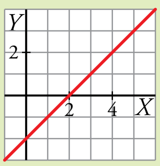
a) (5,4) y (3,1) b) (–2, –5) y (1, 1)

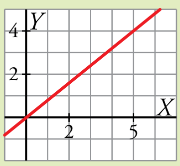
2 Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:

a) Pasa por el punto (1, –2) y tiene pendiente $\frac{3}{2}$.

b) Pasa por los puntos (–2, –5) y (1, 1).

3 Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:

a) 

b) 

¿Interpretas y representas funciones definidas a trozos?

4 Representa: $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

5 Estas son las tarifas de dos compañías telefónicas:

A	B
A: 0,30 € por establecimiento de llamada y 0,20 €/min	B: 0,22 €/min

a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 5 minutos en cada compañía? ¿Y de 15 min? ¿Y de 20 min?

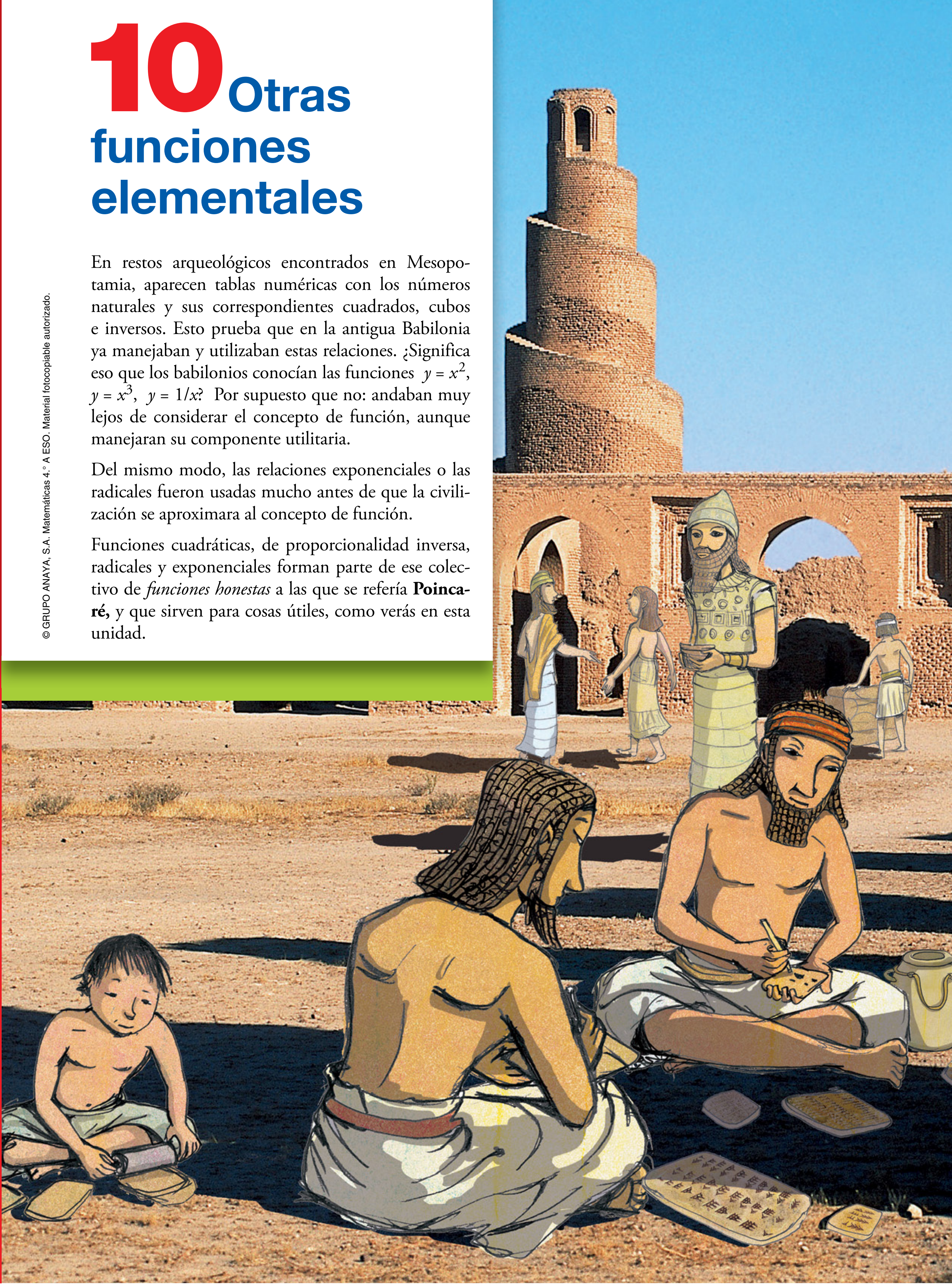
b) Haz, para cada una de las dos compañías, la gráfica de la función que nos da el precio de la llamada dependiendo del tiempo que dure.

10 Otras funciones elementales

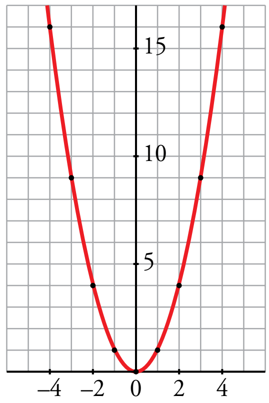
En restos arqueológicos encontrados en Mesopotamia, aparecen tablas numéricas con los números naturales y sus correspondientes cuadrados, cubos e inversos. Esto prueba que en la antigua Babilonia ya manejaban y utilizaban estas relaciones. ¿Significa eso que los babilonios conocían las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$? Por supuesto que no: andaban muy lejos de considerar el concepto de función, aunque manejaran su componente utilitaria.

Del mismo modo, las relaciones exponenciales o las radicales fueron usadas mucho antes de que la civilización se aproximara al concepto de función.

Funciones cuadráticas, de proporcionalidad inversa, radicales y exponenciales forman parte de ese colectivo de *funciones honestas* a las que se refería **Poincaré,** y que sirven para cosas útiles, como verás en esta unidad.



1 Parábolas y funciones cuadráticas



La función $y = x^2$

Empecemos construyendo una tabla de valores:

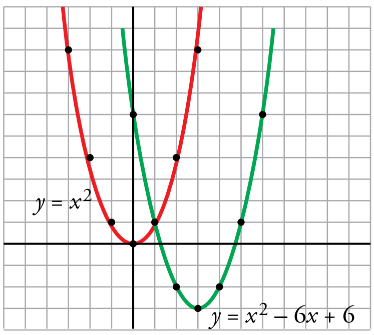
$y = x^2 \rightarrow$

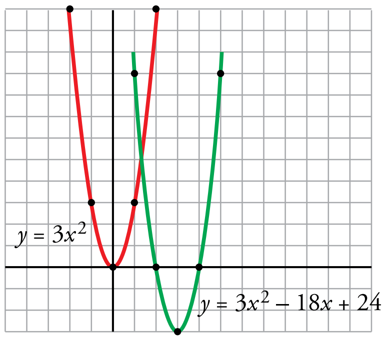
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

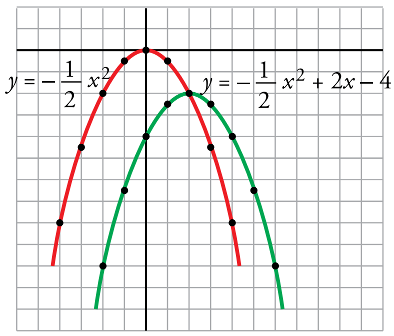
La gráfica es una curva en forma de parábola, **simétrica** respecto al eje Y; tiene un mínimo en el punto (0, 0), al que llamamos **vértice.** Tiene **dos ramas,** una decreciente y otra creciente. Es una función **definida en todo** $\mathbb{R}$ y **continua,** pues no presenta saltos: se puede representar de un solo trazo.

Funciones cuadráticas

Fíjate en las siguientes curvas y comprueba en cada una de ellas, que las coordenadas de los puntos señalados cumplen las correspondientes ecuaciones:







Observándolas, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Las funciones $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, llamadas **cuadráticas,** se representan todas ellas mediante **parábolas** con el eje paralelo al eje Y.
- Su forma (anchura) y su orientación (hacia abajo, hacia arriba) dependen del coeficiente a de x^2, del siguiente modo:
  - — Si $a > 0$, tiene las ramas hacia arriba, y si $a < 0$, hacia abajo.
  - — Cuanto mayor sea $|a|$, más estilizada es la parábola.

Ejemplo

Representar $y = x^2 - 6x + 6$.

$$\text{Vértice} \begin{cases} x\colon\ -\dfrac{-6}{2 \cdot 1} = 3 \\ y\colon\ 3^2 - 6 \cdot 3 + 6 = -3 \end{cases}$$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	6	1	–2	–3	–2	1	6

La representación es la parábola verde de la primera de las tres cuadrículas anteriores.

Representación de funciones cuadráticas

Para representar las funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$, conviene saber que la abscisa del vértice es $\dfrac{-b}{2a}$. Después, se construye una tabla de valores a izquierda y derecha de este punto.

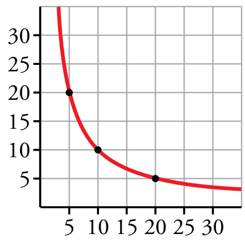
Actividades

1 Calcula el vértice, construye una tabla de valores y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = -x^2 - 4x + 5$

2 Funciones de proporcionalidad inversa

Recuerda: la proporcionalidad inversa relaciona dos variables de forma que cuando una aumenta (doble, triple, cuádruple…), la otra disminuye (mitad, tercio, cuarto…).



EJEMPLO

De un rectángulo de 100 cm^2 de superficie, desconocemos sus lados. Los llamamos x e y. Es claro que $xy = 100$. Lo ponemos así:

$y = \dfrac{100}{x}$ (A igualdad de áreas, los lados son inversamente proporcionales).

Las relaciones de proporcionalidad inversa, como la que acabamos de describir, se presentan con mucha frecuencia en la naturaleza, la física, la economía… Vamos a analizarlas teóricamente.

La función $y = 1/x$

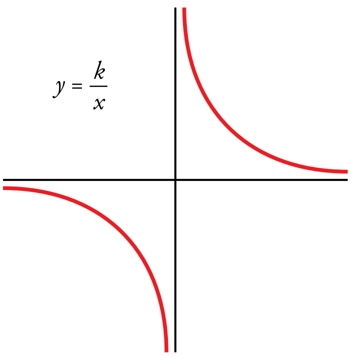
Observa las siguientes tablas de valores:

x	1	2	4	5	10
y	1	0,5	0,25	0,2	0,1

x	1	0,5	0,25	0,1	0,01
y	1	2	4	10	100

Vemos que:

- Cuanto más grande es x, más pequeño se hace y.
- Cuanto más pequeño es x, más grande se hace y.



Características de las funciones $y = k/x$

- No están definidas en $x = 0$.
- Si x se acerca a 0, y toma valores cada vez más grandes. Por eso, decimos que el eje Y es una **asíntota**.
- Si x toma valores cada vez más grandes, y se acerca a 0. Por eso, el eje X es asíntota.

Esta curva es una **hipérbola.**

Actividades

1 Representa con detalle la parte positiva de la función:

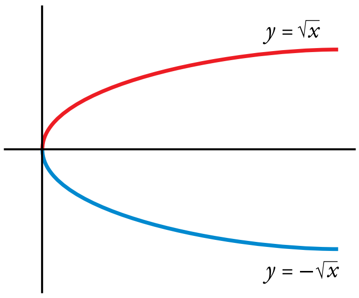
$$y = \frac{36}{x}$$

Para ello, dale a x los valores 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 y utiliza una hoja de papel cuadriculado para representar los puntos obtenidos.

2 Representa la función $y = 6/x$. Para ello, da a x los valores ±1, ±2, ±3 y ±6.

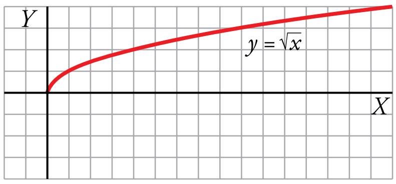
3 Representa $y = \dfrac{8}{x-5}$ dando a x los valores –3, 1, 3, 4, 6, 7, 9 y 13. Comprueba que la asíntota vertical es la recta $x = 5$.

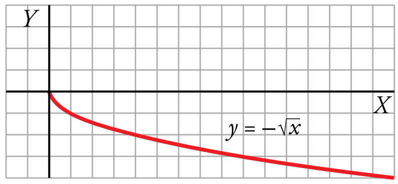
3 Funciones radicales. Funciones exponenciales



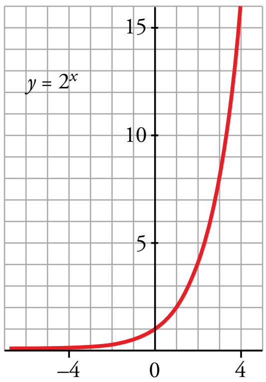
Funciones radicales

Las funciones $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ se pueden representar punto a punto y dan lugar a las gráficas que ves debajo. Son mitades de parábola y juntas describen una parábola idéntica a $y = x^2$, pero con su eje sobre el eje X.





El dominio de definición de estas funciones es $[0, +\infty)$.



Funciones exponenciales

- En el margen tienes la gráfica de la función exponencial de base 2: $y = 2^x$. Se trata de una función creciente.

$x \geq 0$

x	0	1	2	3	4	…
y	1	2	4	8	16	…

$x \leq 0$

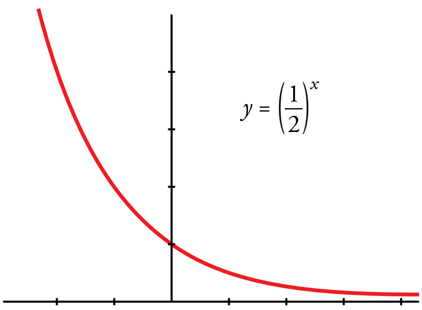
x	0	–1	–2	–3	–4	…
y	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	…

NOTA: Recuerda el significado de las potencias negativas $\rightarrow 2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

- La función $y = (1/2)^x$ también es exponencial. Como su base $(1/2)$ es menor que 1, la función es decreciente.

x	0	1	2	3	4	…
y	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	…

x	0	–1	–2	–3	–4	…
y	1	2	4	8	16	…



Se llaman **funciones exponenciales** a las que tienen la ecuación $y = a^x$.

- Todas ellas son continuas, están definidas en todo $\mathbb{R}$ y pasan por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$.
- Si la base es mayor que 1 $(a > 1)$, entonces son crecientes.
- Si la base es menor que 1 $(a < 1)$, entonces son decrecientes.

Actividades

1 Representa estas funciones y di sus dominios de definición (da a x los valores –1, 0, 3, 8, 15):

a) $y = \sqrt{x+1}$ b) $y = \sqrt{x+1} - 5$

2 Calcula los valores de la función $y = 1{,}5^x$ para los valores enteros de x comprendidos entre –6 y 6. Representa la función.

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Funciones cuadráticas

1 ▼▽▽ Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	…	…	…	…	…	…	…	…	…

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 - 4$

2 ▼▽▽ Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ b) $y = -3x^2 + 6x - 3$

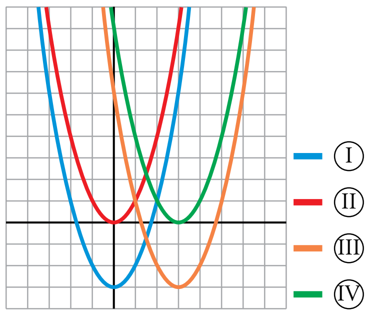
3 ▼▽▽ Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de estas parábolas señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o de un mínimo:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = 3 - x^2$

c) $y = x^2 + 4x + 4$ d) $y = -5x^2 + 10x - 3$

Representa cada una de esas parábolas.

4 ▼▽▽ Asocia a cada una de las gráficas una de las expresiones siguientes:



a) $y = x^2$

b) $y = (x - 3)^2$

c) $y = x^2 - 3$

d) $y = x^2 - 6x + 6$

Otras funciones

5 ▼▽▽ Dibuja la gráfica de estas funciones, dando a x los valores que se indican en cada caso:

a) $y = \frac{3}{x}$ $x = -3; -1; -1/2; 1/2; 1; 3$

b) $y = -\frac{2}{x}$ $x = -2; -1; -1/2; 1/2; 1; 2$

6 ▼▽▽ Halla las asíntotas de cada una de estas funciones hiperbólicas y represéntalas gráficamente ayudándote de una tabla de valores:

a) $y = \frac{3}{x + 3}$ b) $y = \frac{5}{1 - x}$

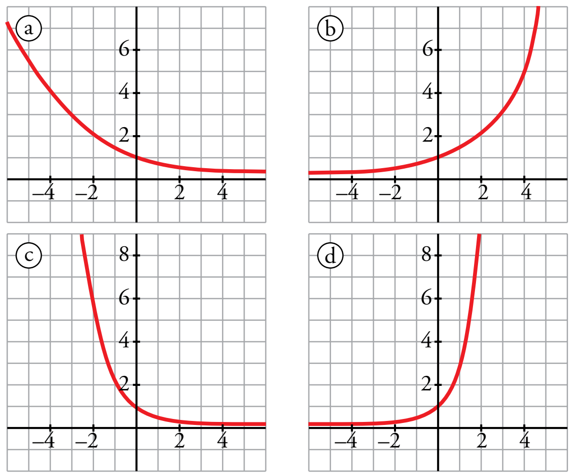
7 ▼▽▽ Ayudándote de una tabla de valores, representa estas funciones. Para el apartado a), da valores positivos a x, y para el apartado b), negativos.

a) $y = \sqrt{x} + 2$ b) $y = 2\sqrt{-x}$

8 ▼▽▽ Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:

I) $y = 3^x$ II) $y = 1{,}5^x$

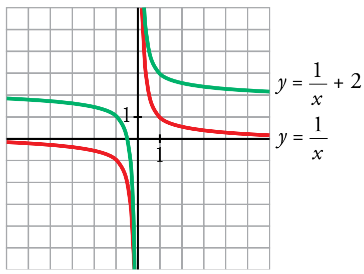
III) $y = 0{,}4^x$ IV) $y = 0{,}7^x$



Di, para cada una, si es creciente o decreciente.

Aplica lo aprendido

9 ▼▼▽ Observa estas hipérbolas y contesta:



a) ¿A qué valor se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más grandes?

b) ¿A qué valores se acerca cada una cuando x toma valores cada vez más próximos a cero?

c) ¿Cuál es la asíntota horizontal de cada función?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

10 ▼▼▽ La altura, h, a la que se encuentra en cada instante, t, una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s viene dada por: $h = 20t - 5t^2$.

a) Representa gráficamente la función.

b) Di cuál es su dominio de definición.

c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

d) ¿En qué momento cae la piedra al suelo?

e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?

11 ▼▼▼ El coste por unidad de fabricación de ciertos sobres disminuye según aumenta el número de unidades fabricadas. Este coste viene dado por la función: $y = \dfrac{0{,}3x + 1\,000}{x}$.

a) ¿Qué valores puede tomar la variable x?

b) Da el coste por unidad y el coste de 10 sobres.

c) Calcula, también, el coste por unidad y el coste total para 100 000 sobres.

d) ¿A cuánto asciende el coste por unidad fabricada cuando el número de sobres es muy grande?

12 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

En el contrato de alquiler de un apartamento figura una claúsula en la que se especifica que el precio subirá un 5% anual.

a) Si el precio es de 450 € mensuales, ¿cuál será dentro de 5 años?

b) Escribe la función que relaciona el precio mensual del alquiler con los años transcurridos.

Para aumentar una cantidad un 5% se multiplica por 1,05. Por tanto:

a) $450 \cdot 1{,}05^5 = 574{,}33$ €

b) $y = 450 \cdot 1{,}05^x$

13 ▼▼▽ Una furgoneta que costó 20 000 € se deprecia a un ritmo de un 12% anual.

a) ¿Cuál será su precio dentro de 4 años?

b) Halla la función que da el precio del vehículo según los años transcurridos.

c) Calcula cuánto tiempo tardará el precio en reducirse a la mitad.

☞ *Para reducir una cantidad un 12% se multiplica por 0,88.*

Autoevaluación

¿Conoces familias de funciones (cuadráticas, de proporcionalidad inversa, radicales, exponenciales) y las representas a partir de sus ecuaciones, y viceversa?

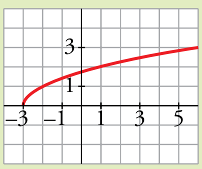
1 Calcula las coordenadas del vértice y representa la parábola: $y = x^2 + 4x - 5$

2 Representa la siguiente función:

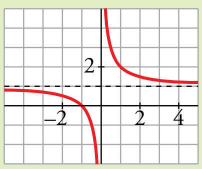
$$y = \frac{2}{x} + 1$$

3 Asocia a cada una de las gráficas una ecuación:

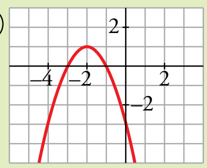
(I)



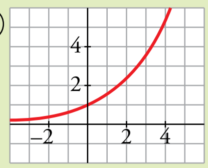
(II)



(III)



(IV)



a) $y = -x^2 - 4x - 3$

b) $y = 1{,}5^x$

c) $y = (1/x) + 1$

d) $y = \sqrt{x + 3}$

¿Asocias una situación real con algún modelo de función y te basas en él para interpretarla?

4 En el contrato de trabajo de un empleado figura que su sueldo subirá un 10% anual. Su sueldo inicial es de 24 000 € anuales.

a) ¿Cuánto ganará dentro de 10 años?

b) Escribe la función que relaciona el dinero que gana con el número de años transcurridos.

11 La semejanza. Aplicaciones

El estudio teórico de la semejanza se suele basar en el teorema de Tales. Recordemos quién fue este personaje.

Tales nació en Mileto (actualmente, en la costa occidental de Turquía), aproximadamente, en el año 640 a.C. Murió con más de 90 años.

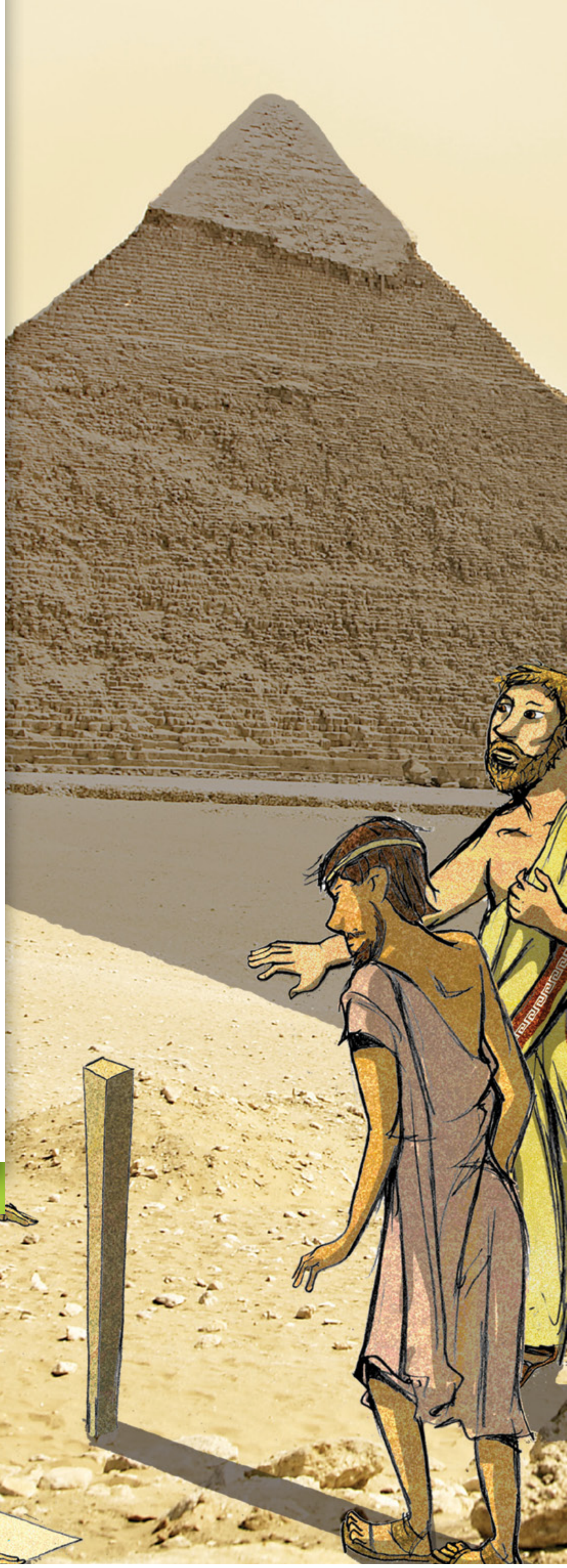
Visitó Egipto y, posiblemente, Babilonia, y aprendió la ciencia práctica acumulada durante siglos por estas civilizaciones. Aportó estos conocimientos, seguramente muy elaborados, al mundo griego.

Fue el primero que exigió que las afirmaciones matemáticas y de otras ciencias fueran avaladas por razonamientos bien fundamentados. Por eso, se le considera el fundador de la ciencia griega.

Muy admirado en su época y en siglos posteriores, se le dio el rango del primero de “los siete sabios de Grecia”. Esta gran admiración de la que fue objeto hizo que se le mitificara y se le atribuyeran méritos que realmente no eran suyos. Por ejemplo, la predicción de un eclipse. Y la paternidad del teorema que lleva su nombre.

Parece cierto que en Egipto midió la altura de una pirámide comparando su sombra con la que arrojaba, en el mismo instante, una vara vertical. Pero esta aplicación práctica de la semejanza no significa que diera forma al enunciado del teorema, ni mucho menos que lo demostrara.

Ambos logros, junto con una adecuada fundamentación y su desarrollo teórico de la semejanza, hay que atribuírselos a **Euclides,** dos siglos y medio posterior.



1 Semejanza

Seguramente, nunca has visto este cuadro. Sin embargo, lo conoces perfectamente por medio de sus reproducciones.

Con un plano podemos orientarnos en una ciudad. La escala nos permite, además, conocer las distancias.

Dos figuras semejantes tienen la *misma forma*. ¿Cómo se manifiesta matemáticamente esta apariencia?

— Los ángulos correspondientes en figuras semejantes son iguales.

— Las longitudes de los segmentos correspondientes en figuras semejantes son proporcionales. La razón de proporcionalidad se llama **razón de semejanza.**

Figuras semejantes en la vida corriente

Estamos rodeados de reproducciones:

— Fotografías, vídeos, películas en pantallas de distintos tamaños…

— Maquetas de monumentos o de urbanizaciones, copias de cuadros famosos, reproducciones de coches…

— Planos de edificios o de ciudades, mapas…

Las primeras pretenden, exclusivamente, transmitir unas características que se conservan con la semejanza: la imagen, la forma, el color, la belleza del original.

Con los planos y los mapas pretendemos más: queremos que además de apreciar la forma, se puedan obtener con precisión medidas, distancias. Por ello, van acompañados de una **escala** con la que se pueden obtener magnitudes de la realidad midiendo sobre su reproducción (plano o mapa).

Escala es el cociente entre cada longitud de la reproducción (mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es, por tanto, la **razón de semejanza** entre la reproducción y la realidad.

Una escala 1:200 significa, como ya sabes, que 1 cm del plano corresponde a 200 cm = 2 m de la realidad.

La expresión 1:200 puede ponerse así: $\frac{1}{200}$, con lo que se muestra la razón de semejanza entre las dos figuras.

Relación entre las áreas y entre los volúmenes

Si la razón de semejanza entre dos figuras es k, la razón entre sus áreas es k^2 y la razón entre sus volúmenes es k^3.

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

La razón entre los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.

Si una maqueta está a escala 1:200, la razón entre la superficie de una parcela y la de su representación es $200^2 = 40\,000$. Y la razón entre el volumen de un edificio y el de su representación en la maqueta es $200^3 = 8\,000\,000$.

Planos, mapas y maquetas

Vamos a aplicar lo dicho en la página anterior a estas representaciones (planos y mapas) que llevan incluida una escala con la que podemos deducir medidas en la realidad que representan.

Actividades

1 Este es el plano de una parte de una ciudad, a escala 1:10 000.

a) Justifica que 1 cm en el plano corresponde a 100 m en la realidad.

b) Amalia vive en A y Benito vive en B. Escoge un itinerario para ir de una casa a la otra y calcula la distancia que tienen que recorrer.

¿Cuánto se tarda, aproximadamente, si se recorre paseando a 3 km/h?

c) Calcula la superficie real del parque.

2 Este mapa está a escala 1:20 000 000.

a) Justifica que 1 cm en el mapa corresponde a 200 km en la realidad.

b) Halla la distancia de Lanzarote a San Sebastián.

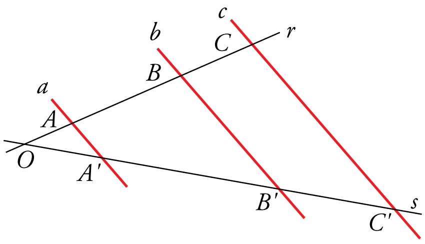
c) Sitúa tu localidad en el mapa y halla su distancia a Argel y a Marrakech.

2 Semejanza de triángulos

En las páginas anteriores hemos tratado con pares de figuras que **sabíamos de antemano que eran semejantes** y, basándonos en esa semejanza, al estudiar una de ellas obteníamos consecuencias para la otra. Así, estudiando un plano sabemos cómo es la planta del edificio o de la ciudad.

Lo que ahora nos proponemos es más difícil: **cómo averiguar si dos figuras son semejantes.** Para ello, hemos de profundizar en la semejanza de triángulos, pues cualquier figura se puede descomponer en triángulos. (Si la figura tiene lados curvos, la descomposición será solo aproximada).

Teorema de Tales



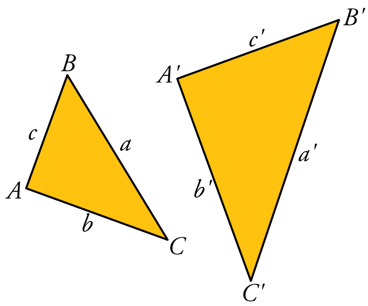
Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \qquad \text{Como consecuencia, se verifica: } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

También ocurre lo recíproco: si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son proporcionales a $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ y las rectas a y b son paralelas, entonces la recta c es paralela a ellas.

El teorema de Tales sirve para estudiar la semejanza de triángulos.

Triángulos semejantes



Dos **triángulos semejantes** tienen:

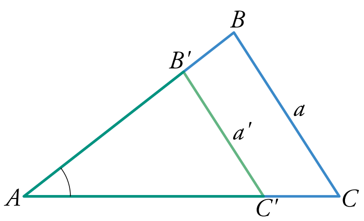
- Sus lados proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \text{razón de semejanza}$$

- Sus ángulos, respectivamente iguales:

$$\hat{A} = \hat{A}', \ \hat{B} = \hat{B}', \ \hat{C} = \hat{C}'$$

Triángulos en posición de Tales



Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está encajado en el grande.

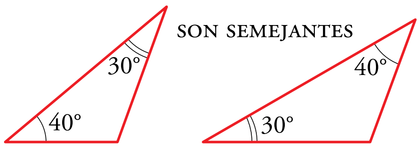
Además, los lados opuestos a $\hat{A}$ son paralelos.

Decimos que esos dos triángulos están en **posición de Tales.**

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

Criterio de semejanza de triángulos

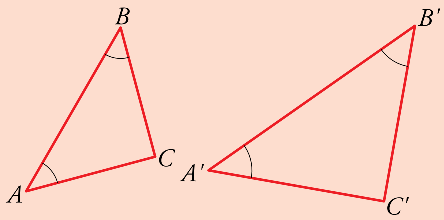
Para saber si dos triángulos son semejantes, no es necesario comprobar en ellos todas las condiciones dadas en la página anterior. Será suficiente ver que se cumplen algunas de ellas.



Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.

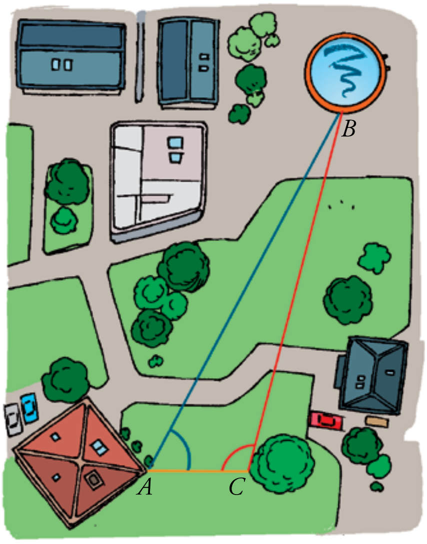
$\widehat{ABC}$ es semejante a $\widehat{A'B'C'}$ si:

$\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$



Aplicación: cálculo de la distancia a un punto inaccesible

Desde la casa de Eva, A, se ve el depósito de agua, B, de un pueblo. Eva quiere averiguar a qué distancia se encuentra. Para ello, hace lo siguiente:



- Busca un lugar, C, relativamente próximo a su casa, desde el cual se vea el depósito de agua.
- Mide los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ y la distancia $\overline{AC}$:

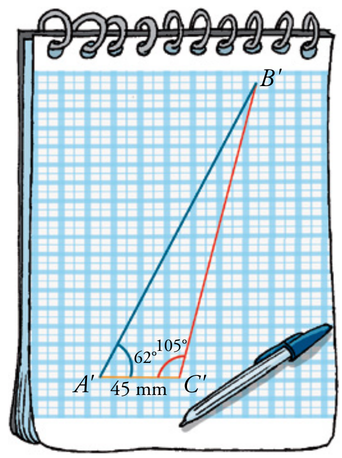
  $\overline{AC} = 45$ m $\quad \hat{A} = 62° \quad \hat{C} = 105°$

- Construye en su cuaderno un triángulo $A'B'C'$ semejante al ABC tomando:

  $\hat{A}' = \hat{A} = 62° \quad \hat{C}' = \hat{C} = 105°$

  (Por tanto, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes).

  Toma el lado $\overline{A'C'} = 45$ mm, con lo que la razón de semejanza es 1:1 000.



- Mide sobre su cuaderno, con la regla, la longitud del lado $A'B'$: $\overline{A'B'} = 193$ mm.
- Teniendo en cuenta la razón de semejanza, calcula $\overline{AB}$, que es la distancia buscada.

  Por tanto, deduce que la distancia de su casa al depósito de agua es de 193 m.

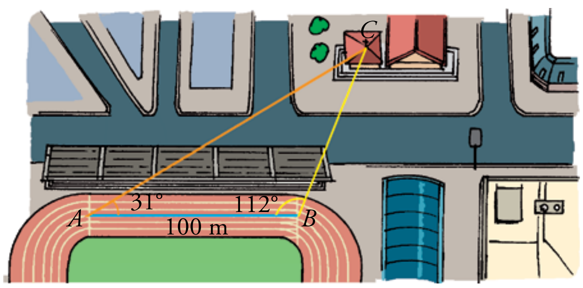
Actividades

1 Desde los extremos A y B de la recta de los 100 m de una pista de atletismo se ve la torre de una iglesia.

Medimos los ángulos $\hat{A} = 31°$ y $\hat{B} = 112°$.

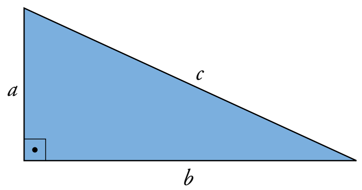
Dibuja en tu cuaderno un triángulo semejante, $A'B'C'$, con $\overline{A'B'} = 5$ cm.

Midiendo $\overline{A'C'}$, calcula la distancia real, $\overline{AC}$.



3 La semejanza en los triángulos rectángulos

Los triángulos rectángulos son particularmente importantes, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Por eso les vamos a dedicar una atención especial. Empecemos recordando algunos resultados que ya conoces.



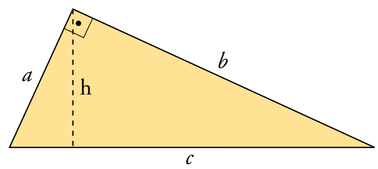
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aunque es una igualdad entre áreas, se suele utilizar para obtener la longitud de uno de los tres lados conociendo la de los otros dos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



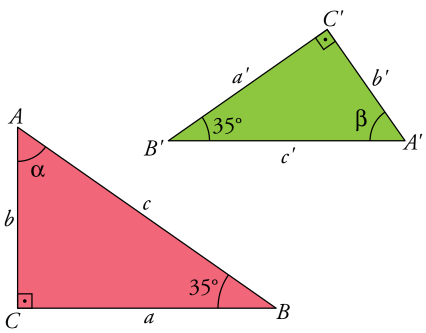
Área

Como en todo triángulo, el área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la longitud de la base por la altura. Pero aquí podemos tomar los dos catetos como base y altura. Por tanto:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} c \cdot \mathrm{h} = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Como consecuencia, podemos calcular h a partir de a, b y c.

Criterio de semejanza de triángulos rectángulos



$\alpha = \beta = 90° - 35°$; $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

> Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual uno de sus ángulos agudos.

Pues con ese ángulo y el ángulo recto ya son dos los ángulos iguales y, por tanto, también será igual el tercero.

Este criterio de semejanza es muy fácil de aplicar. Basta reconocer que dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo igual para asegurar que sus lados son proporcionales.

Por ello, los triángulos rectángulos son especialmente útiles para resolver problemas de semejanza.

Actividades

1 a) Comprueba que 3, 4 y 5 son "números pitagóricos"; es decir, que pueden ser longitudes de los lados de un triángulo rectángulo (o sea, que $5^2 = 3^2 + 4^2$).

Haz lo mismo para:

b) 0,6; 0,8 y 1 c) 5, 12 y 13 d) 7, 24 y 25

e) 8, 15 y 17 f) 1; 1,875 y 2,125

2 Calcula tanto el área como la altura sobre la hipotenusa de los seis triángulos rectángulos descritos en el ejercicio anterior.

3 Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 28°. Otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 62°. Explica por qué son semejantes.

Veamos algunos ejemplos de aplicaciones del criterio de semejanza en triángulos rectángulos.

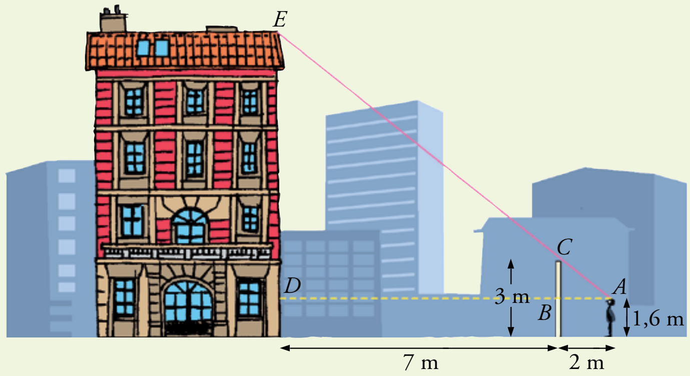
Problemas resueltos

1. Para medir la altura de un edificio, Miguel se sitúa de modo que ve alineados la parte alta de la verja y la del edificio. Señala su posición y toma las medidas que se ven en el dibujo.

a) Explicar por qué los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes.

b) Calcular *ED* y la altura del edificio.

1.



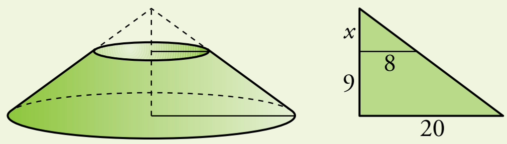
a) Los triángulos *ABC* y *ADE* son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo igual, $\hat{A}$.

b) $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \to \dfrac{\overline{ED}}{3-1{,}6} = \dfrac{2+7}{2} \to \overline{ED} = \dfrac{9 \cdot 1{,}4}{2} = 6{,}3$ m

La altura del edificio es 6,3 + 1,6 = 7,9 m.

2. Hallar el volumen de un tronco de cono de 9 cm de altura sabiendo que los radios de sus bases miden 20 cm y 8 cm.

2.



Ampliamos el tronco hasta completar un cono. Llamamos x al incremento de la altura. Tenemos en cuenta la semejanza de los dos triángulos: el pequeño, de catetos 8 y x; y el grande, de catetos 20 y $x + 9$:

$$\frac{x}{8} = \frac{x+9}{20} \to 20x = 8x + 72 \to 12x = 72 \to x = 6 \text{ cm}$$

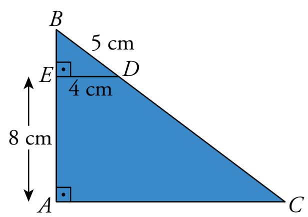
El volumen del tronco de cono es la diferencia de volúmenes de dos conos:

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot (9+6) - \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi(6\,000 - 384) = 5\,881{,}06 \text{ cm}^3$$

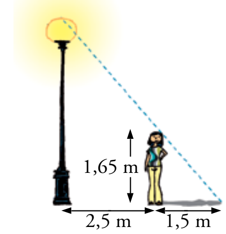
Actividades

4 Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 7,22 m en el momento en que un poste de 1,60 m da una sombra de 67 cm.

5 Halla los lados del triángulo *ABC*.

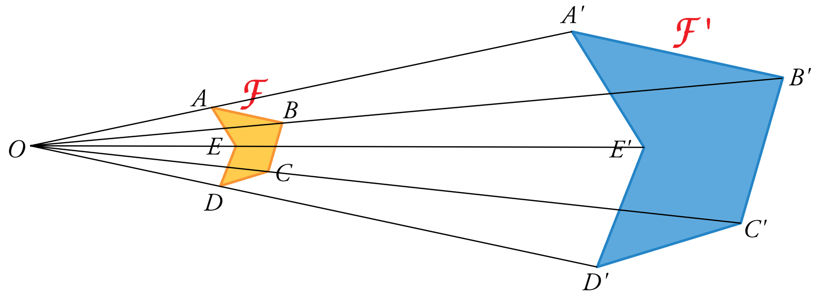


6 Si la altura de Rita es 1,65 m, ¿cuál es la altura de la farola?



7 Calcula el volumen de un tronco de cono cuya altura es 9 cm y cuyas bases tienen radios de 20 cm y 35 cm.

4 Construcción de una figura semejante a otra



Método de la proyección

Este método de construir una figura semejante a otra podría denominarse método de la proyección.

Matemáticamente, se dice que las figuras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son **homotéticas** *con razón de homotecia* 3.

El punto O se llama **centro de homotecia.**

Deseamos ampliar la figura $\mathcal{F}$ al triple de su tamaño. Para ello, tomamos un punto O cualquiera. Trazamos rectas que pasen por O y por los puntos claves de la figura $\mathcal{F}$, y obtenemos los puntos correspondientes a una distancia triple.

El punto A' está, del punto O, a triple distancia que A: $\overline{OA'} = 3 \cdot \overline{OA}$

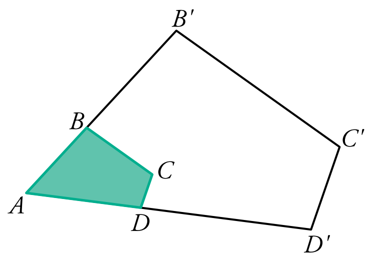
Y también: $\overline{OB'} = 3 \cdot \overline{OB}$, $\overline{OC'} = 3 \cdot \overline{OC}$, etc.

Se obtiene así la figura $\mathcal{F}'$, semejante a la $\mathcal{F}$, con razón de semejanza 3.

Es decir, los lados $A'B'$, $B'C'$, … son el triple de largos que sus correspondientes AB, BC, …, y lo mismo pasa con cualesquiera otros segmentos:

$$\overline{A'C'} = 3 \cdot \overline{AC}; \qquad \overline{E'B'} = 3 \cdot \overline{EB} \quad \ldots$$

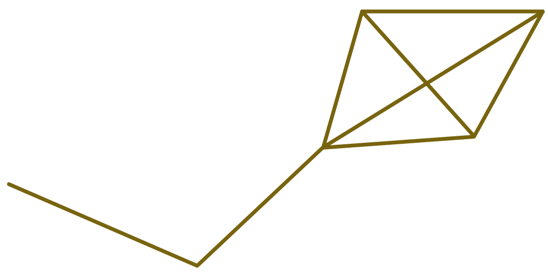
Además, los segmentos de $\mathcal{F}'$ son paralelos a sus correspondientes de $\mathcal{F}$.



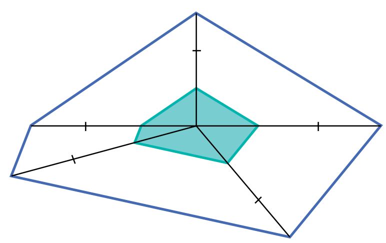
La ampliación se realiza con especial comodidad cuando tomamos como punto de proyección un vértice de la figura inicial.

Actividades

1 Dibuja en tu cuaderno una figura parecida a esta y amplíala al doble de tamaño mediante el método de la proyección.



2 Dibuja en tu cuaderno un pentágono irregular. Redúcelo a su tercera parte proyectando desde un punto interior. Vuelve a hacerlo tomando como punto de proyección uno de los vértices.



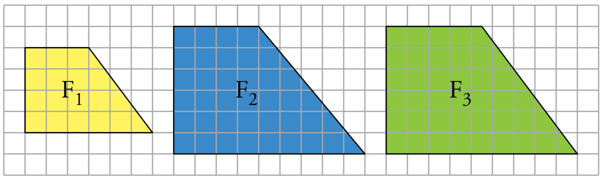
Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

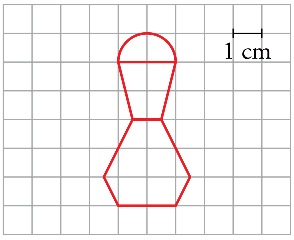
Practica

Figuras semejantes

1 ▼▽▽ ¿Cuáles de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?



2 ▼▽▽ Un joyero quiere reproducir un broche como el de la figura duplicando su tamaño.



a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

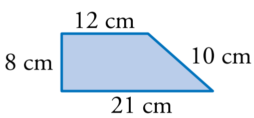
b) Calcula su superficie.

3 ▼▽▽ En un mapa de escala 1:1 500 000, la distancia entre dos poblaciones es de 2 cm.

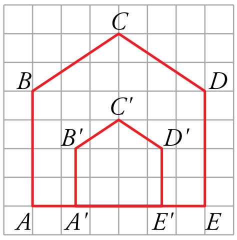
a) ¿Cuál es la distancia real?

b) ¿Qué distancia habrá en el plano entre dos ciudades que distan 180 km?

4 ▼▼▽ ¿Cuánto medirán los lados de un trapecio semejante al de la figura, cuyo perímetro sea 163,2 cm?

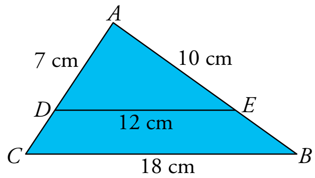


5 ▼▼▽ Halla el centro y la razón de homotecia que transforma la figura $ABCDE$ en $A'B'C'D'E'$.



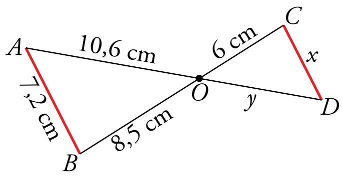
Semejanza de triángulos

6 ▼▽▽ En el triángulo ABC hemos trazado DE paralelo a CB.



¿Por qué son semejantes los triángulos ABC y ADE? Calcula $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

7 ▼▽▽ Observa esta figura, en la que el segmento AB es paralelo a CD.



a) Di por qué son semejantes los triángulos OAB y ODC.

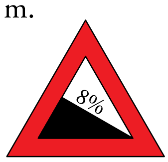
b) Calcula x e y.

8 ▼▽▽ En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante cuyo cateto menor mide 54 cm.

Aplica lo aprendido

9 ▼▼▽ Dos triángulos ABC y PQR son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m. Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

10 ▼▽▽ En una carretera de montaña, nos encontramos una señal que nos advierte que la pendiente es del 8%; es decir, por cada 100 m que recorremos, el desnivel es de 8 m.



a) ¿Cuál es el desnivel que se produce cuando recorremos 3 km?

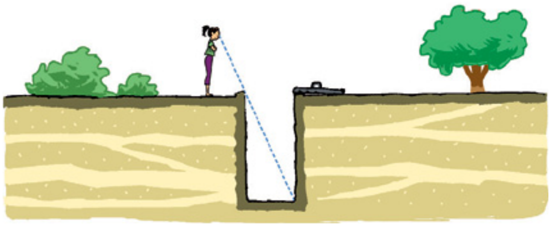
b) Para que el desnivel sea de 500 m, ¿cuántos kilómetros tendremos que recorrer?

Ejercicios y problemas

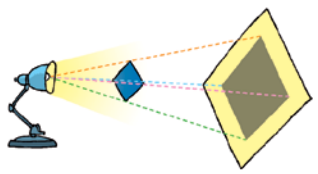
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Resuelve problemas

11 ▼▼▼ ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

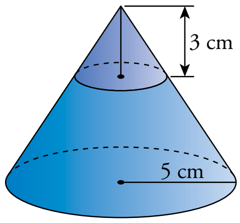


12 ▼▼▽ Una lámpara situada a 25 cm de una lámina cuadrada de 20 cm de lado, proyecta una sombra sobre una pantalla paralela que está a 1,5 m de la lámpara.



¿Cuánto mide el lado del cuadrado proyectado?

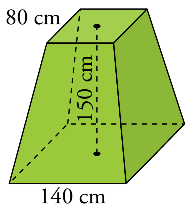
13 ▼▼▽ Para hacer un embudo de boca ancha, hemos cortado un cono de 5 cm de radio a 3 cm del vértice.



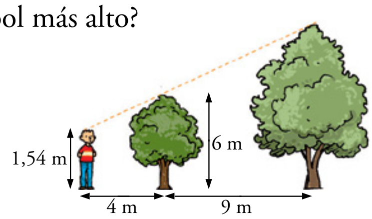
La circunferencia obtenida tiene 2 cm de radio.

Halla el volumen del embudo.

14 ▼▼▽ La base de una escultura tiene forma de tronco de pirámide cuadrangular regular en el que los lados de las bases miden 80 cm y 140 cm, y su altura, 150 cm. Halla su volumen.



15 ▼▼▽ Si la altura de Luis es 1,54 m, ¿cuál es la altura del árbol más alto?



Autoevaluación

¿Manejas la semejanza de figuras para obtener medidas de una a partir de la otra?

1 Alberto tiene una fotografía en la que aparece con su amigo Iván. En esta foto, Alberto mide 8 cm e Iván 7,5 cm. Si la altura real de Alberto es de 1,76 m, ¿cuál es la altura real de Iván?

¿Conoces las condiciones que se deben comprobar para asegurar que dos triángulos son semejantes?

2 Comprueba si son semejantes dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen las condiciones siguientes:

a) $\overline{AB} = 10$; $\overline{BC} = 18$; $\overline{CA} = 12$

$\overline{A'B'} = 25$; $\overline{B'C'} = 45$; $\overline{C'A'} = 30$

b) $\overline{AB} = 20$; $\overline{BC} = 30$; $\overline{CA} = 40$

$\overline{A'B'} = 40$; $\overline{B'C'} = 50$; $\overline{C'A'} = 60$

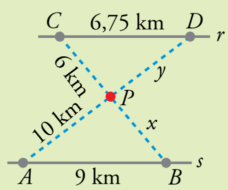
c) $\hat{A} = 58°$; $\hat{B} = 97°$

$\hat{A}' = 58°$; $\hat{C}' = 35°$

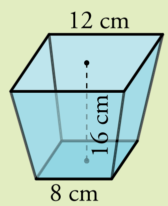
¿Utilizas con soltura la semejanza para resolver problemas?

3 Álvaro debe situarse a 3 m de un charco para ver la copa de un árbol reflejada en él. Si la distancia del charco al árbol es de 10,5 m y la estatura de Álvaro es de 1,72 m, ¿cuál es la altura del árbol?

4 Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.



5 Un florero tiene forma de tronco de pirámide de bases cuadradas de 8 cm y 12 cm de lado, y altura 16 cm. Calcula su volumen.



12 Geometría analítica

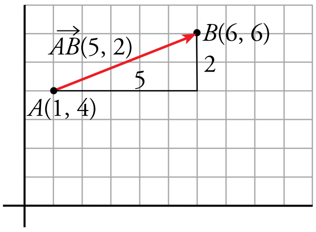
Con la invención de la Geometría Analítica se pone de manifiesto, una vez más, que las grandes creaciones humanas son fruto de una época, de un momento histórico cuyas circunstancias lo propician. Solo falta el personaje genial que lo lleve a efecto. En este caso fueron dos franceses, Descartes y Fermat, quienes la desarrollaron independiente y casi simultáneamente.

René Descartes (1596-1650), filósofo y matemático, en su obra *El discurso del Método* incluyó una parte final llamada "Geometría" en la que se detalla cómo se aplica el álgebra a la resolución de algunos problemas geométricos con la ayuda de un sistema de coordenadas. *Coordenadas cartesianas* se llamaron, pues en aquella época los textos científicos se escribían en latín y Descartes latinizó su nombre: *Cartesius*.

Pierre de Fermat (1601-1655), abogado, político y matemático por afición, desarrolló un sistema similar al de Descartes: aplicó los métodos algebraicos al tratamiento de figuras geométricas representadas en unos ejes de coordenadas rectangulares. Esto lo describió en 1636, un año antes que Descartes, pero no fue publicado hasta después de su muerte, por lo que su obra no ejerció tanta influencia como la de aquel. Por eso es frecuente atribuir solo a Descartes la invención de la Geometría Analítica, olvidando la contribución de Fermat que, incluso, llegó un poco antes.

La utilización de los vectores en la geometría (los físicos ya los usaban hacía tiempo) llegó en el siglo XIX por medio de **Gauss, Möbius** y **Bellavilis.**

1 Vectores en el plano



En un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante sus coordenadas: $A(1, 4)$, $B(6, 6)$.

La flecha que va de A a B se llama **vector** y se representa por $\overrightarrow{AB}$. Es el vector de **origen** A y **extremo** B.

Al vector $\overrightarrow{AB}$ podríamos describirlo así: desde A avanzamos 5 unidades en el sentido de las X y subimos dos unidades en el sentido de las Y.

Eso se dice más brevemente así: las **coordenadas** de $\overrightarrow{AB}$ son (5, 2).

O, mejor, así .... $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$.

O, simplemente, así .... $\overrightarrow{AB}(5, 2)$.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo:

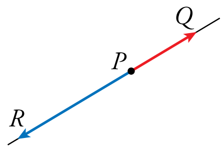
$$B(6, 6),\ A(1, 4) \quad \overrightarrow{AB} = (6, 6) - (1, 4) = (5, 2)$$

Módulo de un vector, $\overrightarrow{AB}$, es la distancia de A a B. Se designa así: $|\overrightarrow{AB}|$. Si las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ son (x, y), entonces $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección de un vector es la de la recta en la que se encuentra y la de todas sus paralelas.

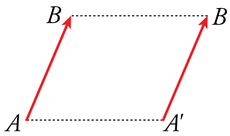
Cada dirección admite dos **sentidos** opuestos.

Por ejemplo, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son vectores de sentidos opuestos.



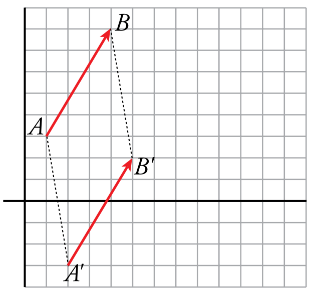
Igualdad de vectores

Dos vectores iguales $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ situados en rectas distintas (y, por tanto, paralelas) determinan un paralelogramo $ABB'A'$.



Dos **vectores** son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. En tal caso, tienen las mismas coordenadas.

Ejercicio resuelto



$A(1, 3)$, $B(4, 8)$, $A'(2, -3)$, $B'(5, 2)$. Comprobar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{A'B'}$ son iguales.

Representándolos, observamos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Pero también podemos comprobarlo mediante sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Coordenadas de } \overrightarrow{AB}: (4, 8) - (1, 3) = (3, 5) & \overrightarrow{AB}(3, 5) \\ \text{Coordenadas de } \overrightarrow{A'B'}: (5, 2) - (2, -3) = (3, 5) & \overrightarrow{A'B'}(3, 5) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

Actividades

1 Representa los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, siendo $A(1, 1)$, $B(-2, 7)$, $C(6, 0)$, $D(3, 6)$ y observa que son iguales. Comprueba que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ hallando sus coordenadas. Calcula su módulo.

2 Tenemos tres puntos de coordenadas:

$$A(3, -1),\ B(4, 6),\ C(0, 0)$$

Halla las coordenadas del punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean iguales.

2 Operaciones con vectores

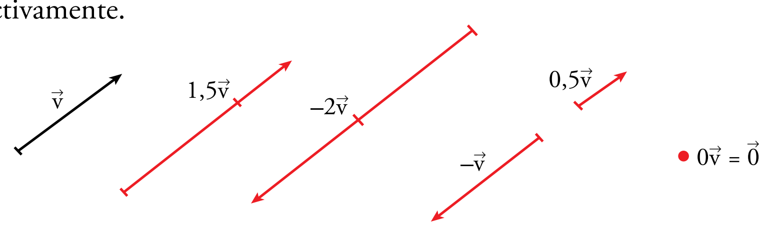
Notación

Los vectores se designan también mediante una letra minúscula con una flechita encima. Para ello, se suelen utilizar las letras $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, y, si se necesitan más, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: $|k\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$ (producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k).
- Dirección: la misma que $\vec{v}$.
- Sentido: el mismo que el de $\vec{v}$ o su opuesto, según k sea positivo o negativo, respectivamente.

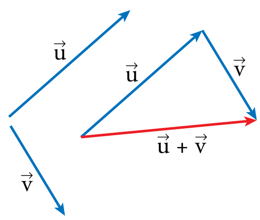


El producto $0\vec{v}$ es igual al **vector cero,** $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero. Carece de dirección. El vector $-1\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$.

Las **coordenadas** del vector $k\vec{v}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{v}$. Las coordenadas de $\vec{0}$ son (0, 0). Las coordenadas de $-\vec{v}$ son las opuestas de las coordenadas de $\vec{v}$.

Suma y resta de vectores

- Para **sumar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se procede del siguiente modo: se sitúa $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, de manera que el origen de $\vec{v}$ coincida con el extremo de $\vec{u}$. La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector cuyo origen es el de $\vec{u}$ y extremo el de $\vec{v}$.



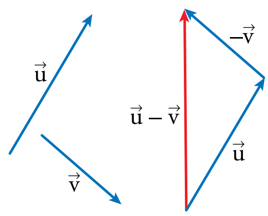
  Las **coordenadas** del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de $\vec{u}$ con las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

  $\vec{u}(7, -3)$, $\vec{v}(4, 5)$ $\rightarrow$ $\vec{u} + \vec{v} = (7 + 4, -3 + 5) = (11, 2)$

- Para **restar** dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se le suma a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

  Las **coordenadas** del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restándole a las coordenadas de $\vec{u}$ las de $\vec{v}$. Por ejemplo:

  $\vec{u}(7, -3)$, $\vec{v}(4, 5)$ $\rightarrow$ $\vec{u} - \vec{v} = (7 - 4, -3 - 5) = (3, -8)$



Entrénate

Dados $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(2, -1)$, calcular:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $2\vec{u}$ d) $3\vec{v}$

e) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ f) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

Actividades

1 a) Representa los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, siendo $A(1, 3)$, $B(4, 5)$, $C(6, -2)$. Halla sus coordenadas.

b) Representa $\vec{u} + \vec{v}$ y halla sus coordenadas.

c) Representa $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ y $0\vec{v}$ y halla sus coordenadas.

d) Representa y halla las coordenadas del vector $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

2 Representa y halla las coordenadas de los vectores $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{p} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{q} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ siendo $\vec{u}(3, -1)$ y $\vec{v}(-4, 2)$.

3 Punto medio de un segmento. Distancia entre dos puntos

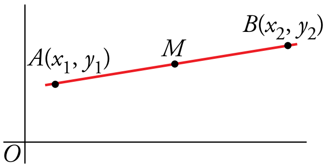
Punto simétrico

Si M es el punto medio de $\overline{AB}$, se dice que B es el **simétrico** de A respecto de M.

Entrénate

Calcula el punto medio, M, del segmento PQ, siendo $P(3, -5)$ y $Q(1, -1)$.

Punto medio de un segmento



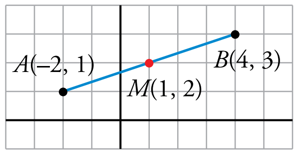
Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio, M, del segmento AB son:

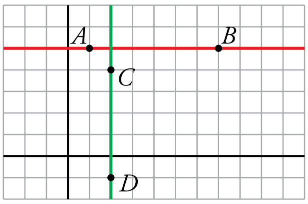
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

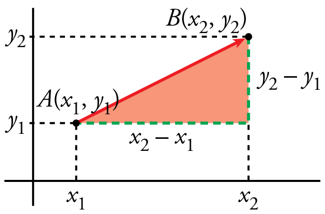
Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$ es:

$$M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) = (1, 2)$$







Distancia entre dos puntos

Si dos puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada, hallar su distancia es muy fácil. Por ejemplo, en el gráfico:

$dist(A, B) = 6$; $dist(C, D) = 5$ (basta con contar cuadritos)

O bien, mediante sus coordenadas:

$$dist[(3, -1), (3, 11)] = 11 - (-1) = 12$$

$$dist[(4, 7), (1, 7)] = 4 - 1 = 3$$

Para dos puntos cualesquiera, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, su distancia se obtiene hallando el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula también es válida si los puntos tienen la misma abscisa o la misma ordenada. Por ejemplo, la distancia entre los puntos $A(-2, 2)$ y $B(1, 6)$ es:

$$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 + 2)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Entrénate

Calcula la distancia entre los puntos $P(3, -5)$ y $Q(1, -1)$.

Actividades

1 Halla las coordenadas del punto medio de los siguientes segmentos:

a) $A(-2, 5)$, $B(4, 1)$

b) $P(7, -3)$, $Q(-5, 1)$

c) $R(1, 4)$, $S(7, 2)$

d) $A(-3, 5)$, $B(4, 0)$

2 Halla la distancia entre A y B.

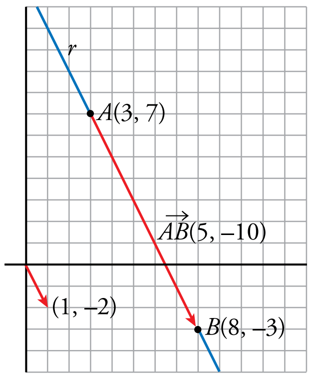
a) $A(-7, 4)$, $B(6, 4)$ b) $A(3, 4)$, $B(3, 9)$

c) $A(-5, 11)$, $B(0, -1)$ d) $A(4, -6)$, $B(7, 4)$

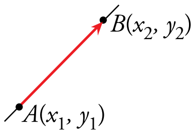
3 Si los vértices de un triángulo isósceles son los puntos $A(-4, 3)$, $B(4, -3)$ y $C(6, 8)$, calcula:

a) La altura sobre el lado AB. b) El área.

4 Ecuaciones de rectas. Paralelismo y perpendicularidad



Una recta queda determinada por dos puntos. A partir de ellos, como ya sabemos, se obtiene la pendiente, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y, con ellos, la ecuación de la recta: $y = y_1 + m(x - x_1)$



El vector $\vec{AB}$ que une los dos puntos se llama **vector dirección** de la recta.

Por ejemplo, la recta r que pasa por $A(3, 7)$ y $B(8, -3)$ tiene como vector dirección a $\vec{AB}(5, -10)$ o cualquier otro vector paralelo a él, como el $(1, -2)$. La pendiente de esta recta es: $m = \dfrac{-3-7}{8-3} = \dfrac{-10}{5} = -2$

Su ecuación es: $y = 7 - 2(x - 3)$; es decir, $y = -2x + 13$

Recuerda

La pendiente de una recta dada por su ecuación es el coeficiente de la x cuando la y está despejada.

Vector dirección de una recta es cualquier vector paralelo a ella. Si A y B son puntos de la recta, $\vec{AB}$ es un vector dirección de ella.

Si $\vec{d}(a, b)$ es un vector dirección de r, su pendiente es: $m = \dfrac{b}{a}$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 3)$ y $B(6, 7)$.

1. Un vector dirección es $\vec{AB}(8, 4)$. Otro vector dirección: $\vec{d}(2, 1)$

Pendiente: $m = \dfrac{1}{2}$. Ecuación: $y = 3 + \dfrac{1}{2}(x + 2) \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 4$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(5, -3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}(3, 2)$.

2. Su pendiente es: $m = \dfrac{2}{3}$

Su ecuación es: $y = -3 + \dfrac{2}{3}(x - 5)$

3. Hallar la ecuación de la recta paralela a r: $2x + 5y - 4 = 0$ que pasa por:

a) (0, 0) **b) (4, –3)**

3. Puesto que la rectas que nos piden son paralelas a r (tienen su misma pendiente), empezamos hallando la pendiente de r. Para ello, despejamos la y y nos fijamos en el coeficiente de la x:

$2x + 5y - 4 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{4}{5}$ Pendiente: $m = -\dfrac{2}{5}$

a) Pasa por (0, 0) y su pendiente es $-\dfrac{2}{5} \rightarrow y = -\dfrac{2}{5}x$.

b) Pasa por (4, –3) y su pendiente es $-\dfrac{2}{5} \rightarrow y = -3 - \dfrac{2}{5}(x - 4)$.

Actividades

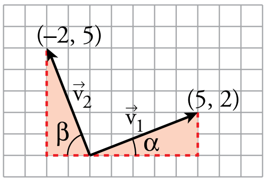
1 Halla la ecuación de la recta que pasa por:

a) $A(1, 3)$, $B(5, 5)$ b) $A(1, 6)$, $B(8, -2)$

2 Halla la ecuación de la recta que pasa por $(7, -5)$ y tiene por vector dirección $(7, -4)$.

3 Halla la recta paralela a $5x - 6y + 14 = 0$ que pasa por $(0, -3)$.

4 Halla la recta paralela a $5y - 10 = 0$ que pasa por $(2, 4)$.



Vector perpendicular a otro

Los vectores $\vec{v}_1(5, 2)$ y $\vec{v}_2(-2, 5)$ son perpendiculares. Se justifica observando, en la gráfica del margen, que los dos triángulos sombreados son iguales y, por tanto, $\alpha + \beta = 90°$. En general:

Los vectores de coordenadas (a, b) y $(-b, a)$ son perpendiculares.

Recta perpendicular a otra

Un vector dirección de una recta r_1 es $\vec{d}_1 = (a, b)$.

Si r_2 es perpendicular a r_1, un vector dirección de r_2 es $\vec{d}_2 = (-b, a)$.

Las pendientes de r_1 y r_2 son, respectivamente, $m_1 = \dfrac{b}{a}$ y $m_2 = \dfrac{-a}{b}$.

El producto de sus pendientes es -1: $m_1 \cdot m_2 = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{-a}{b} = -1$

Las pendientes, m_1 y m_2, de dos rectas perpendiculares se relacionan así:

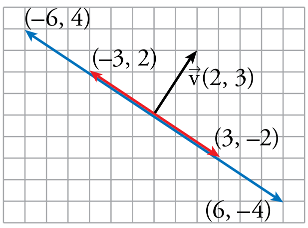
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejercicios resueltos

1. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $A(4, 7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(3, -5)$.

El vector $\vec{d}(5, 3)$ es perpendicular a $\vec{v}$ y, por tanto, es un vector dirección de r. La pendiente de r es $m = \dfrac{3}{5}$. Su ecuación es:

$$y = 7 + \frac{3}{5}(x - 4) \;\rightarrow\; y = \frac{3}{5}x + \frac{23}{5}$$



2. Obtener varios vectores perpendiculares a $\vec{v}(2, 3)$.

(–3, 2) es perpendicular a $\vec{v}$. También lo son (3, –2), (–6, 4), (6, –4)...

3. Dar la ecuación de la recta r, perpendicular a s: $5x - 3y + 15 = 0$, que pasa por (–7, 2).

Pendiente de s: $y = \dfrac{5}{3}x + 5 \;\rightarrow\; m_1 = \dfrac{5}{3}$

Pendiente de r: $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{3}{5}$

Ecuación de r: $y = 2 - \dfrac{3}{5}(x + 7) \;\rightarrow\; y = -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{11}{5}$

Actividades

5 Da tres vectores perpendiculares a (–6, 1).

6 Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(2, -5)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(5, 7)$.

7 La recta r pasa por (3, 0), y la recta s, por (–5, 3). Ambas son perpendiculares a $4x + 2y - 7 = 0$.

Halla sus ecuaciones.

Ejercicios y problemas

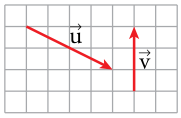
Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Vectores y puntos

1 ▼▽▽ Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, $\vec{AC}$ y $\vec{BD}$.

2 ▼▽▽ a) Di cuáles son las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



b) Dibuja los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ y di cuáles son sus coordenadas.

Rectas

3 ▼▽▽ Escribe la ecuación de las siguientes rectas:

a) Pasa por $(-4, 2)$ y su pendiente es $\frac{1}{2}$.

b) Pasa por $(5, -1)$ y su pendiente es 0.

4 ▼▽▽ Da, en cada caso, un vector dirección, la pendiente y la ecuación de la recta que pasa por A y B:

a) $A(-1, 0)$, $B(0, 3)$

b) $A(-2, 3)$, $B(4, -1)$

5 ▼▽▽ Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(-4, 3)$ y tiene por vector dirección $\vec{d}$:

a) $\vec{d}(2, -1)$ b) $\vec{d}(-1, -3)$ c) $\vec{d}(2, 0)$

6 ▼▽▽ Halla la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $y = -2x + 3$ y pasa por $(4, 5)$.

b) Paralela a $2x - 4y + 3 = 0$ y pasa por $(4, 0)$.

7 ▼▽▽ Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por $P(3, -2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

a) $\vec{v}(2, 1)$ b) $\vec{v}(-5, 4)$ c) $\vec{v}(-1, 0)$

8 ▼▽▽ Escribe la ecuación de la recta perpendicular a r y que pasa por el punto P en los siguientes casos:

a) $r: y = -2x + 3$; $P(-3, 2)$

b) $r: x = 3$; $P(0, 4)$

Distancias

9 ▼▽▽ Calcula la distancia entre P y Q:

a) $P(3, 5)$, $Q(3, -7)$ b) $P(-8, 3)$, $Q(-6, 1)$

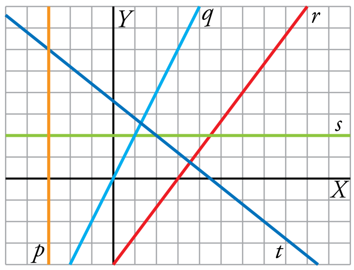
c) $P(0, -3)$, $Q(-5, 1)$ d) $P(-3, 0)$, $Q(15, 0)$

10 ▼▽▽ Comprueba que el triángulo de vértices $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(7, 4)$ es isósceles. ¿Cuáles son los lados iguales?

11 ▼▽▽ Dibuja el cuadrilátero de vértices $A(-4, 0)$, $B(2, 9/2)$, $C(4, -1)$, $D(-4, -6)$ y halla su perímetro.

Aplica lo aprendido

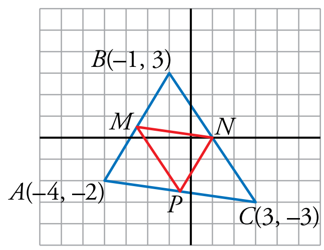
12 ▼▽▽ Escribe la ecuación de las rectas p, q, r, s y t.



13 ▼▽▽ a) Representa los vectores $\vec{u} = 2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ y $\vec{v} = -\vec{x} + 4\vec{y} - 2\vec{z}$ siendo $\vec{x}(2, 2)$, $\vec{y}(3, 0)$ y $\vec{z}(1, -2)$.

b) Halla las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Son iguales?

14 ▼▽▽ a) Determina las coordenadas de los puntos M, N y P que son los puntos medios de los lados del triángulo ABC.



b) Halla las coordenadas de los vectores $\vec{MN}$, $\vec{MP}$ y $\vec{PN}$ y comprueba que $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$; $\vec{MP} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ y $\vec{PN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

15 ▼▽▽ Escribe la ecuación de una recta perpendicular a r y que pase por $(4, -3)$ en estos casos:

a) $r: 2x + 7 = 0$ b) $r: -y + 4 = 0$

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

16 ▼▽▽ ¿Son r y s paralelas o perpendiculares?

r: $3x - 5y + 15 = 0$ $\quad s$: pasa por $(-2, -3)$ y $(8, 3)$

17 ▼▼▽ Halla la ecuación de la recta perpendicular a AB en su punto medio, siendo $A(-5, 3)$ y $B(2, 7)$.

18 ▼▽▽ Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(1, 5)$, $B(5, 1)$, $C(-4, -3)$ y $D(-8, 1)$ es un paralelogramo. Para ello, prueba que los puntos medios de sus diagonales coinciden.

19 ▼▼▽ Comprueba que el triángulo de vértices $A(4, 4)$, $B(-2, 3)$ y $C(3, -2)$ es isósceles y calcula su área.

☞ *Una altura corta al lado desigual en su punto medio.*

20 ▼▽▽ La recta r es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$, y la recta s es perpendicular a ellas. Ambas pasan por el punto $(1, 3)$. Escribe las ecuaciones de r y s.

Resuelve problemas

21 ▼▼▽ Dibuja un paralelogramo que tenga dos de sus lados sobre las rectas $y = 3x$ e $y = 0$ y un vértice en el punto $P(6, 3)$.

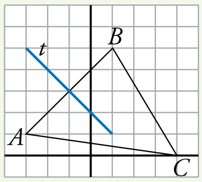
a) Halla las ecuaciones de los otros dos lados.

b) Di cuáles son las coordenadas de los otros vértices.

22 ▼▼▽ Halla las coordenadas del punto D, de modo que $ABCD$ sea un paralelogramo, siendo $A(1, -1)$, $B(0, 2)$ y $C(6, 5)$.

23 ▼▼▽ Ejercicio resuelto

En el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(1, 5)$ y $C(4, 0)$, hallar la ecuación de la mediatriz t del lado AB.



La mediatriz t es perpendicular a AB en su punto medio.

Punto medio de AB: $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{1+5}{2}\right) = (-1, 3)$

Pendiente de AB: $m = \dfrac{5-1}{1+3} = 1$

Pendiente de t: $m' = -1$

t: $y = 3 - 1(x + 1) \rightarrow x + y - 2 = 0$

24 ▼▼▽ En el triángulo de vértices $A(-1, 1)$, $B(3, 4)$, y $C(3, 0)$, halla:

a) La ecuación de la mediatriz de BC.

b) La ecuación de la mediatriz de AC.

25 ▼▼▽ Dado el triángulo de vértices $A(-5, 4)$, $B(4, 1)$, $C(-1, -2)$, halla:

a) El punto medio del lado AC.

b) La ecuación de la mediana del vértice B.

Autoevaluación

¿Dominas la operativa con vectores?

1 Dados los vectores $\vec{u}(2, -3)$ y $\vec{v}(-1, 4)$, calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ $\quad$ b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $3\vec{u}$ $\quad$ d) $2\vec{v}$

e) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ $\quad$ f) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

¿Sabes hallar el punto medio y la distancia entre dos puntos, a partir de sus coordenadas?

2 Calcula el punto medio, M, del segmento PQ, siendo $P(-5, 1)$, $Q(3, -7)$.

3 Calcula la distancia entre los puntos $P(-3, -6)$, $Q(5, 9)$.

¿Obtienes con soltura la ecuación de una recta dada de diferentes formas? ¿Reconoces, sin representarlas, si dos rectas son paralelas o perpendiculares?

4 Dados los puntos $A(2, 1)$ y $B(5, 3)$, obtén:

a) El vector dirección de la recta que pasa por A y B.

b) La ecuación de dicha recta.

5 Obtén la ecuación de la recta paralela a $y = 2x - 3$ por el punto $(0, 2)$.

6 Determina la ecuación de la recta perpendicular a $y = 1 + \dfrac{2}{3}(x - 2)$ por el punto $(2, 1)$.

13 Estadística

En el desarrollo histórico de la Estadística se pueden distinguir tres grandes etapas.

Censos. Desde la Antigüedad y hasta el siglo XVI. Solo se realizan recogidas de datos y, a lo sumo, una exposición ordenada y clara de estos.

Análisis de datos. Abarca los siglos XVII, XVIII y XIX. Se supera lo meramente descriptivo y los datos pasan a ser analizados científicamente con el fin de extraer conclusiones.

Se suele considerar que esta etapa comienza con los trabajos de **John Graunt** (s. XVII), quien utilizó archivos parroquiales para realizar un profundo estudio de los nacimientos y las defunciones en Londres durante 30 años: anotó el sexo de cada nacido, las enfermedades de los fallecidos y otras muchas variables. Con ello pudo extraer conclusiones válidas para el futuro e inauguró, así, la Estadística Demográfica.

Algo más tarde, el profesor **Neumann** (s. XVII) comenzó a utilizar métodos con los que elaboró estadísticas muy minuciosas y así, por ejemplo, consiguió demostrar la falsedad de la creencia popular de que en los años terminados en 7 morían más personas. Sus métodos sirvieron de base para elaborar las tablas de mortalidad utilizadas por las compañías de seguros.

También es destacable el trabajo de **Quételet** (s. XIX), el primero en aplicar la estadística a las Ciencias Sociales, para lo que se valió de la probabilidad.

Estadística inferencial. Se inicia a finales del XIX. La esencia de esta rama de la Estadística es que a partir de una muestra se extraen conclusiones válidas para toda una población. Para ello, se echa mano de la alta matemática. Son figuras destacadas en este campo **Ronald Fisher** y **Karl Pearson.**


1 Dos ramas de la estadística

Recuerda

Población. Es el conjunto de todos los elementos cuyo conocimiento nos interesa y que serán objeto de nuestro estudio.

Muestra es un subconjunto extraído de la población, cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población.

Individuo es cada uno de los elementos que forman la población o la muestra.

Caracteres son los aspectos que deseamos estudiar en los individuos de una población. Cada carácter puede tomar distintos valores o modalidades.

Una **variable estadística** recorre todos los valores de un cierto carácter.

Las variables estadísticas pueden ser:

Cuantitativas si toman valores numéricos.

- **discretas:** solo toman valores aislados.
- **continuas:** pueden tomar cualquier valor de un intervalo.

Cualitativas si toman valores no numéricos.

La estadística tiene por objeto el desarrollo de técnicas para el conocimiento numérico de un conjunto de datos empíricos (recogidos mediante experimentos o encuestas). Según el colectivo a partir del cual se obtenga la información y el objetivo que se persiga a la hora de analizar esos datos, la estadística se llama descriptiva o inferencial.

Estadística descriptiva

La **estadística descriptiva** trata de describir y analizar algunos caracteres de los individuos de un grupo dado (población) sin extraer conclusiones para un grupo mayor.

Para este estudio, se dan los siguientes pasos:

1. Selección de los caracteres que interesa estudiar.
2. Análisis de cada carácter: diseño y realización de una encuesta o de un experimento y recogida de datos.
3. Clasificación y organización de los resultados en tablas de frecuencias.
4. Elaboración de gráficos, si conviene para divulgarlos a un público amplio (no expertos).
5. Obtención de **parámetros:** valores numéricos que resumen la información obtenida.

▼ **EJEMPLO**

Supongamos que por orden del rector, un funcionario de una universidad organiza, tabula, representa gráficamente y obtiene parámetros de algunos caracteres de todos los alumnos (por ejemplo: edades, resultados académicos) para compararlos con estudios similares hechos en años anteriores. Este estudio es **estadística descriptiva,** pues se realiza sobre la totalidad de la población.

Estadística inferencial

La **estadística inferencial** trabaja con muestras y pretende, a partir de ellas, "inferir" características de toda la población. Es decir, se pretende tomar como generales propiedades que solo se han verificado para casos particulares. En ese proceso hay que operar con mucha cautela: ¿Cómo se elige la muestra? ¿Qué grado de confianza se puede tener en el resultado obtenido?

Se estudia el corportamiento de una variable en una MUESTRA.

⬇

Se INFIERE el comportamiento de esa variable en la POBLACIÓN.

▼ **EJEMPLO**

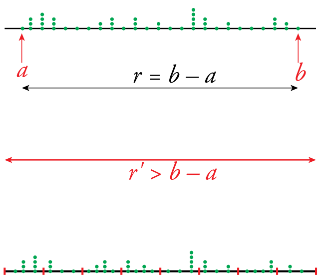
Una editorial realiza una encuesta a 387 alumnos de una universidad sobre sus preferencias en la lectura, con el fin de extraer consecuencias válidas para todos los universitarios. Esto es **estadística inferencial,** pues, a partir de una muestra, se desea obtener información sobre algún aspecto de la población.

2 Tablas de frecuencias

Tras la recogida de datos, la elaboración de una tabla de frecuencias es el siguiente paso. Cuando la variable toma pocos valores, la elaboración de la tabla es sumamente sencilla. No hay más que hacer el recuento de los resultados.

Tabla con datos agrupados

Cuando en una distribución estadística el número de valores que toma la variable es muy grande, conviene elaborar una tabla de frecuencias agrupándolos en intervalos. Para ello:



1. Se localizan los valores extremos, a y b, y se halla su diferencia, $r = b - a$ (recorrido).
2. Se decide el número de intervalos que se quiere formar, teniendo en cuenta la cantidad de datos que se poseen. El número de intervalos no debe ser inferior a 6 ni superior a 15.
3. Se toma un intervalo, r', de longitud algo mayor que el recorrido r y que sea múltiplo del número de intervalos, con objeto de que estos tengan una longitud entera.
4. Se forman los intervalos, de modo que el extremo inferior del primero sea algo menor que a y el extremo superior del último sea algo mayor que b. Es deseable que los extremos de los intervalos no coincidan con ninguno de los datos. Para ello, conviene que los extremos de los intervalos tengan una cifra decimal más que los datos.

El punto medio de cada intervalo se llama **marca de clase.** Es el valor que representa a todo el intervalo para el cálculo de algunos parámetros.

No lo olvides

Cuando se elabora una tabla con datos agrupados, se pierde algo de información (pues en ella se ignora cada valor concreto, que se difumina dentro de un intervalo). A cambio, se gana en claridad y eficacia.

Ejercicio resuelto

Elaborar una tabla de frecuencias con las estaturas de 40 adolescentes:

168	160	167	175	175
167	168	158	149	160
178	166	158	163	171
162	165	163	156	174
160	165	154	163	165
161	162	166	163	159
170	165	150	167	164
165	173	164	169	170

1. Valores extremos: $a = 149$, $b = 178$. Recorrido: $r = 178 - 149 = 29$.
2. Tomaremos solo 6 intervalos. Un múltiplo de 6 mayor que 29 y próximo a él es 30. Longitud de cada intervalo: 5.
3. Formamos los intervalos comenzando por un número algo menor que $a = 149$ y terminando en un número algo mayor que $b = 178$.
4. Repartimos los datos en los intervalos:

INTERVALOS	148,5-153,5	153,5-158,5	158,5-163,5	163,5-168,5	168,5-173,5	173,5-178,5
M. DE CLASE	151	156	161	166	171	176
FRECUENCIAS	2	4	11	14	5	4

Actividades

1 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 10 intervalos con el mismo recorrido total.

2 Reparte los cuarenta datos del ejercicio resuelto anterior en 8 intervalos. Para ello, toma $r' = 32$.

3 Parámetros estadísticos: $\bar{x}$ y σ

x_i	f_i
x_1	f_1
x_2	f_2
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n

La tabla de frecuencias de la izquierda **puede corresponder** a:

- Una distribución de datos aislados que toma los valores x_1, x_2, … x_n.
- Una distribución de datos agrupados en intervalos, de los cuales x_1, x_2, … x_n son las marcas de clase.

En el primer caso, la tabla refleja exactamente la distribución real. En el segundo, la tabla es una buena aproximación a la realidad.

Recordemos cómo se obtienen los **parámetros** a partir de una tabla:

PUNTUACIONES EN UN TEST

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	12	0
1	31	31
2	86	172
3	92	276
4	48	192
5	19	95
	288	766

Media: $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

$\Sigma f_i x_i \to$ suma de todos los datos

$\Sigma f_i = N \to$ n.° total de individuos

Por ejemplo, en la distribución que tenemos en el margen:

$\Sigma f_i = 288$. Hay 288 individuos (que han realizado el test).

$\Sigma f_i x_i = 766$. Es la suma de las puntuaciones de todos los individuos.

La media es $\bar{x} = 766/288 = 2{,}66$.

Varianza: $Var = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ o bien $Var = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

Las dos expresiones coinciden.

— En la primera de ellas, se ve claro el significado de la varianza: promedio de los cuadrados de las desviaciones a la media.

— La segunda es más cómoda para los cálculos, como se puede apreciar en el ejemplo (tabla del margen):

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
0	12	0	0
1	31	31	31
2	86	172	344
3	92	276	828
4	48	192	768
5	19	95	475
	288	766	2446

$$Var = \frac{2\,446}{288} - 2{,}66^2 = 1{,}42$$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{varianza}$

La desviación típica es un parámetro más razonable que la varianza, pues se expresa en la misma magnitud que los datos y que la media (por ejemplo, si los datos vienen en centímetros, la desviación típica viene en centímetros; sin embargo, la varianza se daría en centímetros cuadrados).

En el ejemplo: $\sigma = \sqrt{1{,}42} = 1{,}19$

Coeficiente de variación: $C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

El coeficiente de variación sirve para comparar las dispersiones de población heterogéneas, pues indica la *variación relativa*.

En el ejemplo: $C.V. = \frac{1{,}19}{2{,}66} = 0{,}447$. O bien 44,7%.

Ejercicio resuelto

Calcular $\bar{x}$, σ y C.V. en la siguiente distribución:

DISTRIBUCIÓN DE PESOS (EN kg)	
INTERVALOS	FRECUENCIAS
42,5-53,5	4
53,5-64,5	19
64,5-75,5	86
75,5-86,5	72
86,5-97,5	41
97,5-108,5	7

Empezamos sustituyendo los intervalos por sus marcas de clase:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
48	4	192	9 216
59	19	1 121	66 139
70	86	6 020	421 400
81	72	5 832	472 392
92	41	3 772	347 024
103	7	721	74 263
	229	17 658	1 390 434

$N = \Sigma f_i = 229$

$\Sigma f_i x_i = 17\,658$

$\Sigma f_i x_i^2 = 1\,390\,434$

Los números de la 3.ª columna, $f_i x_i$, se obtienen multiplicando los números de las columnas anteriores $(x_i \cdot f_i = f_i x_i)$. Por ejemplo, $59 \cdot 19 = 1\,121$.

Análogamente, los de la 4.ª columna se obtienen multiplicando los de la 1.ª por los de la 3.ª $(x_i \cdot f_i x_i = f_i x_i^2)$. Por ejemplo, $59 \cdot 1\,121 = 66\,139$.

Con las sumas de las columnas de la tabla, obtenemos los parámetros:

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{17\,658}{229} = 77{,}1$ kg

DESVIACIÓN TÍPICA: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i x_i^2}{\Sigma f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{\dfrac{1\,390\,434}{229} - 77{,}1^2} = 11{,}2$ kg

COEF. DE VARIACIÓN: $\text{C.V.} = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{11{,}2}{77{,}1} = 0{,}145 = 14{,}5\%$

CON CALCULADORA

1. Preparamos la calculadora para que trabaje en el **MODO SD.**
2. Borramos los datos que pudiera haber acumulados de otras ocasiones: INV AC
3. Introducimos los datos: 48 × 4 DATA
   59 × 19 DATA
   …
   103 × 7 DATA
4. Resultados obtenidos:

N.º DE INDIVIDUOS Σf_i	n	→	229
SUMA DE VALORES $\Sigma f_i x_i$	Σx	→	17658
SUMA DE CUADRADOS $\Sigma f_i x_i^2$	Σx^2	→	1390434
MEDIA $\bar{x}$	$\bar{x}$	→	77.10917031
DESV. TÍPICA σ	σ_n	→	11.22230132

Actividades

1 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la tabla obtenida en el ejercicio resuelto de la página 125:

x_i	151	156	161	166	171	176
f_i	2	4	11	14	5	4

2 Halla, manualmente y con calculadora, $\bar{x}$, σ y C.V. en la distribución de los ejercicios 1 y 2 de la página 125.

Compara los resultados entre sí y con los del ejercicio 1 de esta página.

4 Medidas de posición

$\uparrow$
Me

Mediana

Si los individuos de una población están colocados en orden creciente según la variable que estudiamos, el que ocupa el valor central se llama individuo mediano, y su valor, la **mediana.** La mediana, *Me*, está situada de modo que antes de ella está el 50% de la población, y detrás, el otro 50%.

Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, 9, 10, 12, 15 $\to$ mediana: $Me = 8$

Si el número de individuos es par, la mediana es el valor medio de los dos centrales. Por ejemplo: 6, 7, 7, 7, **8**, **9**, 10, 12, 15, 16 $\to$ $Me = 8{,}5$

$\uparrow$ Q_1 $\quad$ $\uparrow$ *Me* $\quad$ $\uparrow$ Q_3

Cuartiles

Si en lugar de partir la totalidad de los individuos en dos mitades, lo hacemos en cuatro partes iguales (todas ellas con el mismo número de individuos), los dos nuevos puntos de separación se llaman **cuartiles.**

Cuartil inferior, Q_1, es un valor de la variable que deja por debajo de él al 25% de la población, y por encima, al 75%.

El **cuartil superior,** Q_3, deja debajo al 75% y encima al 25%.

Se designan por Q_1 y Q_3, porque la mediana sería el Q_2.

Por ejemplo, en la distribución

$$\underbrace{1, 2, 2}_{25\%} \underset{\uparrow\, Q_1}{,} \underbrace{3, 4, 5}_{25\%} \underset{\uparrow\, Me}{,} \underbrace{5, 5, 6}_{25\%} \underset{\uparrow\, Q_3}{,} \underbrace{8, 9, 10}_{25\%}$$

estos parámetros toman los valores siguientes: $Q_1 = 2{,}5$; $Me = 5$; $Q_3 = 7$

Mediana y cuartiles se llaman **medidas de posición.**

Ten en cuenta

En general, las cosas no son tan fáciles como en este ejemplo. Obsérvalo en el ejercicio resuelto.

Ejercicio resuelto

Calcular ***Me***, $\boldsymbol{Q_1}$ **y** $\boldsymbol{Q_3}$ **en la distribución:**

1 1 2 3 4 4 5 5 5
5 6 7 7 7 8 9 10

Hay 17 individuos. 17/2 = 8,5 $\to$ La *Me* es el valor del individuo 9.°, $Me = 5$.

17/4 = 4,25 $\to$ (5.° lugar) $Q_1 = 4$

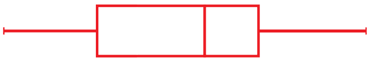
$17 \cdot (3/4) = 12{,}75$ $\to$ (13.° lugar) $Q_3 = 7$

Actividades

1 Calcula *Me*, Q_1 y Q_3 en la siguiente distribución, cuyos datos están dados ordenadamente:

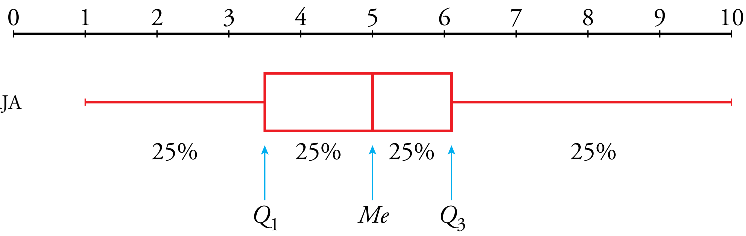
0 0 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 5 5 5
5 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9 9 10 10

5 Diagramas de caja



Este diagrama se llama también de **caja y bigotes.**

Observa la siguiente forma de representar distribuciones estadísticas.



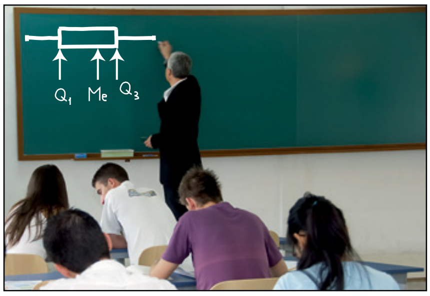
La gráfica corresponde a la distribución de notas en un cierto examen. En la parte alta se ha puesto la escala sobre la que se mueve la variable. Debajo se pone el diagrama propiamente dicho, que consiste en lo siguiente:

— La población total se parte en cuatro trozos, cada uno de ellos con el 25% de los individuos, previamente ordenados de menor a mayor.

— El 50% de los valores centrales se destacan mediante un rectángulo **(caja).**

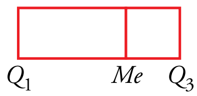
— Los valores extremos (el 25% de los menores y el 25% de los mayores) se representan mediante sendos segmentos **(bigotes).**

Los puntos que separan los cuatro trozos son, obviamente, los cuartiles y la mediana (Q_1, Me, Q_3).

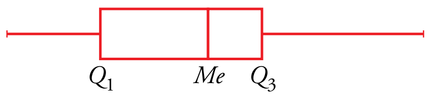


Los **diagramas de caja** (o caja y bigotes) se construyen del siguiente modo:

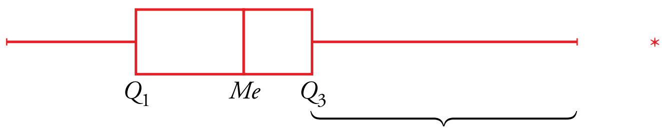
- La caja abarca el intervalo Q_1, Q_3 (llamado recorrido intercuartílico) y en ella se señala expresamente el valor de la mediana, Me.



- Los bigotes se trazan hasta abarcar la totalidad de los individuos, con la condición de que cada lado no se alargue más de una vez y media la longitud de la caja.



- Si uno (o más) de los individuos quedara por debajo o por arriba de esa longitud, el correspondiente lado del bigote se dibujaría con esa limitación y se añadiría, mediante asterisco, el individuo en el lugar que le corresponda. Por ejemplo:



La longitud de este lado del bigote es 1,5 veces la de la caja. En este lado no está incluido el individuo extremo que se representa mediante un asterisco.

Problemas resueltos

1. Representar, mediante un diagrama de caja, la siguiente distribución.

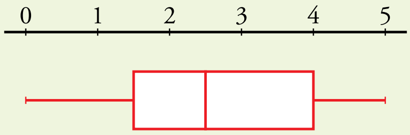
0 0 0 1 1   1 1 1 1 1
2 2 2 2 2   2 2 2 2 2
3 3 3 3 3   3 3 3 3 4
4 4 4 4 4   4 4 5 5 5

1. Tenemos 40 individuos.

$40 : 2 = 20 \rightarrow$ La mediana será el valor intermedio entre los individuos 20.° y 21.°. Esto es: $Me = 2{,}5$.

$40 : 4 = 10 \rightarrow$ El cuartil inferior será el valor intermedio entre los individuos 10.° y 11.°: $Q_1 = 1{,}5$.

Y, de la misma manera: $Q_3 = 4$.



La longitud de la caja es $4 - 1{,}5 = 2{,}5$. Los bigotes recogen al resto de la distribución. No hay individuo excepcionales.

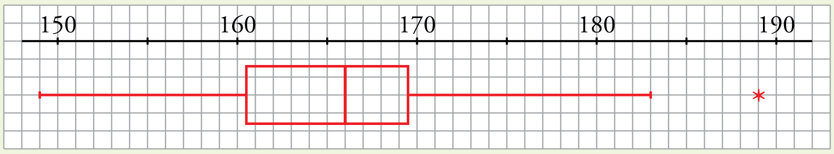
2. Las estaturas de los 40 alumnos y alumnas de una clase son, dadas ordenadamente:

149	**150**	**154**	**156**	**157**
158	**159**	**160**	**160**	**160**
161	**162**	**162**	**163**	**163**
163	**163**	**164**	**165**	**166**
166	**166**	**167**	**167**	**167**
168	**168**	**168**	**169**	**169**
170	**170**	**170**	**171**	**172**
173	**174**	**175**	**175**	**189**

Representar la distribución mediante un diagrama de caja.

2. Puesto que el número de individuos es múltiplo de cuatro, Q_1, Me y Q_3 serán los valores que hay entre los individuos 10.° y 11.°, entre 20.° y 21.°, entre 30.° y 31.°, respectivamente. Es decir,

$Q_1 = 160{,}5 \qquad Me = 166 \qquad Q_3 = 169{,}5$



La longitud de la caja es $169{,}5 - 160{,}5 = 9$.

Una vez y media esta longitud es $1{,}5 \cdot 9 = 13{,}5$.

El altísimo estudiante que mide 189 cm se separa del extremo superior de la caja $189 - 169{,}5 = 19{,}5$. Esa distancia es mayor que una vez y media la longitud de la caja. Por eso, hemos puesto a la derecha un bigote de longitud 13,5 y hemos añadido un asterisco que señala la situación del individuo excepcional.

Actividades

1 Representa mediante diagramas de caja y bigotes las siguientes distribuciones:

a) 1 1 2 3 4 4 5 5
5 6 7 7 7 8 9 10

b) 1 2 2 3 3   3 4 4 4 4   4 5 5 5 5
5 5 5 5 5   6 6 6 6 6   6 6 6 7 7
7 7 7 7 7   7 7 8 8 8   8 9 9 10 10

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Tablas de frecuencias

1 ▼▽▽ En una maternidad se han tomado los pesos (en kilogramos) de 50 recién nacidos:

2,8	3,2	3,8	2,5	2,7	3,7	1,9	2,6	3,5	2,3
3,0	2,6	1,8	3,3	2,9	2,1	3,4	2,8	3,1	3,9
2,9	3,5	3,0	3,1	2,2	3,4	2,5	1,9	3,0	2,9
2,4	3,4	2,0	2,6	3,1	2,3	3,5	2,9	3,0	2,7
2,9	2,8	2,7	3,1	3,0	3,1	2,8	2,6	2,9	3,3

a) ¿Cuál es la variable y de qué tipo es?

b) Construye una tabla con los datos agrupados en 6 intervalos de 1,65 a 4,05.

c) Representa gráficamente esta distribución.

2 ▼▽▽ A un grupo de 30 personas se les ha tomado el número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) obteniéndose los siguientes resultados:

87	85	61	51	64	75	80	70	69	82
80	79	82	74	92	76	72	73	63	65
67	71	88	76	68	73	70	76	71	86

Representa gráficamente esta distribución agrupando los datos en 6 intervalos (desde 50,5 a 92,5).

Media, desviación típica y C.V.

Halla la media, la desviación típica y el coeficiente de variación en las siguientes distribuciones:

3 ▼▽▽

x_i	f_i
0	12
1	9
2	7
3	6
4	3
5	3

4 ▼▽▽

x_i	f_i
0	1
1	5
2	6
3	7
4	4
5	4
6	3

5 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
1,65-2,05	4
2,05-2,45	5
2,45-2,85	13
2,85-3,25	17
3,25-3,65	8
3,65-4,05	3

6 ▼▽▽

INTERVALO	f_i
50,5-57,5	1
57,5-64,5	3
64,5-71,5	8
71,5-78,5	8
78,5-85,5	6
85,5-92,5	4

7 ▼▽▽ Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100 000 euros y una desviación típica de 12 500 euros. En otra empresa B, la media es 15 000 euros, y la desviación típica, 2 500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene más variación relativa.

Medidas de posición

8 ▼▽▽ La mediana y los cuartiles de la distribución de "Aptitud para la música" (escala 1-100) en un colectivo de personas son $Q_1 = 31$, $Me = 46$ y $Q_3 = 67$.

Copia y completa las siguientes afirmaciones:

a) El 75% tiene una aptitud superior o igual a ____.

b) El 25% tiene una aptitud superior o igual a ____.

c) El ____% tiene una aptitud igual o menor a 46 puntos.

d) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 46 e inferior o igual a 67.

e) El ____% tiene una aptitud superior o igual a 31 e inferior o igual a 67.

9 ▼▽▽ La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:

150	169	171	172	172	175	181
182	183	177	179	176	184	158

Calcula la mediana y los cuartiles y explica el significado de estos parámetros.

10 ▼▽▽ Calcula la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	9	7	6	3	3

11 ▼▽▽ Halla la mediana, los cuartiles y el percentil 60 en cada una de las siguientes distribuciones, correspondientes a las notas obtenidas en un test que han hecho dos grupos de estudiantes:

A: 25 – 22 – 27 – 30 – 23 – 22 – 31 – 18
24 – 25 – 32 – 35 – 20 – 28 – 30

B: 27 – 32 – 19 – 22 – 25 – 30 – 21
29 – 23 – 31 – 21 – 20 – 18 – 27

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Diagramas de caja

Haz el diagrama de caja correspondiente a las siguientes distribuciones.

12 ▼▽▽ La del ejercicio 8.

13 ▼▽▽ La del ejercicio 9.

14 ▼▽▽ La A y la B del ejercicio 10.

Muestreo

15 ▼▽▽ Se quieren realizar los siguientes estudios:

I. Tipo de transporte que utilizan los vecinos de un barrio para acudir a su trabajo.

II. Estudios que piensan seguir los alumnos y las alumnas de un centro escolar al terminar la ESO.

III. Edad de las personas que han visto una obra de teatro en una ciudad.

IV. Número de horas diarias que ven la televisión los niños y las niñas de tu comunidad autónoma con edades comprendidas entre 5 y 10 años.

a) Di en cada uno de estos casos cuál es la población.

b) ¿En cuáles de ellos es necesario recurrir a una muestra? ¿Por qué?

16 ▼▽▽ Para hacer un sondeo electoral en un pueblo de 400 electores, aproximadamente, se va a elegir una muestra de 200 individuos. Di si te parece válido cada uno de los siguientes modos de seleccionarlos y explica por qué.

a) Se le pregunta al alcalde, que conoce a todo el pueblo, qué individuos le parecen más representativos.

b) Se eligen 200 personas al azar entre las que acuden a la verbena el día del patrón.

c) Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.

d) Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 200 de ellos.

Aplica lo aprendido

17 ▼▽▽ En una urbanización de 25 familias se ha observado la variable "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:

0 1 2 3 1   0 1 2 3 1
0 1 1 1 4   0 1 1 1 4
3 2 2 1 1

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Haz el diagrama de barras.

c) Calcula la media y la desviación típica.

d) Halla la mediana y los cuartiles.

e) Dibuja el diagrama de caja.

Autoevaluación

¿Conoces los parámetros estadísticos $\bar{x}$, σ y C.V.? ¿Los sabes calcular e interpetar?

1 La edad de los visitantes de una exposición está recogida en la siguiente tabla:

EDAD	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65, 75]
N.º DE VIS.	63	95	189	243	175	105

a) Representa los datos en un gráfico adecuado.

b) Halla $\bar{x}$, σ y C.V.

2 Los beneficios, en millones de euros, de dos empresas en seis años consecutivos han sido los siguientes:

A	5,9	2,5	7,4	8,1	4,8	3,7
B	4,5	3,8	5,7	3,5	5,5	4,6

¿Cuál de las dos empresas tiene mayor variación?

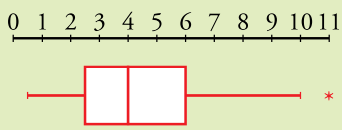
¿Conoces las medidas de posición, mediana, cuartiles y percentiles? ¿Los sabes calcular e interpretar? ¿Sabes utilizarlos para construir o interpretar un diagrama de caja?

3 Halla la mediana y los cuartiles de la siguiente distribución:

0 0 1 1 1   1 1 1 1 1   2 2 2 2 2   2 2 2 2 2
2 2 2 2 2   2 2 2 3 3   3 3 3 3 4   4 4 4 6 8

Haz el correspondiente diagrama de caja.

4 Indica por qué el diagrama de caja siguiente es incorrecto:



14 Cálculo de probabilidades

Históricamente, el interés por la probabilidad comienza con los juegos de azar. **Cardano,** algebrista italiano del siglo XVI, fue un jugador empedernido en algunas épocas de su vida. Esta pasión le hizo ser conocedor de trucos y fullerías. Acabó escribiendo un libro sobre el juego, en el que, por primera vez, se teoriza sobre las probabilidades.

Fue otro jugador en el siglo XVII, el caballero de Meré, quien indujo, sin saberlo, a que los matemáticos **Pascal** y **Fermat** mantuvieran una fructífera correspondencia: en sus cartas, proponían soluciones a algunos problemas sobre juegos planteados por Meré (al tirar cuatro dados, ¿qué es más ventajoso, apostar por "algún 6" o por "ningún 6"?), y elucubraban sobre otras situaciones probabilísticas. Así nació, con estos dos genios, la base de la teoría de las probabilidades.

Ni Pascal ni Fermat publicaron sus conclusiones, pero sí lo hizo **Huygens** en 1657, en un breve libro titulado *Sobre los razonamientos en los juegos de azar.*

En 1713, **Jacques Bernouilli** recogió lo escrito por Huygens, lo amplió y completó, construyendo así el primer libro importante sobre la teoría de las probabilidades: *Arte de la conjetura.*

Laplace, en 1812, publicó *Teoría analítica de las probabilidades,* donde recogió y organizó multitud de resultados que había ido obteniendo y difundiendo desde hacía 40 años. Se trata de la mayor aportación de la historia a esta teoría. Pocos años después publicó *Ensayo filosófico de las probabilidades,* destinado a los no expertos. De este libro es la siguiente frase:

La teoría de las probabilidades es solo
sentido común expresado con números.

1 Probabilidades en experiencias simples

Experiencias irregulares

Para calcular la probabilidad de un suceso correspondiente a una experiencia irregular (una chincheta, o un dado cargado, o extraer una bola de una bolsa cuya composición ignoramos…) no queda más remedio que experimentar. Es decir, repetir la experiencia muchas veces, averiguar la frecuencia relativa de ese suceso y asignarle ese valor (aproximado) a la probabilidad. Cuantas más veces hagamos la experiencia, más fiable será el valor asignado.

Por ejemplo, si en una bolsa hay bolas de cinco colores (🔴, 🟢, 🔵, ⚪ y ⚫) y realizamos 100 veces la experiencia de extraer, mirar, anotar y devolver a la bolsa, obteniendo los siguientes resultados:

f(🔴) = 34, f(🟢) = 23, f(🔵) = 21, f(⚪) = 8, f(⚫) = 14

les asignaríamos los siguientes valores a las probabilidades:

P[🔴] ≈ fr(🔴) = 0,34; P[🟢] ≈ fr(🟢) = 0,23; P[🔵] ≈ fr(🔵) = 0,21;

P[⚪] ≈ fr(⚪) = 0,08; P[⚫] ≈ fr(⚫) = 0,14

Experiencias regulares. Ley de Laplace

Si la experiencia aleatoria se realiza con un instrumento regular (dado correcto, baraja completa…), entra en juego la ley de Laplace. Recordémosla:

- Si el espacio muestral tiene n casos y la experiencia es *regular*, entonces todos ellos tienen la misma probabilidad, $1/n$.
- Si un suceso tiene k casos, entonces su probabilidad es k/n.

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}}$$

Por ejemplo, en una bolsa hay 40 bolas idénticas salvo en el color. De ellas, 15 son rojas. Entonces, al extraer una bola al azar:

$$P[\text{Roja}] = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Problemas resueltos

1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro perfecto, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:

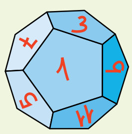
a) $P[8]$

b) P[menor que 3]

c) P[impar]

d) P[número primo]

e) P[mayor que 4 pero menor que 8]



1. a) $P[8] = \frac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el “8” es uno de ellos.

b) Solo 1 y 2 son menores que 3 → $P[\text{menor que } 3] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) Hay 6 números impares menores que 12 → $P[\text{impar}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos → $P[\text{número primo}] = \frac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

2. **Con un molde se han fabricado varios miles de dados. Sospechamos que son incorrectos. ¿Cómo procedemos para averiguar si son o no correctos? En caso de que no lo sean, ¿cómo evaluaremos la probabilidad de cada cara?**

2. Podemos suponer que todos los dados son idénticos. Experimentamos con varios efectuando, en total, 1 000 lanzamientos. Estos son los resultados:

	1	2	3	4	5	6
f	154	123	236	105	201	181
fr	0,154	0,123	0,236	0,105	0,201	0,181

Observamos que algunas de las frecuencias relativas se diferencian demasiado del valor 1/6 = 0,166…

Puesto que el número de experimentaciones (1 000) es suficientemente grande, podemos concluir que el dado es defectuoso. Tomaremos las frecuencias relativas de las distintas caras como valores aproximados de sus respectivas probabilidades.

3. **Lanzamos dos dados correctos y anotamos las diferencias de las puntuaciones.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Qué probabilidad tiene cada caso?

c) Hallar la probabilidad del suceso "la diferencia es mayor que 3".

3.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	0	1	2	3	4	5
⚁	1	0	1	2	3	4
⚂	2	1	0	1	2	3
⚃	3	2	1	0	1	2
⚄	4	3	2	1	0	1
⚅	5	4	3	2	1	0

A partir de la tabla de la izquierda, construimos la distribución siguiente:

DIFERENCIAS	0	1	2	3	4	5
N.° DE VECES	6	10	8	6	4	2
PROBABILIDAD	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

a) y b) En la tabla anterior aparece el espacio muestral, $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, con las probabilidades asociadas a cada caso.

c) P[Diferencia mayor que 3] = $P[\{4, 5\}]$ = 4/36 + 2/36 = 6/36 = 1/6

4. **Un juego de cartas solo distingue estas posibilidades:**

FIGURA (sota, caballo o rey), AS, MENOR QUE 6 (2, 3, 4, 5), MAYOR QUE 5 (6, 7).

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Di la probabilidad en cada caso.

c) ¿Cuál es la probabilidad de "no FIGURA"?

4. Hay 40 cartas. La probabilidad de cada una es 1/40.

a) En este juego, el espacio muestral es E = {"FIGURA", "AS", "< 6", "> 5"}.

b) Hay 3 figuras en cada palo ⟶ P[FIGURA] = 12/40 = 3/10 = 0,3

Hay 4 ases en la baraja ⟶ P[AS] = 4/40 = 1/10 = 0,1

Hay 4 números < 6 en cada palo → P[< 6] = 16/40 = 2/5 = 0,4

Hay 2 números > 5 en cada palo → P[> 5] = 8/40 = 1/5 = 0,2

c) P[no FIGURA] = 1 – P[FIGURA] = 1 – 0,3 = 0,7

Actividades

1 Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P[múltiplo de 3]

b) P[menor que 5]

c) P[número primo]

d) P[no múltiplo de 3]

2 Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones*.

a) Escribe el espacio muestral y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) Halla la probabilidad del suceso "la menor puntuación es menor que 4" = "< 4".

c) Halla P[no < 4].

2 Probabilidades en experiencias compuestas

Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser **dependientes** o **independientes.**

Recuerda

Las siguientes experiencias:

a) *extraer tres cartas de una baraja,*

b) *lanzar cinco dados,*

se pueden considerar como experiencias compuestas de otras simples:

a) *Extraer una carta de una baraja, después otra, y después otra.*

b) *Lanzar un dado, y otro… y otro.*

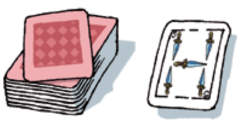
Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas (un dado y otro dado) independientes, pues el resultado de cada dado no influye en el otro.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

La 1.ª es AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.

La 1.ª no es AS. Quedan 4 ASES en 39 cartas.



Por ejemplo, extraer dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra carta) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda:

1.ª extracción	quedan	2.ª extracción
AS	39 cartas, 3 ASES	$P[\text{AS}] = 3/39$
NO AS	39 cartas, 4 ASES	$P[\text{AS}] = 4/39$

Como vemos, las probabilidades de los sucesos en la 2.ª extracción *dependen* de lo que ocurrió en la 1.ª.

Extracciones con o sin reemplazamiento

“Extraemos una bola de esta bolsa y, después, otra”. Falta un dato: ¿la que hemos extraído la echamos de nuevo a la bolsa antes de la 2.ª extracción o no?

— “Sacamos una bola, la miramos, la devolvemos a la bolsa, removemos y volvemos a sacar”, lo resumimos así: “sacamos dos bolas **con reemplazamiento**”.

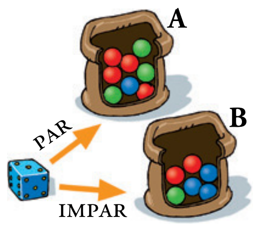
— “Sacamos una bola, la miramos y sacamos otra” se resume así: “sacamos dos bolas **sin reemplazamiento**”.

En el primer caso, las experiencias son independientes. En el segundo, dependientes.

Actividades

1 

Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?

2 

Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?

3 Composición de experiencias independientes

Experiencias independientes

El resultado de cada experiencia **no influye** en el resultado de la siguiente.

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la primera, S_2 en la segunda, etc., es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } \dots] = P[S_1] \cdot P[S_2] \cdot \dots$$

Problemas resueltos

1. Lanzamos dos dados, uno rojo (R) y otro verde (V). Hallar estas probabilidades:

a) 3 en R y 5 en V

b) 5 en R y 3 en V

c) un 3 y un 5

d) PAR en R y > 2 en V

"PAR" = {2, 4, 6}

"> 2" = {3, 4, 5, 6}

1. a) P[3 en R y 5 en V] = $P[3] \cdot P[5] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

b) P[5 en R y 3 en V] = $P[5] \cdot P[3] = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

c) P[un 3 y un 5] = P[3 en R y 5 en V] + P[5 en R y 3 en V] =

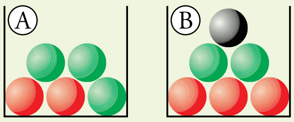
$$= \left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

d) P[PAR en R y > 2 en V] = P[PAR] · P[> 2] =

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1,1	2,1	3,1	4,1	5,1	6,1
⚁	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2
⚂	1,3	2,3	3,3	4,3	5,3	6,3
⚃	1,4	2,4	3,4	4,4	5,4	6,4
⚄	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
⚅	1,6	2,6	3,6	4,6	5,6	6,6

2. Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:



a) P[🔴 y 🔴]

b) P[🔴 y 🟢]

c) P[🟢 y 🔴]

d) P[una de ellas 🔴 y otra 🟢]

e) P[la segunda ⚫]

2. a) P[🔴 y 🔴] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🔴] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) P[🔴 y 🟢] = P[1.ª 🔴] · P[2.ª 🟢] = $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) P[🟢 y 🔴] = P[1.ª 🟢] · P[2.ª 🔴] = $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) P[una de ellas 🔴 y otra 🟢] = P[🔴 y 🟢] + P[🟢 y 🔴] = $\frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) P[la 2.ª ⚫] = P[cualquier cosa la 1.ª] · P[la 2.ª ⚫] = $1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Actividades

1 Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] b) P[3 ASES]

c) P[un AS y dos FIGURAS] d) P[ningún AS]

2 Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras b) alguna cruz

3 Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) P[tres caras] b) P[ninguna cara] c) P[alguna cara]

4 Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

4 Composición de experiencias dependientes

Experiencias dependientes

El resultado de cada experiencia influye en las probabilidades de las siguientes.

Si dos sucesos S_1 y S_2 corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra S_1 en la 1.ª y S_2 en la 2.ª es:

$$P[S_1 \text{ y } S_2] = P[S_1] \cdot P[S_2 \text{ en la 2.ª} / S_1 \text{ en la 1.ª}] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1]$$

La expresión $P[S_2 / S_1]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de S_2 **condicionada** a que ocurra S_1.

Para tres sucesos dependientes:

$$P[S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3] = P[S_1] \cdot P[S_2 / S_1] \cdot P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$$

La probabilidad condicionada $P[S_3 / S_1 \text{ y } S_2]$ significa "probabilidad de que ocurra S_3 supuesto que ocurrieron S_1 y S_2".

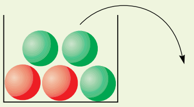
Problema resuelto

De una urna con 3 bolas verdes y 2 rojas, extraemos dos bolas. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambas sean verdes.

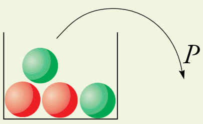
b) La 1.ª sea roja y la 2.ª verde.

c) Las dos sean rojas.



$P[\textcolor{green}{\bullet}] = \frac{3}{5}$

Si la 1.ª es $\textcolor{green}{\bullet}$



$P[\textcolor{green}{\bullet} \text{ en este caso}] = \frac{2}{4}$

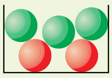
a) Imaginemos una gran cantidad de gente. Cada uno de ellos tiene una urna con 3 bolas verdes y 2 bolas rojas. Son sometidos a dos pruebas:

1.ª prueba: Han de extraer bola verde. (La dejan fuera).

2.ª prueba: Han de volver a extraer verde.

Averigüemos qué proporción de gente supera cada prueba y, en consecuencia, qué proporción supera las dos.

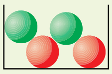
PRIMERA EXTRACCIÓN



$P[\textcolor{green}{\bullet}] = 3/5$. Por término medio, 3 de cada 5 individuos extraen bola verde y superan la 1.ª prueba.

Ahora, la composición de la urna se modifica dependiendo del resultado de la primera prueba. Como estamos siguiendo la pista a los que extraen bola verde, estos tienen ahora una urna con 2 bolas verdes y 2 bolas rojas. Veamos *qué proporción de ellos* supera la 2.ª prueba.

SEGUNDA EXTRACCIÓN



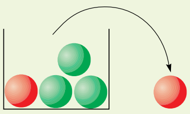
$P[\textcolor{green}{\bullet}] = 2/4$. Por término medio, 2 de cada 4 de los que superan la 1.ª prueba superan también la 2.ª.

Proporción de individuos que superan ambas pruebas: $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$. Es decir:

$$P[\textcolor{green}{\bullet} \text{ y } \textcolor{green}{\bullet}] = P[\textcolor{green}{\bullet} \text{ la 1.ª}] \cdot P[\textcolor{green}{\bullet} \text{ la 2.ª} / \textcolor{green}{\bullet} \text{ la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Estas pruebas son **dependientes,** porque el resultado de la primera influye en la segunda.

b) $P[\textcolor{red}{\bullet} \text{ y } \textcolor{green}{\bullet}] = P[\textcolor{red}{\bullet} \text{ la 1.ª}] \cdot P[\textcolor{green}{\bullet} \text{ la 2.ª} / \textcolor{red}{\bullet} \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

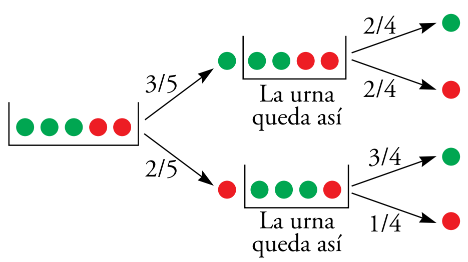


Si la 1.ª es $\textcolor{red}{\bullet}$, quedan cuatro: 1 $\textcolor{red}{\bullet}$ y 3 $\textcolor{green}{\bullet}$

c) $P[\textcolor{red}{\bullet} \text{ y } \textcolor{red}{\bullet}] = P[\textcolor{red}{\bullet} \text{ la 1.ª}] \cdot P[\textcolor{red}{\bullet} \text{ la 2.ª} / \textcolor{red}{\bullet} \text{ la 1.ª}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Descripción de la experiencia mediante un diagrama en árbol

La experiencia de la página anterior se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**



$P[$🟢 y 🟢$] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🟢 y 🔴$] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🔴 y 🟢$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

$P[$🔴 y 🔴$] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Recuerda

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[$🔴 en la 1.ª$]$

$\frac{3}{4} = P[$🟢 en 2.ª / 🔴 en 1.ª$]$

Problema resuelto

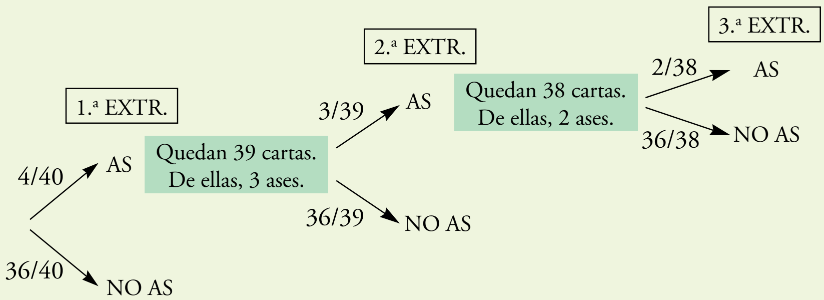
Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.

$P[3\ \text{ASES}] = P[\text{AS en 1.ª y AS en 2.ª y AS en 3.ª}] =$

$= P[\text{AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] =$

$= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$

Lo describimos en un diagrama en árbol:



$P[3\ \text{ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] \cdot$

$\cdot\ P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$

Observa

Si en la 1.ª sale AS, quedan 3 ASES en 39 cartas. Por tanto:

$P[\text{AS en 2.ª / AS en 1.ª}] = \frac{3}{39}$

Análogamente:

$P[\text{AS en 3.ª / AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{2}{38}$

Actividades

1 Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?

2 Copia y completa el diagrama en árbol del problema resuelto de esta página y sobre él halla P[NINGÚN AS].

3 Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

4 Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

5 Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?

Ejercicios y problemas

Consolida lo aprendido utilizando tus competencias

Practica

Experiencias simples

1 ▼▽▽ En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída sea un número…:

a) … de una sola cifra. b) … múltiplo de 7.

c) … mayor que 25.

2 ▼▽▽ Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:

a) REY O AS. b) FIGURA Y OROS. c) NO SEA ESPADAS.

3 ▼▽▽ Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación mayor (si coinciden, la de uno de ellos).

a) Completa en tu cuaderno la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

A: n.° par, *B*: n.° menor que 4.

Experiencias compuestas

4 ▼▽▽ a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

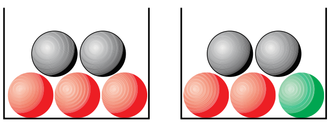
5 ▼▽▽ Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

6 ▼▽▽ Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:

a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.



7 ▼▽▽ Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula P[2 rojas] y P[2 verdes].

Aplica lo aprendido

8 ▼▼▽ Una urna contiene 100 bolas numeradas así:

00, 01, 02, …, 99

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la cifra de las unidades del número que tiene cada bola. Se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) $x = 3$ b) $y = 3$ c) $x \neq 7$ d) $x > 5$

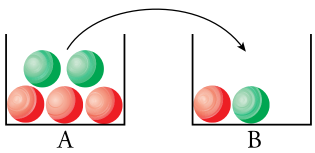
e) $x + y = 9$ f) $x < 3$ g) $y > 7$ h) $y < 7$

9 ▼▽▽ Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

10 ▼▽▽ En un laboratorio se somete un nuevo medicamento a tres controles. La probabilidad de pasar el primero es 0,89, la de pasar el segundo es 0,93 y la de pasar el tercero es 0,85. ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto pase las tres pruebas?

11 ▼▼▽ Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B. Calcula:

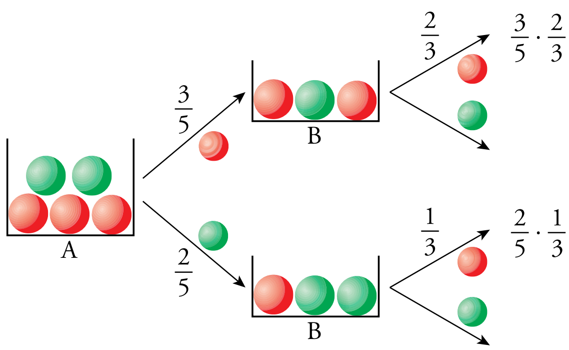


a) P[1.ª roja y 2.ª roja] b) P[1.ª roja y 2.ª verde]

c) P[2.ª roja / 1.ª verde] d) P[2.ª roja / 1.ª roja]

e) P[2.ª roja] f) P[2.ª verde]

☞ *e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el siguiente diagrama:*



12 ▼▼▽ En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase.

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.

13 ▼▼▽ Tiramos dos dados correctos. Di cuál es la probabilidad de obtener:

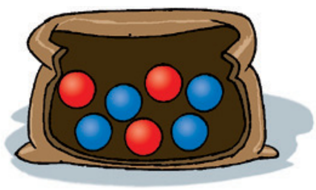
a) En los dos la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

c) En uno de ellos, mayor puntuación que en el otro.

14 ▼▼▽ Se extraen dos bolas de esta bolsa.

Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.



Resuelve problemas

15 ▼▼▽ En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que la experiencia sea:

a) Con reemplazamiento.

b) Sin reemplazamiento.

16 ▼▼▽ Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.

Autoevaluación

¿Resuelves problemas de probabilidad de experiencias simples y compuestas?

1 Encima de una mesa tenemos estas cuatro cartas de una baraja española:

– Cinco de copas.

– As de oros.

– Cuatro de bastos.

– Dos de oros.

Sacando al azar otra carta del mazo y fijándonos en su número, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las cinco cartas (las cuatro de la mesa y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?

2 Lanzamos una moneda y un dado y observamos los resultados obtenidos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener CRUZ y CINCO?

b) ¿Y la de obtener CARA y NÚMERO PAR?

3 Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:

a) Sea 5.

b) Sea 6.

c) Sea 4.

☞ *Haz una tabla con todos los casos posibles.*

4 Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

A: 7 blancas y 3 negras

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer bola roja.

5 La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones

Anotaciones